Редове

1. Числови редове

Нека $a_0, a_1, \ldots, \alpha_k, \ldots$ е дадена редица от реални числа. Сума от вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots \tag{4.1}$$

се нарича *безкраен числов ред.*

Възприети са следните означения (дефиниции):

(1) Числото a_k се нарича *общ елемент* на реда (4.1).

(2) Числото $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ се нарича *n-та парциална (частична) сума* на реда (4.1).

(3) Числото $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ се нарича *n-ти остатък* на реда (4.1).

Ако редицата $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ е сходяща, то нейната граница $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_k$ се нарича *сума на реда* (4.1). Ако числото S е крайно (т.е. $|S| < \infty$), то редът (4.1) се нарича *сходящ.* В противен случай (т.е., ако S_1, S_2, S_3, $\ldots, S_n, \ldots$ е разходяща редица или $|S| = \infty$) казваме, че той е *разходящ.*

Теорема 4.1 (Необходимо условие за сходимост). *Нека* (4.1) *е сходящ числов ред. Тогава*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Забележка 4.1. От теорема 4.1 следва, че редът е разходящ ако: границата $\lim\limits_{k\to\infty} a_k$ не съществува или $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \neq 0$.

Редът

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \cdots \tag{4.2}$$

се нарича *хармоничен ред.*

Хармоничният ред (4.2) е разходящ, въпреки, че $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$.

Редът

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{k^{\alpha}} + \cdots \tag{4.3}$$

се нарича *обобщен хармоничен ред.*

Обобщеният хармоничният ред (4.3) е сходящ тогава и само тогава, когато $\alpha > 1$.

Теорема 4.2. (1) *Нека:*

(1.1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *е сходящ числов ред и нека неговата сума е* S.

(1.2) α *е произволно реално число.*

Тогава редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha a_k$ *е сходящ и неговата сума е* αS.

(2) *Нека* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *са два сходящи числови реда и нека техните суми са* S_1 *и* S_2*, съответно.*

Тогава редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ *е сходящ и неговата сума е* $S_1 + S_2$.

Теорема 4.3. *Нека* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *са два реда и нека съществува естествено число* k_0 *такова, че*

$$0 \le a_k \le b_k, \quad \text{за всяко } k \ge k_0.$$

Тогава:

(1) *Ако редът* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *е сходящ, то редът* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *е също сходящ.*

(2) *Ако редът* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *е разходящ, то редът* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *е също разходящ.*

Пример 4.1 (Геометрична прогресия)**.** Да разгледаме реда

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \cdots .$$

Пресмятаме сумата от първите n члена на този ред:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n = \frac{a - aq^n}{1 - q},$$

ако $q \neq 1$; $S_n = na$ ако $q = 1$ и $S_n = a\frac{1-(-1)^n}{2}$ ако $q = -1$.

Нека $|q| < 1$. Тогава $q^n \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. $S_n \to \frac{a}{1-q}$ и следователно редът е сходящ. В този случай сумата на реда е $S = \frac{a}{1-q}$.

Нека $|q| \geq 1$. Тогава границата S_n не съществува (т.е. не е крайно число, ако $q \neq -1$ и не съществува ако $q = -1$). Следователно редът е разходящ.

Ето защо геометричната прогресия е сходяща тогава и само тогава, когато $|q| < 1$ и

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq_k = a + aq + aq^2 + \cdots = \frac{a}{1-q}.$$

Пример 4.2. Да се изследва за сходимост реда

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k+1}.$$

Решение. Очевидно

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = -1.$$

Следователно редицата $\{a_k\}$ няма граница, т.е. редът е разходящ. □

Пример 4.3. Да се изследва за сходимост реда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3k^2}{k^2+1}.$$

Решение. Очевидно

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{3k^2}{k^2+1} = 3 \neq 0,$$

т.е. редът е разходящ. □

Задача 4.1. Да се изследват за сходимост следните редове:

(1) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots;$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} (0.01)^{\frac{1}{k}} = 0.01 + \sqrt{0.01} + \sqrt[3]{0.01} + \cdots;$

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$;

(4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$;

(5) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1000k+1} = \frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{3001} + \cdots$.

Отговори:

(1) Разходящ; (2)-(5) Редовете са сходящи.

2. Критерии на Коши и д'Аламбер

Нека изрично отбележим, че изследването на безкрайни числови редове за сходимост или разходимост не може да бъде алгоритмизирано (т.е. не съществува краен алгоритъм, които да установява сходимостта или разходимостта на произволен числов ред). Поради този факт са доказани различни критерии[1], които установяват сходимостта или разходимостта на даден ред. Ще започнем с формулирането на два от тях.

Да разгледаме реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots \,. \tag{4.4}$$

Теорема 4.4 (Критерий на Коши[2]). *Нека $a_k \geq 0$, за всяко $k \in \mathbb{N}$ и нека съществува границата*

$$C = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}.$$

Тогава:

(1) *Ако $C < 1$, то редът (4.4) е сходящ.*
(2) *Ако $C > 1$, то редът (4.4) е разходящ.*

Теорема 4.5 (Критерий на д'Аламбер[3]). *Нека $a_k > 0$, за всяко $k \in \mathbb{N}$ и нека съществува границата*

$$D = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$

[1] В настоящата глава, ще използваме думата "критерий" като "достатъчно условие".

[2] Baron Augustin-Louis Cauchy (21 August, 1789 – 23 May, 1857).

[3] Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (16 November 1717 – 29 October 1783).

Тогава:

(1) *Ако $D < 1$, то редът (4.4) е сходящ.*
(2) *Ако $D > 1$, то редът (4.4) е разходящ.*

Забележка 4.2. Валидно е следното твърдение: Ако членовете на редицата $a_1, a_2, \ldots$ са положителни числа, то

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \le \liminf_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k},$$
$$\limsup_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \ge \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k},$$

.

Ето защо, винаги когато критерият на д'Аламбер дава възможност да се установи сходимостта на ред с положителни членове, то и критерият на Коши дава тази възможност. Съществуват редове за които критерият на Коши "работи", без това да е вярно за критерия на д'Аламбер.

Пример 4.4. Да се изследва за сходимост реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{3k+1}\right)^k.$$

Решение. Прилагаме критерия на Коши:

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\left(\frac{k}{3k+1}\right)^k} = \frac{k}{3k+1}.$$

Следователно

$$C = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{3k+1} = \frac{1}{3} < 1,$$

т.е. редът е сходящ. □

Пример 4.5. Да се изследва за сходимост реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^5 \left(\frac{3k+2}{4k+3}\right)^k.$$

Решение. Прилагаме критерия на Коши:

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{k^5 \left(\frac{3k+2}{4k+3}\right)^k} = k^{\frac{5}{k}} \frac{3k+2}{4k+3}.$$

Следователно (използваме ревенството $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$)

$$C = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{3k+2}{4k+3} = \frac{3}{4} < 1,$$

т.е. редът е сходящ. $\square$

Задача 4.2. Да се изследват за сходимост редовете:

(1) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}$; (2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{k}\right)^k$;

(3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k}{k+2}\right)^k$; (4) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$;

(5) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{k}+2}{\sqrt{k}+3}\right)^{k^{3/2}}$; (6) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 3^{k+1} \left(\frac{k+2}{k+3}\right)^{k^2}$;

(7) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2+5}{k^2+6}\right)^{k^3}$; (8) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^{k^2}$;

(9) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(k \sin\frac{1}{k}\right)^{k^3}$; (10) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \left(\frac{k+2}{k}\right)^{k^2}$.

Отговори:

Използвайте критерия на Коши. Всички редове са сходящи с изключение на (6) и (10).

Пример 4.6. Да се изследва за сходимост реда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}.$$

Решение. Използваме критерия на д'Аламбер. Предварително опростяваме израза

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{2^k} = \frac{2}{k+1}.$$

От

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k+1} = 0 < 1$$

и критерия на д'Аламбер следва, че редът е сходящ. $\square$

Пример 4.7. Да се изследва за сходимост реда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!},$$

където c е положителна константа.

Решение. Използваме критерия на д'Аламбер. Предварително опростяваме израза

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{c^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{c^k} = \frac{c}{k+1}.$$

От

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{c}{k+1} = 0 < 1$$

и критерия на д'Аламбер следва, че редът е сходящ за всяка положителна константа c. □

Пример 4.8. Да се изследва за сходимост реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{0.5^k}{k^2}$$

Решение. Прилагаме критерия на д'Аламбер:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{0.5^{k+1}}{(k+1)^2} \cdot \frac{k^2}{0.5^k} = \frac{0.5}{(1+1/k)^2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Следователно редът е сходящ. □

Пример 4.9. Да се изследва за сходимост реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^3}.$$

Решение. Използваме критерия на д'Аламбер:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2^{k+1}}{(k+1)^3} \frac{k^3}{2^k} = \frac{2}{(1+1/k)^3} = 2 > 1.$$

Следователно редът е разходящ. □

Пример 4.10. Да се изследва за сходимост реда двата реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{3^n n^n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$$

Решение. Прилагаме критерия на д'Аламбер. За първия ред (използваме известното равенство $\lim\limits_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right) = e$):

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} =& \frac{e^{nk+1}(k+1)!}{3^{k+1}(k+1)^{k+1}} \frac{3^k k^k}{e^k k!} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{e(k+1)k^k}{3(k+1)(k+1)^k} = \frac{e}{3(1+1/k)^k} = \frac{e}{3e} \\
&= \frac{1}{3} < 1,
\end{aligned}$$

откъдето следва сходимостта на първия ред.

Аналогично, за втория ред получаваме

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3}{\left(1+\frac{1}{k}\right)} = \frac{3}{e} > 1,$$

т.е. редът е разходящ. □

Задача 4.3. Да се изследват за сходимост редовете:

(1) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{k^{10}}{(k+1)!}$; (2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2}$;

(3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!(2.7)^{k+1}}$; (4) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)!}{(3k+4)3^k}$;

(5) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)!!}{1\,4\,\ldots\,(3k+1)}$; (6) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)!!}{3^k k!}$;

(7) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{5^{2k}(k!)^3}{(3k)!}$; (8) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1\,5\,\ldots\,(4k-3)}{2\,6\,\ldots\,(4k-2)}$;

(9) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!(2k+1)!}{(3k)!}$; (10) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(3k)!}{(k!)^3 4^{3k}}$.

Отговори:

Използвайте критерия на д'Аламбер. Всички редове са сходящи с изключение на (2), (3), (4). За реда (2): критерият на д'Аламбер не е приложим.

3. Критерии на Раабе-Дюамел и Гаус

Наред с разгледаните критерии за сходимост на редове с положителни членове съществуват и много други. Някои от тях са формулирани по-нататък.

Разглеждаме реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots . \qquad (4.5)$$

Следващият критерий е по-общ от критерия на д'Аламбер.

Теорема 4.6 (Критерий на Раабе[4]-Дюамел[5]). *Нека $a_k > 0$, за всяко $k \in \mathbb{N}$ и нека съществува границата*

$$R = \lim_{k\to\infty} k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right).$$

Тогава:

(1) *Ако $R > 1$, то редът (4.5) е сходящ.*
(2) *Ако $R < 1$, то редът (4.5) е разходящ.*

Теорема 4.7 (Критерий на Гаус[6]). *Нека $a_k > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ и нека*

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \lambda + \frac{\mu}{k} + \frac{\theta_k}{k^{1+\varepsilon}},$$

където $|\theta_k| < C = const.$ и $\varepsilon > 0$.

Тогава:

(1) *Ако $\lambda > 1$, то редът (4.5) е сходящ.*
(2) *Ако $\lambda < 1$, то редът (4.5) е разходящ.*
(3) *Ако $\lambda = 1$, то:*
 (3.1) *Ако $\mu > 1$, то редът (4.5) е сходящ.*
 (3.2) *Ако $\mu \le 1$, то редът (4.5) е разходящ.*

Пример 4.11. Да се изследва за сходимост реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{1}{2k+1}.$$

[4]Joseph Ludwig Raabe (15 May, 1801 –– 22 January, 1859).
[5]Jean-Marie Constant Duhamel (5 February, 1797 –– 29 April, 1872).
[6]Johann Carl Friedrich Gauß (30 April, 1777 – 23 February, 1855).

Решение. Очевидно
$$a_k = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{1}{2k+1}, \quad \text{и} \quad a_{k+1} = \frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!}\frac{1}{2k+3}.$$
Ето защо
$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{(2k+2)(2k+3)}{(2k+1)^2}$$
и
$$R = \lim_{k\to\infty} k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) = \lim_{k\to\infty} k\left(\frac{(2k+2)(2k+3)}{(2k+1)^2} - 1\right)$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{6k^2+5k}{(2k+1)^2} = \frac{3}{2} > 1.$$
Следователно редът е сходящ. □

Пример 4.12. Да се изследва за сходимост реда
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$$

Решение. Очевидно
$$a_k = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, \quad \text{и} \quad a_{k+1} = \frac{(2k+2)!!}{(2k+3)!!}.$$
Ето защо
$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{2k+3}{2k+2}$$
и
$$R = \lim_{k\to\infty} k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) = \lim_{k\to\infty} k\left(\frac{2k+3}{2k+2} - 1\right)$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\frac{k}{(k+1)} = \frac{1}{2} < 1.$$
Следователно редът е разходящ. □

Задача 4.4. Изследвайте за сходимост редовете:
$$(1)\ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{k!2^k}; \qquad (2)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{k}{e}\right)^k.$$

Отговори:

Използвайте критерия на Раабе. (1), (2) Редовете са разходящи.

4. Редове с произволни членове

Разглеждаме реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots \,, \tag{4.6}$$

където $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Заедно с реда (4.6) разглеждаме и реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_k| + \cdots \,. \tag{4.7}$$

Дефиниция 4.1. (1) Редът (4.6) се нарича *абсолютно сходящ*, ако редът (4.7) е сходящ.

(2) Редът (4.6) се нарича *условно сходящ*, ако редът (4.6) е сходящ и редът (4.7) е разходящ.

Теорема 4.8. *Всеки абсолютно сходящ числов ред е сходящ.*

За определянето на абсолютната сходимост на реда (4.6) е достатъчно да изследваме сходимостта на реда (4.7). Нека изрично отбележим, че редът (4.7) е с неотрицателни членове, т.е. за него са приложими критериите на Коши, д'Аламбер, и т.н.

Теорема 4.9 (Критерий на Лайбниц). *Нека $a_k \geq 0$ за всяко $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Редът*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^k a_k + \cdots$$

е сходящ, ако:

(1) $a_{k+1} \leq a_k$, *за всяко* $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$;

(2) $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = 0$.

Теорема 4.10 (Критерий на Абел). *Нека:*

(1) *Редът* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *е сходящ.*

(2) *Редицата* $\{b_k\}$ *е монотонна и ограничена.*

Тогава редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *е сходящ.*

Теорема 4.11 (Критерий на Дирихле). *Нека:*

(1) *Редицата от частичните суми на реда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *е ограничена.*

(2) *Редицата* $\{b_k\}$ *е монотонна и* $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$.

Тогава редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *е сходящ.*

Пример 4.13. Да се изследва за сходимост реда

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Решение. Ще използваме теоремата на Лайбниц: $a_k = \frac{1}{k}$. Тогава:

(1) $a_{k+1} = \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} = a_k$, $k \in \{2, 3, 4 \dots\}$.
(2) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$.

Следователно редът е сходящ. Ще отбележим, че редът

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$$

е разходящ (хармоничен ред!). Следователно редът е условно сходящ.

□

Задача 4.5. Да се изследват за сходимост редовете:

(1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k+1}$; (2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \sin \frac{1}{\sqrt{k}}$;

(3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \arctan \frac{\sqrt{k}}{2k-1}$.

Отговори:

Сходящи.

Пример 4.14. Да се изследва за сходимост реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-5)^k}{1 + 5^{2k}}.$$

Решение. Първо ще изследваме реда за абсолютна сходимост. За целта разглеждаме реда

$$(*)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-5)^k}{1+5^{2k}}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k}{1+5^{2k}}.$$

От неравенството $\frac{5^k}{1+5^{2k}} < \frac{5^k}{5^{2k}}$ следва, че редът (*) се мажорира от геометричната прогресия

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k}{5^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^k,$$

т.е. редът (*) е сходящ.

Ето защо, разглежданият ред е абсолютно сходящ. □

Пример 4.15. Да се изследва за сходимост реда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2k-2}{7k+2}\right)^k.$$

Решение. Първо ще изследваме реда за абсолютна сходимост. За целта разглеждаме реда

$$(*)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\left|(-1)^k\left(\frac{2k-2}{7k+2}\right)^k\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k-2}{7k+2}\right)^k.$$

Прилагаме теоремата на Коши:

$$K = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{2k-2}{7k+2}\right)^k} = \lim_{k\to\infty}\frac{2k-2}{7k+2} = \frac{3}{7} < 1.$$

т.е. редът (*) е сходящ.

Ето защо, разглежданият ред е абсолютно сходящ. □

Пример 4.16. Да се изследва за абсолютна сходимост реда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2^{k^2}}{k!}.$$

Решение. Разглеждаме реда

$$(*)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\left|(-1)^{k+1}\frac{2^{k^2}}{k!}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k^2}}{k!}.$$

Прилагаме теоремата на д'Аламбер:

$$D = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{(k+1)^2} k!}{(k+1)! 2^{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{2k+1}}{k+1} = \infty > 1.$$

т.е. редът (*) е разходящ. Ето защо, разглежданият ред не е абсолютно сходящ. $\square$

Пример 4.17. Да се изследва за сходимост реда

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\ln k}{k}.$$

Решение. От неравенството

$$\frac{\ln k}{k} > \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

следва, че редът

$$(**) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^{k-1} \frac{\ln k}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$$

се минорира от разходящият ред $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, т.е. редът (**) е разходящ. Следователно (*) не е абсолютно сходящ.

За да изследваме реда (*) за условна сходимост ще приложим теоремата на Лайбниц.

Необходимо е да докажем, че редицата $a_k = \frac{\ln k}{k}$ е монотонно намаляваща и клони към нула. За целта, въвеждаме функцията

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0.$$

Очевидно $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$ за всяко $x > e$. Ето защо $f(x)$ е монотонно намаляваща функция при $x \in (e, \infty)$, т.е. редицата $a_3, a_4, \dots$ е монотонно намаляваща.

Освен това

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0,$$

т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

От теоремата на Лопитал следва, че редът (*) е условно сходящ. $\square$

Задача 4.6. Да се изследват за сходимост редовете:

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{3^k}{2^k}$;

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+2^k}$;

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k\ln k}}$;

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k(k+4)}$;

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+5)^2}{(k+3)^4}$;

(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\sqrt{k}}{k+3}$;

(7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k!}$;

(8) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 3k}{k^8}$;

(9) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{5k+2}$;

(10) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k-\ln k}$.