Тема: Диференциални уравнения с разделени променливи. Хомогенни ОДУ от първи ред. Уравнения, приводими към хомогенни

🕮 Теоретичен минимум

(1.1) $\dfrac{dx}{dt} = X(x).T(t)$.

Функцията

(1.2) $\Phi(t,x) = \int \dfrac{dx}{X(x)} - \int T(t)\,dt$.

представлява **пръв интеграл** на уравнението (1.1), а **общото решение** на това уравнение се дава с равенството

(1.3) $\Phi(t,x) = C$.

Винаги следва да се проверява дали не се пропуска решение на ОДУ при $X(t) = 0$!

2.) Хомогенни ОДУ от първи ред

(2.1) $\dfrac{dx}{dt} = F\left(\dfrac{x}{t}\right)$.

С полагане: $u(t) = \dfrac{x(t)}{t}$ се получава УРП $\dfrac{du}{F[u]-u} = \dfrac{1}{t}dt$, което се интегрира

(2.2) $\int \dfrac{du}{F[u]-u} = \ln|C.t|$.

Следва да се провери за изгубени решения на ДУ, явяващи се решения на алгебричното уравнение $F[u]-u=0$.

3.) Уравнения, приводими към хомогенно

(3.1) $\dfrac{dx}{dt} = f\left(\dfrac{ax+bt+c}{a_1x+b_1t+c_1}\right)$.

Ако $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$ се полага $\left| \begin{matrix} x = \xi + \alpha \\ t = \eta + \beta \end{matrix} \right.$, в резултат от което се получава ДУ $\dfrac{d\xi}{d\eta} = f\left(\dfrac{a\xi + b\eta + (a.\alpha + b.\beta + c)}{a_1\xi + b_1\eta + (a_1.\alpha + b_1.\beta + c_1)}\right)$. Константите α и β в него се избират така, че свободните членове в числителя и знаменателя да се анулират, т.е. α и β се определят като решения на системата $\left| \begin{matrix} a.\alpha + b.\beta + c = 0 \\ a_1.\alpha + b_1.\beta + c_1 = 0 \end{matrix} \right.$. При такъв избор на константите α и β уравнението се превръща в уравнение $\dfrac{d\xi}{d\eta} = f\left(\dfrac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta}\right)$, което след почленно деление с η се трансформира в хомогенно ОДУ

(3.2) $\dfrac{d\xi}{d\eta} = f\left(\dfrac{a\left(\dfrac{\xi}{\eta}\right) + b}{a_1\left(\dfrac{\xi}{\eta}\right) + b_1}\right)$.

Друг вариант на полагане за такива ДУ се основава на факта, че щом детерминантата $\Delta = 0$, то с точност до константа $ax + bt$ и $a_1x + b_1t$ съвпадат, т.е. $ax + bt = \lambda\,(a_1x + b_1t)$, поради което е логично да положим напр.

(3.3) $a_1x + b_1t = u(t)$, и следователно (3.4) $ax + bt = \lambda.u(t)$.

✸ **Задача:** да се реши уравнението $x'^3 + 2x'^2 - x' - 2 = 0$.

Решение: нека положим (*най-вече за удобство*) $x' = u$. Така достигаме до следното кубично алгебрично уравнение

(1) $u^3 + 2u^2 - u - 2 = 0$

За да го решим, нека разложим полинома в лявата страна на (1) на прости множители. Чрез схема на Хорнер установяваме, че

(2) $u^3 + 2u^2 - u - 2 \;:\; u - 1 \;=\; u^2 + 3u + 2$.

Така уравнението (1) добива вида

(3) $(u-1)(u^2 + 3u + 2) = 0$

Квадратният тричлен $u^2 + 3u + 2$ на свой ред се разлага на прости множители

(4) $u^2 + 3u + 2 = (u+1)(u+2)$,

с което (3) добива вида

(5) $(u-1)(u+1)(u+2) = 0$.

От решаването на (5) получаваме следните 3 ОДУ

(6[а]) $x' = 1 \quad \Rightarrow \quad x = t + C$;

(6[б]) $x' = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -t + C$;

(6[в]) $x' = -2 \quad \Rightarrow \quad x = -2t + C$.

✸ **Задача** (Стр. 7/ Зад. 33) Интегрирайте диференциалното уравнение

(1) $t.x' - t - x - t.tg^2\left(\dfrac{x}{t}\right) = 0$.

Решение: нека разделим двете страни на горното уравнение с t (при $t \neq 0$), след което го представим в нормален вид (*т.е. решено относно производната*)

(2) $x' = 1 + \dfrac{x}{t} + tg^2\left(\dfrac{x}{t}\right)$.

Представено в този вид, то е очевидно хомогенно ОДУ, за което правим полагането

(3) $u(t) = \dfrac{x(t)}{t}$, т.е. $x = u.t$, тогава

(4) $x' = u'.t + u$.

Заместваме (3) и (4) в (2)

(5) $u'.t + u = 1 + u + tg^2 u$, или още

(6) $u'.t = 1 + tg^2 u = 1 + \dfrac{\sin^2 u}{\cos^2 u} = \dfrac{\cos^2 u + \sin^2 u}{\cos^2 u} = \dfrac{1}{\cos^2 u}$.

Така достигаме до следното УРП

(7) $\cos^2 u\, du = \dfrac{dt}{t} \qquad \Big| \int$

(8) $\int \cos^2 u\, du = \int \dfrac{dt}{t} + \ln C$;

$\int \dfrac{1+\cos 2u}{2}\, du = \ln t + \ln C$;

$\dfrac{1}{2}\int du + \dfrac{1}{2}\int \cos 2u\, du = \ln(Ct)$;

$\dfrac{u}{2} + \dfrac{1}{4}\int \cos 2u\, d(2u) = \ln(Ct)$;

$\dfrac{u}{2} + \dfrac{1}{4}\sin 2u = \ln(Ct) \qquad \leftarrow\ u = \dfrac{x}{t}$;

$\dfrac{1}{2}\dfrac{x}{t} + \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{2x}{t} = \ln(C.t)$.

✸ **Задача** (Стр. 8/ Зад. 69) Интегрирайте диференциалното уравнение

(1) $(4x-2t-1)\, x' + t - 2x - 4 = 0$.

Решение: нека представим уравнението в нормален вид (*решено относно* x')

(2) $x' = \dfrac{2x-t+4}{4x-2t-1}$ при $4x-2t-1 \neq 0$.

Понеже детерминантата

(3) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$,

то даденото уравнение е приводимо към хомогенно чрез полагане (напр.)

(4) $2x - t = u(t)$,

при което $x = \dfrac{1}{2}(u+t)$, и

(5) $x' = \dfrac{1}{2}(u'+1)$.

След заместване на (4) и (5) в (2) получаваме

(6) $\dfrac{1}{2}(u'+1) = \dfrac{u+4}{2u-1}$, т.е.

$u' = \dfrac{2u+8}{2u-1} - 1 = \dfrac{(2u+8)-(2u-1)}{2u-1} = \dfrac{9}{2u-1}$;

$\dfrac{2u-1}{9}\, du = dt$ т.е. УРП

$\int \dfrac{2u-1}{9}\, du = \int dt + C$;

$\dfrac{2}{9}\dfrac{u^2}{2} - \dfrac{1}{9}u = t + C'$;

$\dfrac{1}{9}(u^2 - u) = t + C'$;

(7) $u(u-1)=9t+C$.

Ако заместим $u=2x-t$ от (4) в (7)1 получаваме решението

(8) $(2x-t)(2x-t-1)=9t+C$.

✸ **Задача** Интегрирайте диференциалното уравнение

(1) $x x'' + x'^2 + 1 = 0$.

Решение: лявата страна на горното уравнение може да се представи като производна по t от функцията ($x x' + t$). Действително

(2) $\dfrac{d}{dt}[x x' + t] = x' x' + x x'' + 1 \equiv x'^2 + x x'' + 1$.

С отчитането на този факт уравнение (1) добива вида

(3) $d(x x' + t) = 0$,

решението на което е

(4) $x x' + t = C_1$.

Представяме (4) в нормален вид

(5) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{C_1 - t}{x}$, или още (6) $x\,dx = (C_1 - t)\,dt$.

Интегрираме това УРП и получаваме общото решение на (1)

(7) $\int x\,dx = \int (C_1 - t)\,dt + C_2$, т.е.

(8) $\dfrac{x^2}{2} = C_1 t - \dfrac{t^2}{2} + C_2$.

Тема: Линейни ОДУ от първи ред. Уравнение на Бернули

Теоретичен минимум

4. Линейно ОДУ от първи ред

(4.1) $\dfrac{dx}{dt} = A(t).x + B(t)$

Общо решение:

(4.2) $x(t,C) = e^{\int A(t)\,dt}\left\{\int B(t).e^{-\int A(t)\,dt}dt + C\right\}$.

5. Уравнение на Бернули

(5.1) $\dfrac{dx}{dt} = A(t).x + B(t).x^n$, за $n \neq 0,1$.

С полагане $y = x^{1-n}$ то се свежда до линейно ДУ

(5.2) $\dfrac{dy}{dt} = A^*(t).y + B^*(t)$

с коефициенти $A^*(t) = A(t)(1-n)$ и $B^*(t) = B(t)(1-n)$. Неговото общо решение се дава с

(5.3) $y(t,C) = e^{\int A^*(t)\,dt}\left\{\int B^*(t).e^{-\int A^*(t)\,dt}dt + C\right\}$, а общото решение $x(t)$ на уравнението на Бернули се изразява от полагането:

(5.4) $x(t,C) = y(t,C)^{\left(\frac{1}{1-n}\right)}$.

✸ **Задача** (Стр. 9 / Зад. 81) Да се интегрира уравнението

(1) $tx' - x = t^2 e^t \sqrt{1-e^t}$.

Решение: ако представим уравнението в нормален вид

(2) $x' = \underbrace{\left(\frac{1}{t}\right)}_{A(t)} x + (\underbrace{t e^t \sqrt{1-e^t}}_{B(t)})$

се вижда непосредствено, че то е линейно ОДУ, и неговото решение се дава с

(3) $$x(t,C) = e^{\int A(t)dt}\left(\int B(t) e^{-\int A(t)dt} dt + C\right) =$$

$$= e^{\int \frac{dt}{t}}\left(\int t e^t \sqrt{1-e^t}\, e^{-\int \frac{dt}{t}} dt + C\right) = e^{\ln t}\left(\int t e^t \sqrt{1-e^t}\, e^{-\ln t} dt + C\right) =$$

$$= t\left(\int t e^t \sqrt{1-e^t}\, t^{-1} dt + C\right) = t\left(\int e^t \sqrt{1-e^t}\, dt + C\right) =$$

$$= t\left(-\int \sqrt{1-e^t}\, d(-e^t) + C\right) = t\left(-\int (1-e^t)^{\frac{1}{2}} d(1-e^t) + C\right) =$$

$$= t\left(-\frac{2}{3}(1-e^t)^{\frac{3}{2}} + C\right) = -\frac{2t}{3}(1-e^t)^{\frac{3}{2}} + C.t\,.$$

✸ **Задача** (Стр. 11/ Зад. 107) Интегрирайте уравнението: $t^2 x' - tx = x^2$.

Решение: при $t \neq 0$ уравнението е представимо във вида

(1) $x' = \left(\frac{1}{t}\right) x + \left(\frac{1}{t^2}\right) x^2$.

В този си вид даденото уравнение е бернулиево с $n = 2$, затова полагаме

(2) $y = x^{1-n} = \frac{1}{x}$.

С направеното полагане то се свежда до линейното ДУ

(3) $\frac{dy}{dt} = A^*(t).y + B^*(t)$

с коефициенти $A^*(t) = A(t)(1-n) = -\frac{1}{t}$ и $B^*(t) = B(t)(1-n) = -\frac{1}{t^2}$, или

(4) $\frac{dy}{dt} = \left(-\frac{1}{t}\right) y + \left(-\frac{1}{t^2}\right)$.

Общото решение на това линейно ОДУ се дава с

(5) $$y(t,C)=e^{\int\left(-\frac{1}{t}\right)dt}\left(\int\left(-\frac{1}{t^2}\right).e^{-\int\left(-\frac{1}{t}\right)dt}dt+C\right)=$$

$$=e^{-\int\frac{dt}{t}}\left(-\int t^{-2}.e^{\int\frac{dt}{t}}dt+C\right)=e^{-\ln t}\left(-\int t^{-2}.e^{\ln t}dt+C\right)=$$

$$=t^{-1}\left(-\int t^{-2}.t\,dt+C\right)=-t^{-1}\left(\int t^{-1}dt+C\right)=-t^{-1}(\ln t+C)=-\frac{(\ln t-C^*)}{t}.$$

Общото решение $x(t)$ на уравнението на Бернули се изразява от полагането:

(6) $$x(t,C)=y(t,C)^{\left(\frac{1}{1-n}\right)}=\frac{1}{y(t,C)}=-\frac{t}{\ln t-C^*}=\frac{t}{C^*-\ln t}.$$

Както се вижда от полагането (2) направените дотук разглеждания са валидни за $x\neq 0$. С непосредствена проверка в самото уравнение се установява, че $x=0$ е също решение на даденото ОДУ.

✸ **Задача** (Стр. 11/ Зад. 112) Интегрирайте уравнението:

(1) $$x^{/}.\cos t=\sin t.x+x^4.$$

Решение: при $t\neq 0$ уравнението е представимо във вида

(2) $$x^{/}=\underbrace{\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)}_{A(t)}x+\underbrace{\left(\frac{1}{\cos t}\right)}_{B(t)}x^4.$$

Очевидно това е бернулиево ОДУ с $n=4$, затова полагаме

(3) $$y=x^{1-n}=x^{-3}.$$

С направеното полагане (2) се свежда до линейното ДУ

(4) $$\frac{dy}{dt}=A^*(t).y+B^*(t)$$

с коефициенти $A^*(t)=A(t)(1-n)=-3\frac{\sin t}{\cos t}$ и $B^*(t)=B(t)(1-n)=-3\frac{1}{\cos t}$, или

(4) $$\frac{dy}{dt}=\left(-\frac{3\sin t}{\cos t}\right)y+\left(-\frac{3}{\cos t}\right).$$

Общото решение на това линейно ОДУ се дава с

(5) $$y(t,C)=e^{\int\left(-\frac{3\sin t}{\cos t}\right)dt}\left(\int\left(-\frac{3}{\cos t}\right).e^{-\int\left(-\frac{3\sin t}{\cos t}\right)dt}dt+C\right)=$$

$$=e^{\int\frac{3d(\cos t)}{\cos t}}\left(-3\int\frac{1}{\cos t}.e^{-\int\frac{3d(\cos t)}{\cos t}}dt+C\right)=e^{3\ln\cos t}\left(-3\int\frac{e^{-3\ln\cos t}}{\cos t}.dt+C\right)=$$

$$=e^{\ln\cos^3 t}\left(-3\int\frac{e^{-\ln\cos^3 t}}{\cos t}.dt+C\right)=\cos^3 t\left(-3\int\frac{1}{\cos t\cos^3 t}.dt+C\right)=$$

$$=\cos^3 t\left(-3\int\frac{dt}{\cos^4 t}+C\right)=\cos^3 t\left(-3\int\underbrace{\frac{1}{\cos^2 t}}_{tg^2 t+1}\left(\underbrace{\frac{dt}{\cos^2 t}}_{d\,tg\,t}\right)+C\right)=$$

$$=\cos^3 t\left(-3\int(tg^2 t+1)\,d\,(tg\,t)+C\right)=\cos^3 t\left(-3(\frac{1}{3}tg^3 t+tg\,t)+C\right)=$$

$$=\cos^3 t\,(-tg^3 t-3tg\,t+C)=C\cos^3 t-tg^3 t.\cos^3 t-3tg\,t.\cos^3 t=$$

$$=C\cos^3 t-\sin^3 t-3\sin t.\cos^2 t=C\cos^3 t-\sin^3 t-3\sin t.(1-\sin^2 t)=$$

$$=C\cos^3 t-\sin^3 t-3\sin t+3\sin^3 t=C\cos^3 t-3\sin t+2\sin^3 t\,.$$

И така общото решение на (4) се дава с

(6) $\quad y(t,C)=C\cos^3 t-3\sin t+2\sin^3 t\,.$

А общото решение на (1) с отчитане на полагането $y=x^{-3}$, т.е. $x=y^{-1/3}$, се дава с

(7) $\quad x(t,C)=\{C\cos^3 t-3\sin t+2\sin^3 t\}^{-\frac{1}{3}}.$

С непосредствена проверка в самото уравнение се установява, че $x=0$ е също решение на даденото ОДУ.

Тема: ДУ, които се решават след предварително диференциране. Уравнения на Лагранж и Клеро

Теоретичен минимум

6.А. Уравнение на Лагранж:

(6.1) $\quad x=A\left(x'\right).t+B\left(x'\right).$

С полагане $\boxed{p=x'}$ и диференциране на самото уравнение то добива вида $\frac{d\,t}{dp}=\frac{A'(p)}{p-A(p)}.t+\frac{B'(p)}{p-A(p)}$. Разглеждано като ОД уравнение от първи ред относно „функцията” $t=t(p)$ то е линейно уравнение, имащо решение

$$t(p,C)=e^{\int A_0(p)\,dp}\left\{\int B_0(p).e^{-\int A_0(p)\,dp}dp+C\right\}.$$

С така намерената функция $t=t(p,C)$ се замества в изходното уравнение и се получава $x=A(p).t(p,C)+B(p)\equiv x(p,C)$. По този начин представянето

(6.2) $\quad \left|\begin{array}{l} t=t(p,C)\\ x=x(p,C)\end{array}\right.$

задава **параметрично решението на уравнението на Лагранж.** „Изгубени” решения биха могли да се получат, ако $\boxed{p-A(p)=0}$. Последните са **особени решения**.

6.Б. Уравнение на Клеро

(6.3) $\quad x=(x').t+B\left(x'\right).$

Уравнението на Клеро се явява **частен случай на уравнението на Лагранж**, за което $A\left(x^{/}\right)\equiv x^{/}$, т.е. $A(p)-p=0$. С полагане $\boxed{p=x^{/}}$ и диференцирате на самото уравнение то добива вида $\dfrac{dp}{dt}.\left[t+B^{/}(p)\right]=0$, което се „разпада" на следните две уравнения:

(А) $\dfrac{dp}{dt}=0$ и (Б) $t+B^{/}(p)=0$.

Решението на първото от тях е $x(t,C)=C.t+B(C)$, което представлява **общо решение (общ интеграл)** на уравнението на Клеро. От другото уравнение (Б) се получава (*в параметричен вид*) **особеното решение**

(6.4) $$\left|\begin{array}{l} t=-B^{/}(p) \\ x=-p.B^{/}(p)+B(p) \end{array}\right. .$$

✷ **Задача** (Стр. 16/ Зад. 202) Да се интегрира уравнението: $2tx^{/}-x=\ln x^{/}$.

Решение: ако запишем даденото уравнение във вида

(1) $$x=(\underbrace{2x^{/}}_{A(x^{/})})t+(\underbrace{-\ln x^{/}}_{B(x^{/})})$$

се вижда непосредствено, че то е ДУ на Лагранж. За да го решим, полагаме $x^{/}(t)=p(t)$, след което диференцираме (1)

$$x^{/}=2x^{/}+2t\,(x^{/})^{/}+\frac{-1}{x^{/}}(x^{/})^{/},\quad \text{или още}\quad x^{/}=\left(\frac{1}{x^{/}}-2t\right)(x^{/})^{/},$$ което с отчитане на направеното полагане може да бъде записано във вида

(2) $$p=\left(\frac{1}{p}-2t\right)p^{/},$$ или още (3) $$p^2=(1-2pt)\frac{dp}{dt}.$$

Разглеждано като ДУ относно „функция" $t=t(p)$ с аргумент p то може да бъде записано във вида

(4) $$\frac{dt}{dp}=\frac{1-2pt}{p^2}=\left(-\frac{2}{p}\right)t+\frac{1}{p^2},$$

а представено в този си вид уравнение (4) е линейно ОДУ от първи ред, чието общо решение се дава с

$$t\,(p,C)=e^{\int\left(-\frac{2}{p}\right)dp}\left(\int\left(\frac{1}{p^2}\right).e^{-\int\left(-\frac{2}{p}\right)dp}dt+C\right)=$$

$$=e^{-2\int\frac{dp}{p}}\left(\int\frac{1}{p^2}.e^{2\int\frac{dp}{p}}dt+C\right)=e^{-2\ln p}\left(\int\frac{1}{p^2}.e^{2\ln p}dt+C\right)=$$

$$=e^{\ln p^{-2}}\left(\int\frac{1}{p^2}.e^{\ln p^2}dt+C\right)=\frac{1}{p^2}\left(\int\frac{1}{p^2}.p^2dt+C\right)=\frac{1}{p^2}(p+C).$$

И така получихме

(5) $\quad t(p,C)=\dfrac{1}{p^2}(p+C)$.

Ако с така намерената функция $t=t(p)$ заместим в изходното ДУ (1), отчитайки полагането $x'(t)=p(t)$, получаваме

(6) $\quad x(p,C)=2p\dfrac{1}{p^2}(p+C)-\ln p=2+\dfrac{2}{p}C-\ln p$.

Уравненията (5) и (6) изразяват в параметричен вид интегралната крива на ДУ (1).

✸ **Задача** (Стр. 16/ Зад. 206) Да се интегрира уравнението: $xx'-t.x'^{2}=1$.

Решение: нека решим даденото ДУ относно неизвестната функция x. За целта делим двете му страни с $x'\neq 0$.

(1) $\quad x=x't+\dfrac{1}{x'}\equiv A(x')t+B(x')$.

Очевидно това е уравнение на Клеро, затова полагаме $x'(t)=p(t)$ и диференцираме двете страни на (1)

(2) $\quad x'=x'+t.(x')'-\dfrac{1}{x'^{2}}(x')'$,

откъдето следва уравнението

(3) $\quad \underbrace{\left(t-\dfrac{1}{p^2}\right)}_{0}\underbrace{\dfrac{dp}{dt}}_{0}=0$.

Общото решение на ДУ (1) се дава с решението на

(4) $\quad \dfrac{dp}{dt}=0 \quad\Rightarrow\quad p=C$, $\quad$ но $p=\dfrac{dx}{dt}$, $\quad$ следователно

(5) $\quad \dfrac{dx}{dt}=C \quad\Rightarrow\quad x(t,C)=C.t+const\,(C)$.

Интеграционната $const(C)$ може да бъде определена от (1), ако в него заместим (формално) $C\to x'$. Така получаваме представянето $x=C.t+\dfrac{1}{C}$, сравняването на което с (5) води до заключението, че $const\,(C)=\dfrac{1}{C}$. С отчитането на този факт общото решение (5) ще добие вида

(6) $\quad x(t,C)=C.t+\dfrac{1}{C}$ $\quad$ /*уравнение на сноп прави с променлив ъглов коефициент*/

Както следва от (3), особеното решение на (1) се задава със съотношението

(7) $\quad t-\dfrac{1}{p^2}=0$, т.е. $\quad t=\dfrac{1}{p^2}$.

Заместваме така намереното представяне (7) за t в уравнение (1) и получаваме, отчитайки полагането $x'=p$

(8) $\quad x = p.\left(\dfrac{1}{p^2}\right) + \dfrac{1}{p} = \dfrac{2}{p}$.

Така параметричното уравнение на особеното решение се дава с

(9) $\quad \left| \begin{array}{l} t = \dfrac{1}{p^2} \\ x = \dfrac{2}{p} \end{array} \right.$.

Елиминирането на параметъра не винаги е възможно, но в дадения случай се извършва елементарно: изразяваме $p = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ и заместваме в $x = \dfrac{2}{p}$:

(10) $\quad x = \dfrac{2}{p} = 2\sqrt{t}$ - особеното решение на даденото ДУ.

✸ **Задача** (Стр. 16/ Зад. 209) Да се интегрира уравнението

(1) $\quad 2x - x'^{\,2} = t^2 + t.x'$.

Решение: даденото уравнение не спада към нито един от двата класически вида (*уравнение на Лагранж и уравнение на Клеро*), но въпреки това може да бъде интегрирано чрез техниката на предварително диференциране. За целта най-напред полагаме

(2) $\quad x'(t) = p(t)$,

с което даденото уравнение, решено относно неизвестната функция x добива вида

(1') $\quad x = \dfrac{1}{2}[p^2 + t.(t+p)]$,

след което го диференцираме по t:

$2x' - 2x'(x')' = 2t + x' + t.(x')'$, или още

$p - 2p.p' = 2t + t.p'$,

$p - 2t = (2p+t)\dfrac{dp}{dt}$, откъдето при $p - 2t \neq 0$

(3) $\quad \dfrac{dt}{dp} = \dfrac{2p+t}{p-2t} \equiv \dfrac{2 + \dfrac{t}{p}}{1 - 2\dfrac{t}{p}}$.

Полагаме

(4) $\quad u(t) = \dfrac{t}{p(t)}$, т.е. $t = p.u$ и

(5) $\quad \dfrac{dt}{dp} = \dfrac{d}{dp}(p.u) = u + p\dfrac{du}{dp}$

След отчитането на (4) и (5) в (3) достигаме до следното ДУ

(6) $\quad u + p\dfrac{du}{dp} = \dfrac{2+u}{1-2u}$, откъдето следва

$$p\frac{du}{dp}=\frac{2+u}{1-2u}-u\equiv\frac{2+u}{1-2u}-u\frac{1-2u}{1-2u}=\frac{(2+u)-u(1-2u)}{1-2u}=\frac{2+u-u+2u^2}{1-2u}=\frac{2(1+u^2)}{1-2u},$$

(7) $\quad \frac{1}{2}\left(\frac{1-2u}{1+u^2}\right)du=\frac{dp}{p}.$

Интегрираме това ДУ с РП

$$\frac{1}{2}\int\frac{du}{1+u^2}-\int\frac{u.du}{1+u^2}=\ln p+\ln C\,;$$

$$\frac{1}{2}arctg\ u-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+u^2)}{1+u^2}=\ln(C.p)\,;$$

$$\frac{1}{2}arctg\ u-\frac{1}{2}\ln\,(1+u^2)=\ln(C.p) \qquad \Big|\times 2$$

$$arctg\ u=\ln\,(1+u^2)+2\ln(C.p)\,;$$

$$arctg\ u=\ln\,[(1+u^2)(C.p)^2]$$

Ако отчетем полагането $u=\frac{t}{p}$, получаваме

$$arctg\ \frac{t}{p}=\ln\left[\left(1+\frac{t^2}{p^2}\right)C^2p^2\right],\text{или още}$$

(8) $\quad arctg\ \frac{t}{p}=\ln\left[C^2(t^2+p^2)\right].$

Обобщение на решението:

а) уравнение $(1^{/})$ дава $x=x(t,p)$

б) уравнение (8) дава $t=t(p,C)$,

с което е намерено параметрично представяне на общото решение.

„Изпуснати” решения биха могли да дойдат от делението с $p-2t$. Ако $p-2t=0$, то $x^{/}=2t$, т.е. $dx=2t\,dt$, следователно $x=t^2+const$ е уравнението на изгубеното решение. Би могло да се провери дали $x=t^2+const$ не следва от общото решение, но това би било трудоемка задача предвид на това, че (8) е трансцедентно уравнение.

Тема: Уравнения на пълен диференциал. Интегриращ множител

Теоретичен минимум

7. Уравнения на пълен диференциал

Общ вид:

(7.1) $\quad P(t,x)\,dt+Q(t,x)\,dx=0\,.$

Ако е изпълнено условието

(7.2) $\quad \frac{\partial P(t,x)}{\partial x}=\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t},$

уравнението е **уравнение на пълен диференциал**, т.е. лявата му страна е $d\Phi(t,x)$ и един негов **пръв интеграл** ще бъде

(7.3) $\Phi(t,x)=\int\limits_{t_0}^{t}P(t,x)\,dt+\int\limits_{x_0}^{x}Q(t,x)\,dx$,

а **общото** му **решение** се представя с $\Phi(t,x)=C$.

Интегриращ множител

Ако горното условието не е изпълнено, то уравнение не е уравнение на пълен диференциал. За него се търси такава функция $\mu=\mu(t,x)$, наречена **интегриращ множител,** която умножавайки двете страни на уравнението го превръща в уравнение на пълен диференциал, за което

(7.4) $\dfrac{\partial}{\partial x}[\mu(t,x).P(t,x)]=\dfrac{\partial}{\partial t}[\mu(t,x).Q(t,x)]$,

Намирането на функцията $\mu=\mu(t,x)$ от горното уравнение в **общия случай** е твърде **трудна задача**. Затова е по-удобно да се започне с някои частни случаи.

А) Първи случай: $\mu=\mu(t)$.

Интегриращият множител в този случай е

(7.5) $\mu(t)=e^{\int f(t)dt}$, където $f(t)=\dfrac{1}{Q(t,x)}\left[\dfrac{\partial P(t,x)}{\partial x}-\dfrac{\partial Q(t,x)}{\partial t}\right]$.

Б) Втори случай: $\mu=\mu(x)$.

Интегриращият множител в този случай е

(7.6) $\mu(x)=e^{\int g(x)dx}$, където $g(x)=\dfrac{1}{P(t,x)}\left[\dfrac{\partial Q(t,x)}{\partial t}-\dfrac{\partial P(t,x)}{\partial x}\right]$.

✸ **Задача** (Стр. 13/ Зад. 149) Да се интегрира уравнението:

(1) $t.x^{/}\cos^{-2}x+tg\,x-3t^2=0$

Решение:

$\left(\dfrac{t}{\cos^2 x}\right)\dfrac{dx}{dt}+(tg\,x-3t^2)=0 \qquad \Big|\times dt$

(2) $\underbrace{(tg\,x-3t^2)}_{P(t,x)}\,dt+\underbrace{\left(\dfrac{t}{\cos^2 x}\right)}_{Q(t,x)}dx=0$.

Нека проверим дали това е уравнение на пълен диференциал, т.е. дали

(3) $\dfrac{\partial P(t,x)}{\partial x}=\dfrac{\partial Q(t,x)}{\partial t}$.

☞ $\dfrac{\partial P(t,x)}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}(tg\,x-3t^2)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$;

☞ $\dfrac{\partial Q(t,x)}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{t}{\cos^2 x}\right)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Очевидно условието (3) е изпълнено и това е ДУ на пълен диференциал, чийто пръв интеграл се явява

(4) $\Phi(t,x)=\int\limits_0^t P(t,x)\,dt+\int\limits_0^x Q(t,x)\,dx=\int\limits_0^t (tg\,x-3t^2)\,dt+\int\limits_0^x\left(\frac{t}{\cos^2 x}\right)dx=$

$=tg\,x\int\limits_0^t dt-3\int\limits_0^t t^2\,dt+t\int\limits_0^x \frac{dx}{\cos^2 x}=t\,.\,tg\,x-t^3+t\int\limits_0^x d(tg\,x)=2t\,.\,tg\,x-t^3.$

Общото решение на това ДУ се представя с $\Phi(t,x)=C$, т.е.

(5) $2t\,.\,tg\,x-t^3=C$.

✸ **Задача** (Стр. 14/ Зад. 161) Да се интегрира уравнението:

(1) $e^x(1+x^/)+e^{-t}(\ln x+\frac{t}{x}.x^/)=0$.

Решение: нека представим уравнението във вида $P(t,x)\,dt+Q(t,x)\,dx=0$:

$$e^x+e^x.x^/+\frac{\ln x}{e^t}+\frac{t}{x.e^t}.x^/=0,$$

$$\left(e^x+\frac{t}{x.e^t}\right).\frac{dx}{dt}+\left(e^x+\frac{\ln x}{e^t}\right)=0 \qquad \Big|\times dt.x.e^t$$

$$(x.e^xe^t+t).dx+(x.e^xe^t+x.\ln x)\,dt=0,$$

(2) $\underbrace{(x.e^xe^t+x.\ln x)}_{P(t,x)}dt+\underbrace{(x.e^xe^t+t)}_{Q(t,x)}.dx=0$.

Нека най-напред проверим дали (2) не е уравнение на пълен диференциал, т.е. дали

(3) $\dfrac{\partial P(t,x)}{\partial x}=\dfrac{\partial Q(t,x)}{\partial t}$.

☞ $\dfrac{\partial P(t,x)}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}(x.e^xe^t+x.\ln x)=e^xe^t+x.e^xe^t+\ln x+\underbrace{x.x^{-1}}_{1}$.

☞ $\dfrac{\partial Q(t,x)}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial t}(x.e^xe^t+t)=x.e^xe^t+1$.

Очевидно $\dfrac{\partial P(t,x)}{\partial x}\neq\dfrac{\partial Q(t,x)}{\partial t}$, следователно (2) не е уравнение на пълен диференциал, т.е. налага се да търсим интегриращ множител $\mu=\mu(x,t)$. А такъв се търси най-често за следните два частни случая:

А) $\mu=\mu(t)$. За целта трябва да бъде изпълнено

(4) $\dfrac{1}{Q(t,x)}\left[\dfrac{\partial P(t,x)}{\partial x}-\dfrac{\partial Q(t,x)}{\partial t}\right]\equiv f(t)$.

Нека проверим дали това обстоятелство е налице:

☞ $\dfrac{1}{(x.e^xe^t+t)}\left[(e^xe^t+x.e^xe^t+\ln x+1)-(x.e^xe^t+1)\right]=\dfrac{e^xe^t+\ln x}{(x.e^xe^t+t)}\neq\underbrace{f(t)}_{само}$.

Б) $\mu=\mu(x)$. За целта трябва да бъде изпълнено

(5) $\dfrac{1}{P(t,x)}\left[\dfrac{\partial Q(t,x)}{\partial t}-\dfrac{\partial P(t,x)}{\partial x}\right]\equiv g(x)$.

Нека проверим дали това обстоятелство е налице:

☞ $\dfrac{1}{(x.e^x e^t + x.\ln x)}\Big[(x.e^x e^t + 1) - (e^x e^t + x.e^x e^t + \ln x + 1)\Big] = \dfrac{-(e^x e^t + \ln x)}{x.(e^x e^t + \ln x)} = -\dfrac{1}{x} = g(x)$.

Щом това е така, то функцията

(6) $\quad \mu(x) = e^{\int g(x)dx} = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = \dfrac{1}{x}$

се явява интегриращ множител на (2). Умножаваме с $\mu(x) = \dfrac{1}{x}$ изходното уравнение (2):

$$\frac{1}{x}(x.e^x e^t + x.\ln x)\,dt + \frac{1}{x}(x.e^x e^t + t).dx = 0,$$

(7) $\quad \underbrace{(e^x e^t + \ln x)}_{\text{"нова" } P(x,t)}dt + \underbrace{(e^x e^t + \frac{t}{x})}_{\text{"нова" } Q(x,t)}.dx = 0$.

Лесно се проверява, че това е уравнение на пълен диференциал, защото

☞ $\dfrac{\partial P(t,x)}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(e^x e^t + \ln x) = e^x e^t + \dfrac{1}{x}$;

☞ $\dfrac{\partial Q(t,x)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}(e^x e^t + \dfrac{t}{x}) = e^x e^t + \dfrac{1}{x}$, т.е. $\dfrac{\partial P(t,x)}{\partial x} = \dfrac{\partial Q(t,x)}{\partial t}$.

Пръв интеграл на уравнение (7), респективно (2), ще бъде

$$\Phi(t,x) = \int_0^t P(t,x)\,dt + \int_0^x Q(t,x)\,dx = \int_0^t (e^x e^t + \ln x)\,dt + \int_0^x (e^x e^t + \frac{t}{x})\,dx =$$

$$= \int_0^t e^x e^t\,dt + \int_0^t \ln x\,dt + \int_0^x e^x e^t\,dx + \int_0^x \frac{t}{x}dx = e^x \int_0^t e^t\,dt + \ln x \int_0^t dt + e^t \int_0^x e^x\,dx + t\int_0^x \frac{dx}{x} =$$

$= e^x e^t + t.\ln x + e^t e^x + t.\ln x = 2(e^x e^t + t.\ln x)$, т.е.

(8) $\quad \Phi(t,x) = 2(e^x e^t + t.\ln x)$.

Общото решение на това ДУ се представя с равенството $\Phi(t,x) = C$, т.е.

(9) $\quad e^{x+t} + t.\ln x = const$.

✸ **Задача:** Да се интегрира уравнението:

(1) $\quad (x+t)x'' + x'^2 - x' = 0$.

Решение: лявата страна на това ОДУ от втори ред може да се представи като пълен диференциал от някаква функция, ако се използва факта, че както директно може да се провери

(2) $\quad \dfrac{d}{dt}[(x+t).x' - 2x] = \dfrac{d(x+t)}{dt}x' + (x+t).\dfrac{dx'}{dt} - 2\dfrac{dx}{dt} =$

$$= \left(\frac{dx}{dt} + 1\right)x' + (x+t).x'' - 2x' = x'^2 + x' + (x+t).x'' - 2x' = (x+t).x'' + x'^2 - x'.$$

Следователно уравнение (1) може да бъде записано във вида

(3) $\quad \dfrac{d}{dt}[(x+t).x' - 2x] = 0$, или още (4) $\quad d[(x+t).x' - 2x] = 0$,

откъдето следва

(5) $\quad (x+t).x' - 2x = C_1,$

с което сведохме изходното ДУ до уравнение от първи ред.

Уравнение (5) ще решим като го сведем до уравнение на пълен диференциал, определяйки негов интегриращ множител. Нека за целта най-напред го представим в стандартния за този тип уравнения вид:

$$(x+t)\frac{dx}{dt} + (-2x - C_1) = 0 \qquad \Big| .(-dt)$$

(6) $$\underbrace{(2x + C_1)}_{P(t,x)} dt + [\underbrace{-(x+t)}_{Q(t,x)}]\, dx = 0.$$

Нека проверим дали евентуално (6) не е уравнение на пълен диференциал:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2, \qquad \frac{\partial Q}{\partial t} = -1, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial P}{\partial x} \neq \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Тогава нека потърсим интегриращ множител на (6) напр. от вида $\mu = \mu(x)$. За целта трябва да бъде изпълнено

(7) $$\frac{1}{P(t,x)}\left[\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial P(t,x)}{\partial x}\right] \equiv g(x).$$

Нека проверим дали това обстоятелство е налице:

☞ $$\frac{1}{(2x+C_1)}\left[-1-2\right] = \frac{-3}{2x+C_1} = g(x).$$

Щом това е така, то функцията

(8) $$\mu(x) = e^{\int g(x)dx} = e^{-3\int \frac{dx}{2x+C_1}} = e^{-\frac{3}{2}\int \frac{d(2x+C_1)}{2x+C_1}} = e^{-\frac{3}{2}\ln(2x+C_1)} =$$

$$= e^{\ln(2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}} = (2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}.$$

И така интегриращият множител на уравнение (6) е функцията

(9) $$\mu(x) = (2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}.$$

Умножаваме с $\mu(x)$ изходното уравнение (6):

$$(2x+C_1)(2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}\, dt + [-(x+t)](2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}\, dx = 0,$$

$$(2x+C_1)^{-\frac{1}{2}}\, dt - (x+t)\,(2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}\, dx = 0,$$

(10) $$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2x+C_1}}}_{P(t,x)} dt + \underbrace{\frac{-(x+t)}{\sqrt[3]{2x+C_1}}}_{Q(t,x)} dx = 0.$$

Щом уравнение (10) е уравнение на пълен диференциал (*може да бъде проверено елементарно*), то негов пръв интеграл ще бъде функцията

(11) $$\Phi(t,x) = \int_0^t P(t,x)\,dt + \int_0^x Q(t,x)\,dx = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{2x+C_1}} + \int_0^x \frac{-(x+t)}{\sqrt[3]{2x+C_1}}\,dx =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2x+C_1}}\int_0^t dt-\int_0^x (x+t)(2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{t}{\sqrt{2x+C_1}}-\underbrace{\int_0^x x(2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}dx}_{I_1}-t\underbrace{\int_0^x (2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}dx}_{I_2}$$

Нека решим поотделно горните два интеграла:

☞ $I_2=\int_0^x (2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^x (2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}d(2x+C_1)=\frac{1}{2}\frac{1}{(-1/2)}(2x+C_1)^{-\frac{1}{2}}=$

$=-(2x+C_1)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2x+C_1}}$, т.е.

$\boxed{I_2=-\frac{1}{\sqrt{2x+C_1}}}$.

Първия интеграл I_1 ще решим по части, като за подготвянето му използваме, че $(2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}d(2x+C_1)=-d(2x+C_1)^{-\frac{1}{2}}$:

☞ $I_1=\int_0^x x(2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^x x(2x+C_1)^{-\frac{3}{2}}d(2x+C_1)=-\frac{1}{2}\int_0^x x\,d(2x+C_1)^{-\frac{1}{2}}=$

$$=-\frac{1}{2}x(2x+C_1)^{-\frac{1}{2}}\Bigg|_0^x+\frac{1}{2}\int_0^x (2x+C_1)^{-\frac{1}{2}}dx=-\frac{1}{2}x(2x+C_1)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\int_0^x (2x+C_1)^{-\frac{1}{2}}d(2x+C_1)=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{2x+C_1}}+\frac{1}{4}\frac{1}{(1/2)}(2x+C_1)^{+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{2x+C_1}}+\frac{1}{2}\sqrt{2x+C_1}\text{, т.е.}$$

$\boxed{I_1=-\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{2x+C_1}}+\frac{1}{2}\sqrt{2x+C_1}}$.

Заместваме така намерените стойности на двата интеграла I_1 и I_2 в (11) и получаваме

(12) $\Phi(t,x)=\frac{t}{\sqrt{2x+C_1}}-I_1-t.I_2=$

$$=\frac{t}{\sqrt{2x+C_1}}-\left(-\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{2x+C_1}}+\frac{1}{2}\sqrt{2x+C_1}\right)-t.\left(-\frac{1}{\sqrt{2x+C_1}}\right)=$$

$$=\frac{t}{\sqrt{2x+C_1}}+\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{2x+C_1}}-\frac{1}{2}\sqrt{2x+C_1}+\frac{t}{\sqrt{2x+C_1}}=$$

$$=\frac{2t}{\sqrt{2x+C_1}}+\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{2x+C_1}}-\frac{1}{2}\sqrt{2x+C_1}.$$

След намирането на първия интеграл $\Phi(t,x)$ общото решение на това ДУ се представя с равенството $\Phi(t,x)=C_2$, т.е.

(13) $\frac{2t}{\sqrt{2x+C_1}}+\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{2x+C_1}}-\frac{1}{2}\sqrt{2x+C_1}=C_2$,

където C_1 и C_2 са двете интеграционни константи на това ОДУ от втори ред.

✸ **Задача**: Да се интегрира уравнението

$$(1)\qquad \underbrace{e^t(2tx+t^2x+\frac{x^3}{3})}_{P(t,x)}\,dt+\underbrace{e^t(t^2+x^2)}_{Q(t,x)}dx=0\,.$$

Решение: проверяваме дали не е уравнение на пълен диференциал

$$(2)\qquad \frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[e^t(2tx+t^2x+\frac{x^3}{3})\right]=e^t(2t+t^2+x^2)\,;$$

$$(3)\qquad \frac{\partial Q}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left[e^t(t^2+x^2)\right]=e^t\,2t+e^t(t^2+x^2)=e^t(2t+t^2+x^2)\,.$$

Очевидно това е уравнение на пълен диференциал, и неговият пръв интеграл е

$$(4)\qquad \Phi(t,x)=\int_{t_0}^{t}P(t,x)\,dt+\int_{x_0}^{x}Q(t,x)\,dx=\int_{t_0}^{t}e^\tau(2\tau x+\tau^2x+\frac{x^3}{3})\,d\tau+\int_{x_0}^{x}e^t(t^2+\xi^2)\,d\xi=$$

$$=2x\underbrace{\int_{t_0}^{t}e^\tau\tau\,d\tau}_{I_1}+x\underbrace{\int_{t_0}^{t}e^\tau\tau^2\,d\tau}_{I_2}+\frac{x^3}{3}\int_{t_0}^{t}e^\tau\,d\tau+e^tt^2\int_{x_0}^{x}d\xi+e^t\int_{x_0}^{x}\xi^2\,d\xi=$$

$$=2x.I_1+x.I_2+\frac{x^3}{3}(e^t-e^{t_0})+e^tt^2(x-x_0)+e^t\,\frac{1}{3}(x^3-x_0{}^3)\,.$$

Нека решим отделно двата интеграла I_1 и I_2 (по части):

$$I_1=\int_{t_0}^{t}e^\tau\tau\,d\tau=\int_{t_0}^{t}\tau\,d(e^\tau)=\tau\,e^\tau\Big|_{t_0}^{t}-\int_{t_0}^{t}e^\tau\,d\tau=t\,e^t-t_0\,e^{t_0}-(e^t-e^{t_0})\,.$$

$$I_2=\int_{t_0}^{t}e^\tau\tau^2\,d\tau=\int_{t_0}^{t}\tau^2\,d(e^\tau)=\tau^2\,e^\tau\Big|_{t_0}^{t}-\int_{t_0}^{t}e^\tau\,d(\tau^2)=t^2\,e^t-t_0{}^2\,e^{t_0}-2\underbrace{\int_{t_0}^{t}e^\tau\tau\,d\tau}_{I_1}=$$

$$=t^2\,e^t-t_0{}^2\,e^{t_0}-2.I_1\,.$$

Заместваме така намерените интеграли в (4)

$$\Phi(t,x)=\frac{x^3}{3}(e^t-e^{t_0})+e^tt^2(x-x_0)+e^t\,\frac{1}{3}(x^3-x_0{}^3)+2x.I_1+x.I_2=$$

$$=\frac{x^3}{3}(e^t-e^{t_0})+e^tt^2(x-x_0)+e^t\,\frac{1}{3}(x^3-x_0{}^3)+2x.I_1+x.(t^2\,e^t-t_0{}^2\,e^{t_0}-2I_1)=$$

$$=\frac{x^3}{3}(e^t-e^{t_0})+e^tt^2(x-x_0)+e^t\,\frac{1}{3}(x^3-x_0{}^3)+x.(t^2\,e^t-t_0{}^2\,e^{t_0})=$$

$$=\frac{2}{3}x^3e^t+2x.t^2\,e^t-\frac{1}{3}(x^3e^{t_0}+e^tx_0{}^3)-x_0t^2e^t-x.t_0{}^2\,e^{t_0}\,.$$

Общото решение на (1) е

$$(5)\qquad \Phi(t,x)\equiv\frac{2}{3}x^3e^t+2x.t^2\,e^t-\frac{1}{3}(x^3e^{t_0}+e^tx_0{}^3)-x_0t^2e^t-x.t_0{}^2\,e^{t_0}=const\,.$$

✸ **Задача**: Да се интегрира уравнението

(1) $\quad t.x^{/}+(\sin x-3t^2\cos x)\cos x=0$.

Решение: уравнението съдържа неизвестната функция в трансцедентните функции $\sin x$ и $\cos x$, затова е немислимо да търсим някакъв познат тип ДУ. Ето защо нека представим уравнението във вид, удобен за работа при уравнения с пълен диференциал.

$$\frac{dx}{dt}+\frac{(\sin x-3t^2\cos x)\cos x}{t}=0, \qquad \text{т.е.}$$

(2) $$\underbrace{(\sin x-3t^2\cos x)\cos x}_{P(t,x)}\,dt+\underbrace{t}_{Q(t,x)}.\ dx=0.$$

Проверяваме дали не е уравнение на пълен диференциал

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[(\sin x-3t^2\cos x)\cos x\right]=(\cos x+3t^2\sin x)\cos x-(\sin x-3t^2\cos x)\sin x=$$

$$=\cos^2 x+3t^2\sin x\cos x-\sin^2 x+3t^2\cos x\sin x=\cos^2 x-\sin^2 x+6t^2\sin x\cos x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=1.$$

Очевидно (1) не е уравнение на пълен диференциал, затова ще търсим интегриращ множител. Нека проверим най-напред с критерия за интегриращ множител от вида $\mu=\mu(x)$

(3) $$\frac{1}{P(t,x)}\left[\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial P(t,x)}{\partial x}\right]=\frac{1-(\cos^2 x-\sin^2 x+6t^2\sin x\cos x)}{(\sin x-3t^2\cos x)\cos x}=$$

$$=\frac{(\cos^2 x+\sin^2 x)-(\cos^2 x-\sin^2 x+6t^2\sin x\cos x)}{(\sin x-3t^2\cos x)\cos x}=$$

$$=\frac{2\sin^2 x-6t^2\sin x\cos x}{(\sin x-3t^2\cos x)\cos x}=\frac{2\sin x(\sin x-6t^2\cos x)}{(\sin x-3t^2\cos x)\cos x}=2\frac{\sin x}{\cos x}=2\,tg\,x\equiv g(x)$$

Очевидно интегриращият множител в този случай е

(4) $\quad \mu(x)=e^{\int g(x)dx}$, където $g(x)=2\,tg\,x$, т.е.

$$\mu(x)=e^{2\int tg\,xdx}=e^{2\int\frac{\sin x}{\cos x}dx}=e^{-2\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}}=e^{-2.\ln\cos x}=e^{\ln\cos^{-2}x}=\cos^{-2}x\equiv\frac{1}{\cos^2 x}.$$

При такъв интегриращ множител уравнение (2) добива вида

(5) $$\frac{(\sin x-3t^2\cos x)\cos x}{\cos^2 x}\,dt+\frac{t}{\cos^2 x}.dx=0, \text{ т.е.}$$

(6) $$\underbrace{(tg\,x-3t^2)}_{P}\,dt+\underbrace{\frac{t}{\cos^2 x}}_{Q}.dx=0.$$

Лесно се проверява, че $\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial t}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, следователно (6) е уравнение на пълен диференциал и негов пръв интеграл е

(7) $$\Phi(t,x)=\int_{t_0}^{t}P(t,x)\,dt+\int_{x_0}^{x}Q(t,x)\,dx=\int_{t_0}^{t}(tg\,x-3\tau^2)\,d\tau+\int_{x_0}^{x}\frac{t}{\cos^2\xi}\,d\xi=$$

$$= tg\,x\int_{t_0}^{t} d\tau - 3\int_{t_0}^{t}\tau^2\,d\tau + t\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{\cos^2\xi} = tg\,x(t-t_0) - 3.\frac{1}{3}(t^3 - t_0^{\,3}) + t\int_{x_0}^{x} d(tg\,\xi) =$$

$$= tg\,x(t-t_0) - (t^3 - t_0^{\,3}) + t(tg\ x - tg\ x_0) = 2tg\,x.t - tg\,x t_0 - tg\ x_0\,t - (t^3 - t_0^{\,3}).$$

Общото решение на (1) е

(8) $\quad \Phi(t,x) \equiv 2tg\,x.t - tg\,x t_0 - tg\ x_0\,t - (t^3 - t_0^{\,3}) = const$.

Тема: Линейни хомогенни обикновени диференциални уравнения (*ЛХОДУ*) от ред, по-висок от първи, с постоянни коефициенти

Теоретичен минимум

Общ вид:

$a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + ...+ a_1 x^{(1)} + a_0 x = 0$.

8. Линейни хомогенни обикновени диференциални уравнения от втори ред.

ЛХОДУ от втори ред

(8.1) $\quad a.x^{//} + b.x^{/} + c.x = 0$.

Характеристично уравнение $a.\alpha^2 + b.\alpha + c = 0$ с корени α_1 и α_2.

Случай 1: Корените α_1 и α_2 са **реални** и **различни помежду си:**

(8.2^А) $\qquad x(t) = C_1.e^{\alpha_1.t} + C_2.e^{\alpha_2.t}$.

Случай 2: Корените α_1 и α_2 са **реални**, но **равни помежду си** $\alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha_0$

(8.2^Б) $\qquad x(t) = C_1.e^{\alpha_0.t} + C_2.t.e^{\alpha_0.t} \equiv (C_1 + C_2.t).e^{\alpha_0.t}$.

Случай 3: Корените α_1 и α_2 са **имагинерни** и **комплексно-спрегнати** (**винаги**), т.е. $\alpha_1 = \lambda + i.\theta$ и $\alpha_2 = \lambda - i.\theta$.

(8.2^В) $\qquad x(t) = C_1.e^{\alpha_1.t} + C_2.e^{\alpha_2.t} = C_1.e^{(\lambda+i.\theta).t} + C_2.e^{(\lambda-i.\theta).t}$, т.е.

$x(t) = e^{\lambda.t}\left[A.\cos\theta.t + B.\sin\theta.t\right]$.

Уравнение на Ойлер

$a_n t^n x^{(n)} + a_{n-1}t^{n-1}x^{(n-1)} + ...a_0 x = 0$

За да се сведе до уравнение с постоянни коефициенти, в него се прави полагането $t = e^{\xi}$, след което уравнението добива вида

$c_n x^{(n)}(\xi) + c_{n-1}x^{(n-1)}(\xi) + ...c_0 x(\xi) = 0$,

и в този си вид то е ЛХОДУ с **постоянни коефициенти**. След намирането на общото му решение $x(\xi) = x(\xi, C_1, C_2, ..., C_n)$ се възстановява „оригиналната" променлива t, като за целта се замести навсякъде $\xi = \ln t$, с което се получава окончателно $x(t) = x(t, C_1, C_2, ..., C_n)$.

✸ **Задача:**

📖

Тема: Линейни нехомогенни обикновени диференциални уравнения (*ЛХОДУ*) от ред, по-висок от първи, с постоянни коефициенти

📖 Теоретичен минимум

9. Линейни нехомогенни обикновени диференциални уравнения

(9.1) $a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_1 x^{(1)} + a_0 x = d(t)$.

Общото им решение се представя във вида

(9.2) $x(t) = x_0(t) + \bar{x}(t)$,

където:

- ☞ $x_0(t)$ - **общо решение** на **хомогенното** на (9.1) **уравнение**;
- ☞ $\bar{x}(t)$ - едно **частно решение** на **нехомогенното уравнение** (9.1).

За намиране на частно решение на нехомогенно уравнение са приложими **два метода**:

1) **Метод на полагането** (*приложим за уравнения с постоянни коефициенти и специален вид на дясната страна*), и
2) **Метод на Лагранж** (*метод на вариране на интеграционните константи*), приложим за **уравнения с непостоянни коефициенти.** Удобен за намиране на частни решения на нехомогенни уравнения, за които са известни (*вече*) общите решения на съответните им хомогенни уравнения.

I. Същност на метода на полагането за намиране на частни решения на ЛНхОДУ

За случая на ЛНхОДУ от втори ред с постоянни коефициенти, т.е. уравнения от вида

(9.3) $a.x^{//} + b.x^{/} + c.x = d(t)$, като може и $d(t) = \sum_{k=1}^{m} d_k(t)$.

Методът се прилага за ЛНхОДУ с дясна страна, имаща представяне (*или сбор от представяния*) от някои от следните **характерни видове**:

А) $d(t) = e^{\lambda.t} P_n(t)$.

В този случай частно решение се търси във вида

(9.4) $\bar{x}(t) = t^S e^{\lambda.t}.\bar{P}_n(t) \equiv t^S e^{\lambda.t}.\sum_{n=0}^{n} \bar{a}_n t^n$,

където:

☞ s - кратност на корена $\boxed{\lambda}$ в характеристичното уравнение $a.\lambda^2 + b.\lambda + c = 0$;

☞ $\bar{P}_n(t)$ - полином от n-та степен с неизвестни (*подлежащи на определяне*) коефициенти $\bar{a}_n$.

****Забележки***:

(1) *когато* λ *не е корен на характеристичното уравнение, то* $s = 0$,

(2) ако имаме просто $d(t) = P_n(t)$, то частно решение се търси във вида $\bar{x}(t) = \bar{P}_n(t)$, ако разбира се $\boxed{\lambda = 0}$ не е корен на характеристичното уравнение. А ако $\lambda = 0$ е s-кратен корен на характеристичното уравнение, то частно решение се търси във вида $\bar{x}(t) = t^s.\bar{P}_n(t)$.

Б) $d(t) = e^{\lambda.t}(P_n(t).\cos\theta.t + Q_n(t).\sin\theta.t)$.

В този случай частно решение се търси във вида

(9.5) $\bar{x}(t) = t^S e^{\lambda.t}.(\bar{P}_n(t).\cos\theta.t + \bar{Q}_n(t).\sin\theta.t)$,

където:

☞ s - кратност на корена $\boxed{\lambda \pm i.\theta}$ в характеристичното уравнение $a.\lambda^2 + b.\lambda + c = 0$;

☞ $\bar{P}_n(t)$, $\bar{Q}_n(t)$ - полиноми от n-та степен с неизвестни (*подлежащи на определяне*) коефициенти.

****Забележки***:

(1) решението се търси в този вид дори ако дясната страна на ДУ съдържа само едната от двете тригонометрични функции, т.е. само $d(t) = e^{\lambda.t}P_n(t).\cos\theta.t$ **или** пък само $d(t) = e^{\lambda.t}Q_n(t).\sin\theta.t$;

(2) ако $d(t) = P_n(t).\cos\theta.t + Q_n(t).\sin\theta.t$, т.е. $\lambda = 0$, трябва да се провери дали $0 \pm i.\theta \equiv \pm i.\theta$ не е корен на характеристичното уравнение:

- ако **да**, то $\bar{x}(t) = t(\bar{P}_n(t).\cos\theta.t + \bar{Q}_n(t).\sin\theta.t)$, понеже $s = 1$ и $\lambda = 0$;
- ако **не**, то $\bar{x}(t) = \bar{P}_n(t).\cos\theta.t + \bar{Q}_n(t).\sin\theta.t$, понеже $s = 0$ и $\lambda = 0$.

В) $d(t) = e^{(\lambda \pm i.\theta).t}.Z_n(t)$.

В този случай частно решение се търси във вида

(9.6) $\bar{x}(t) = t^S e^{(\lambda \pm i.\theta).t}.\bar{Z}_n(t)$,

където:

☞ s-кратност на корена $\boxed{\lambda \pm i.\theta}$ в характеристичното уравнение $a.\alpha^2 + b.\alpha + c = 0$;

☞ $\bar{Z}_n(t)$- полином от n-та степен с неизвестни (*подлежащи на определяне*) коефициенти.

****Забележка***:

Уравнения с дясна страна $d(t) = e^{\lambda.t}P_n(t).\cos\theta.t$ или $d(t) = e^{\lambda.t}P_n(t).\sin\theta.t$ **също** могат да бъдат решени по този начин. За целта вместо уравнението $a.x'' + b.x' + c.x = d(t)$ се разглежда уравнението

(9.7) $a.z'' + b.z' + c.z = d'(t)$,

където

(9.8) $d'(t) = e^{\lambda.t}e^{\pm i.\theta.t}.P_n(t) \equiv e^{(\lambda \pm i.\theta).t}.P_n(t)$,

т.е. точно уравнение от тип (**В**), само че „обобщено” в комплексната област. Ето защо негово частно решение се търси във вида

(9.9) $\bar{z}(t) = t^S e^{(\lambda \pm i.\theta).t}.\bar{P}_n(t)$.

Накрая се обособяват реалната и имагинерната части на решението $\bar{z}(t)$:

$\bar{z}(t) = \operatorname{Re}\bar{z}(t) + i.\operatorname{Im}\bar{z}(t)$.

За да получим решението $\bar{x}(t)$ от решението $\bar{z}(t)$, правим следното:

- ако решаваме уравнение с $d(t) = e^{\lambda.t} P_n(t).\cos\theta.t$, то $\bar{x}(t) = \operatorname{Re} \bar{z}(t)$, а
- ако решаваме уравнение с $d(t) = e^{\lambda.t} P_n(t).\sin\theta.t$, то $\bar{x}(t) = \operatorname{Im} \bar{z}(t)$.

Приложен по гореописания начин този подход е дори за предпочитане при уравнения с дясна страна $d(t) = e^{\lambda.t} P_n(t).\cos\theta.t$ или $d(t) = e^{\lambda.t} P_n(t).\sin\theta.t$, защото

- при него се търсят и определят **два пъти по-малко константи**, отколкото ако се работи с **тригонометрични функции**, и

- при диференциране в изрази, съдържащи **експоненти** вместо **тригонометрични функции**, се получават **значително по-малко** и **по-опростени** и **„олекотени" изрази**.

✷ **Задача** (Стр. 30/ Зад. 401) Да се реши уравнението

(1) $\quad x^{//} - 5x^{/} + 6x = 2e^{4t}$.

Решение: общото решение на (1) има вида

(2) $\quad x(t) = x_0(t) + \bar{x}(t)$,

където:

☞ $x_0(t)$ - общо решение на хомогенното на (1) уравнение;

☞ $\bar{x}(t)$ - едно **частно решение** на нехомогенното уравнение (1).

А) Общото решение на хомогенното на (1) уравнение

(3) $\quad x^{//} - 5x^{/} + 6x = 0$

се изразява чрез корените на характеристичното му уравнение

(4) $\quad \alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0$,

които са $\alpha_{1,2} = 2; 3$. Тогава общо решение на (3) има вида

(5) $\quad x_0(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$.

Б) Частно решение на нехомогенното уравнение (1) ще търсим по метода на полагането. При дясна страна $d(t) = 2e^{4t} \equiv P_0(t) e^{4t}$ и при положение, че $\lambda = 4$ не е корен на характеристичното уравнение (3), т.е. $s = 0$, частно решение ще търсим от вида

(6) $\quad \bar{x}(t) = t^S e^{\lambda.t}.\bar{P}_0(t) \equiv t^0 e^{4.t}.C = Ce^{4.t}$.

Нека определим $\bar{x}^{/}(t)$ и $\bar{x}^{//}(t)$:

☞ $\quad \bar{x}^{/}(t) = 4Ce^{4.t}$;

☞ $\quad \bar{x}^{//}(t) = 16Ce^{4.t}$.

Заместваме $\bar{x}^{/}(t)$ и $\bar{x}^{//}(t)$ в (1)

(7) $\quad 16Ce^{4.t} - 5.4Ce^{4.t} + 6Ce^{4.t} = 2e^{4t} \qquad \Big| : 2e^{4t} \neq 0$

(8) $\quad 8C - 10C + 3C = 1, \qquad$ т.е. $\quad C = 1$,

следователно частното решение (6) при тази стойност на константата C добива вида

(9) $\quad \bar{x}(t) = e^{4.t}$.

Накрая заместваме $x_0(t)$ от (5) и $\bar{x}(t)$ от (9) в (2) и за общото решение на (1) получаваме

(10) $\quad x(t) = x_0(t) + \bar{x}(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + e^{4t}$.

✸ **Задача** (Стр. 30/ Зад. 410) Да се реши уравнението

(1) $\quad x^{//} + 9x = 2t\cos 3t$.

Решение: общото решение на (1) има вида

(2) $\quad x(t) = x_0(t) + \bar{x}(t)$,

където:

☞ $x_0(t)$ - общо решение на хомогенното на (1) уравнение;

☞ $\bar{x}(t)$ - едно **частно решение** на нехомогенното уравнение (1).

А) Общото решение на съответното на (1) хомогенно уравнение

(3) $\quad x^{//} + 9x = 0$

се изразява чрез корените на характеристичното му уравнение

(4) $\quad \alpha^2 + 9\alpha = 0$,

които са

$\alpha_{1,2} = \underbrace{0}_{\lambda} \pm \underbrace{3}_{\mu} i$, т.е. $\lambda = 0$, $\mu = 3$.

Тогава общо решение на (3) има вида

(5) $\quad x_0(t) = e^{\lambda t}\{C_1\cos 3t + C_2 \sin 3t\} \equiv C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t$.

Б) Частно решение на нехомогенното уравнение (1) ще търсим по метода на полагането. При $\lambda = 0$ и при дясна страна

$$d(t) = 2t\cos 3t \equiv \underbrace{e^{\lambda.t}}_{1}\{\underbrace{P_1(t)}_{2t}.\cos\mu.t + \underbrace{Q_1(t)}_{0}.\sin\mu.t\}$$

частно решение на (1) ще търсим във вида

(6) $\quad \bar{x}(t) = t^S e^{\lambda.t}.(\bar{P}_1(t).\cos\mu.t + \bar{Q}_1(t).\sin\mu.t)$.

където:

☞ s - кратност на корена $\lambda \pm i.\mu \equiv 0 \pm i3$ в характеристичното уравнение (4), като в случая $\boxed{s = 1}$;

☞ $\bar{P}_1(t)$, $\bar{Q}_1(t)$ - полиноми от първа степен с неизвестни (*подлежащи на определяне*) коефициенти.

При отчитане на всички упоменати по-горе обстоятелства частното решение (6) би следвало да изглежда още така

(7) $\quad \bar{x}(t) = t.\{(at+b).\cos 3.t + (ct+d).\sin 3.t\}$.

Нека определим $\bar{x}^{/}(t)$ и $\bar{x}^{//}(t)$ ☹:

☞ $\bar{x}^{/}(t) = \{(at+b).\cos 3.t + (ct+d).\sin 3.t\} + t.\{a.\cos 3.t + c.\sin 3.t\} +$
$+ t.\{(at+b).(-3)\sin 3.t + (ct+d).(+3)\cos 3.t\} =$

$= (at+b).\cos 3.t + (ct+d).\sin 3.t +$
$+ t.\{3(ct+d)\cos 3.t - 3(at+b)\sin 3.t + a.\cos 3.t + c.\sin 3.t\} =$

$= (at+b).\cos 3.t + (ct+d).\sin 3.t +$

$$+t.\{(3ct+3d+a)\cos 3.t-(3at+3b-c)\sin 3.t\}.$$

☞ $$\bar{x}^{//}(t)=a.\cos 3.t+c.\sin 3.t+(at+b).(-3)\sin 3.t+(ct+d).(3)\cos 3.t+$$
$$+\{(3ct+3d+a)\cos 3.t-(3at+3b-c)\sin 3.t\}+$$
$$+t.\{(3ct+3d+a)(-3)\sin 3.t-(3at+3b-c)(3)\cos 3.t\}+t.\{3c\cos 3.t-3a\sin 3.t\}=$$

$$=a.\cos 3.t+c.\sin 3.t+3(ct+d).\cos 3.t-3(at+b).\sin 3.t+$$
$$+(3ct+3d+a)\cos 3.t-(3at+3b-c)\sin 3.t+$$
$$+t.\{-3(3ct+3d+a)\sin 3.t-3(3at+3b-c)\cos 3.t+3c\cos 3.t-3a\sin 3.t\}=$$

$$=(6ct+6d+2a)\cos 3.t-(6at+6b-2c)\sin 3.t+$$
$$+t.\{(-9ct-9d-6a)\sin 3.t+(-9at-9b+6c)\cos 3.t\}=$$

$$=(6ct+6d+2a)\cos 3.t-(6at+6b-2c)\sin 3.t-$$
$$-9t.\{(at+b)\cos 3.t+(ct+d)\sin 3.t\}-6t.\{a\sin 3.t-c\cos 3.t\}$$

Заместваме $x(t)$ и $\bar{x}^{//}(t)$ в (1), т.е. в $x^{//}+9x=2t\cos 3t$:

☞ $$(6ct+6d+2a)\cos 3.t-(6at+6b-2c)\sin 3.t-$$
$$-9t.\{(at+b)\cos 3.t+(ct+d)\sin 3.t\}-6t.\{a\sin 3.t-c\cos 3.t\}+$$
$$+9t.\{(at+b).\cos 3.t+(ct+d).\sin 3.t\}=2t\cos 3t$$

След съкращения и приведения получаваме

(8) $$(12ct+6d+2a)\cos 3.t-(12at+6b-2c)\sin 3.t=2t\cos 3t,$$

или още (*в по-удобен за сравнения вид*)

(9) $$\underbrace{12c}_{2}t\cos 3.t+(\underbrace{6d+2a}_{0})\cos 3.t-\underbrace{12a}_{0}t\sin 3.t-(\underbrace{6b-2c}_{0})\sin 3.t=2t\cos 3t.$$

Нека сравним полиномните коефициентите пред $\cos 3.t$ и $\sin 3.t$ от двете страни на (9). Така получаваме следната система от 4 уравнения за четирите неизвестни полиномни коефициенти a,b,c,d:

(10[а]) $12c=2$, $\Rightarrow$ $c=1/6$;

(10[б]) $12a=0$, $\Rightarrow$ $a=0$;

(10[в]) $6d+2a=0$, $\Rightarrow$ $d=0$;

(10[г]) $6b-2c=0$, $\Rightarrow$ $b=(1/3).c=1/18$.

Заместваме така намерените коефициенти в (7) и за частното решение на (1) получаваме

(11) $$\bar{x}(t)=t.\{(at+b).\cos 3.t+(ct+d).\sin 3.t\}=t.\left(\frac{1}{18}\cos 3.t+\frac{t}{6}\sin 3.t\right).$$

Накрая заместваме $x_0(t)$ от (5) и $\bar{x}(t)$ от (11) в (2) и за общото решение на (1) получаваме

(12) $$x(t)=x_0(t)+\bar{x}(t)=C_1\cos 3t+C_2\sin 3t+\frac{t}{18}\cos 3.t+\frac{t^2}{6}\sin 3.t=$$

$$= \left(C_1 + \frac{t}{18}\right)\cos 3t + \left(C_2 + \frac{t^2}{6}\right)\sin 3t.$$

✸ **Задача** Да се реши уравнението

(1) $x^{///} - 4x^{//} + 3x^{/} = t^2 + t.e^{2t}$.

Решение: общото решение на (1) търсим от вида

(2) $x(t) = x_0(t) + \bar{x}(t)$,

където:

- ☞ $x_0(t)$ - общо решение на хомогенното на (1) уравнение;
- ☞ $\bar{x}(t)$ - едно **частно решение** на нехомогенното уравнение (1).

А) Общото решение на хомогенното на (1) уравнение

(3) $x^{///} - 4x^{//} + 3x^{/} = 0$

се изразява чрез корените на характеристичното му уравнение

(4) $\alpha^3 - 4\alpha^2 + 3\alpha = 0$, или още $\alpha(\alpha^2 - 4\alpha + 3) = 0$

които са $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$ и $\alpha_3 = 3$. Тогава общо решение на (3) има вида

(5) $x_0(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} + C_3 e^{\alpha_3 t} \equiv C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{3t}$.

Б) Частно решение на нехомогенното уравнение (1) ще търсим по метода на полагането. При дясна страна

(6) $d(t) = t^2 + t.e^{2t} \equiv P_2(t)\, e^{0.t} + Q_1(t).e^{2t}$

уравнение (1) допуска частно решение от вида

(7) $\bar{x}(t) = t^S \overline{P}_2(t) e^{0.t} + t^{S^/}\, \overline{Q}_1(t)\, e^{2.t}$,

където:

- s - кратност на корена $\alpha = 0$ на (4), или в случая $s = 1$;
- $s^/$ - кратност на корена $\alpha = 2$ на (4), или в случая $s^/ = 0$.

Следователно частно решение на (1) ще търсим във вида:

(8) $\bar{x}(t) = t.(at^2 + bt + c) + (dt + f)e^{2.t} \equiv (at^3 + bt^2 + ct) + (dt + f)e^{2.t}$.

Нека определим производните $\bar{x}^/(t)$, $\bar{x}^{//}(t)$ и $\bar{x}^{///}(t)$:

- ☞ $\bar{x}^/ = (3at^2 + 2bt + c) + d.e^{2.t} + 2(dt + f)e^{2.t} = (3at^2 + 2bt + c) + (2dt + 2f + d)e^{2.t}$;
- ☞ $\bar{x}^{//} = (6at + 2b) + 2d.e^{2.t} + 2(2dt + 2f + d)e^{2.t} = 6at + 2b + 4(dt + f + d)e^{2.t}$;
- ☞ $\bar{x}^{///} = 6a + 4d.e^{2.t} + 8(dt + f + d).e^{2.t} = 6a + 4(2dt + 2f + 3d).e^{2.t}$.

Заместваме $\bar{x}^/(t)$, $\bar{x}^{//}(t)$ и $\bar{x}^{///}(t)$ в (1), т.е. в $x^{///} - 4x^{//} + 3x^/ = t^2 + t.e^{2t}$ и рационализираме:

$$6a + 4(2dt + 2f + 3d).e^{2.t} - 4[6at + 2b + 4(dt + f + d)e^{2.t}] +$$
$$+ 3[(3at^2 + 2bt + c) + (2dt + 2f + d)e^{2.t}] = t^2 + t.e^{2t};$$

$$\{6a - 24at - 8b + 9at^2 + 6bt + 3c\} +$$
$$+ e^{2.t}\{8dt + 8f + 12d - 16dt - 16f - 16d + 6dt + 6f + 3d\} = t^2 + t.e^{2t};$$

(9) $\{9at^2+(6b-24a)t+(6a-8b+3c)\}+e^{2.t}\{-2dt-2f-d\}=t^2+t.e^{2t}$.

Сравняваме еднотипните алгебрични компоненти от двете страни на равенство (9)

(10[а]) $\underbrace{9a}_{1}t^2+(\underbrace{6b-24a}_{0})t+(\underbrace{6a-8b+3c}_{0}) \quad\Leftrightarrow\quad 1.t^2+0.t+0$, и

(10[б]) $(\underbrace{-2dt-2f-d}_{t})\,e^{2.t} \quad\Leftrightarrow\quad (1.\,t+0).e^{2t}$.

Така достигаме до следната система от алгебрични уравнения за неизвестните коефициенти a,b,c,d,f :

(11[а]) $9a=1, \quad\Rightarrow\quad a=\dfrac{1}{9}$;

(11[б]) $6b-24a=0$, т.е. $b=4a \quad\Rightarrow\quad b=\dfrac{4}{9}$;

(11[в]) $6a-8b+3c=0$, т.е. $c=\dfrac{1}{3}(8b-6a)=\dfrac{1}{3}(\dfrac{32}{9}-\dfrac{6}{9}) \quad\Rightarrow\quad c=\dfrac{26}{27}$;

(11[г]) $-2d=1, \quad\Rightarrow\quad d=-\dfrac{1}{2}$;

(11[д]) $-2f-d=0, \quad\Rightarrow\quad f=-\dfrac{d}{2}=\dfrac{1}{4}$.

Частното решение (8) при тази стойност на константите добива вида

(12) $$\bar{x}(t)=t(at^2+bt+c)+(dt+f)e^{2.t}=$$
$$=t(\frac{1}{9}t^2+\frac{4}{9}t+\frac{26}{27})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}t)e^{2.t}=\frac{t}{9}(t^2+4t+\frac{26}{3})-\frac{1}{2}(t-\frac{1}{2})e^{2.t}.$$

Накрая заместваме $x_0(t)$ от (5) и $\bar{x}(t)$ от (12) в (2) и за общото решение на (1) получаваме

(13) $$x(t)=x_0(t)+\bar{x}(t)=C_1+C_2e^t+C_3e^{3t}+\frac{t}{9}(t^2+4t+\frac{26}{3})-\frac{1}{2}(t-\frac{1}{2})e^{2.t}.$$

✸ **Задача** Да се реши уравнението

(1) $x^{//}-2x^{/}+x=2t\,e^t+e^t\sin 2t$.

Решение: общото решение на (1) има вида

(2) $x(t)=x_0(t)+\bar{x}(t)$,

където:

- ☞ $x_0(t)$ - общо решение на хомогенното на (1) уравнение;
- ☞ $\bar{x}(t)$ - едно **частно решение** на нехомогенното уравнение (1).

А) Общото решение на съответното на (1) хомогенно уравнение

(3) $x^{//}-2x^{/}+x=0$

се изразява чрез корените на характеристичното му уравнение

(4) $\alpha^2-2\alpha+1=0$,

които са

$\alpha_{1,2}\equiv\alpha=1$, т.е. двукратен корен.

При това обстоятелство общо решение на (3) ще има вида

(5) $x_0(t) = C_1 e^{\alpha t} + C_2.t.e^{\alpha t} \equiv (C_1 + C_2.t).e^t$.

Б) Частно решение на нехомогенното уравнение (1) ще търсим по метода на полагането. При дясна страна от вида

(6) $d(t) = 2t\,e^t + e^t \sin 2t \equiv P_1(t) e^t + e^t Q_0(t) \sin 2t$

ще търсим частно решение на (1) във вида

(7) $\overline{x}(t) = t^S \overline{P}_1(t) e^t + t^{S'} e^t \{\overline{Q}_0(t) \sin 2t + \overline{R}_0(t) \cos 2t\}$.

където:

☞ s - кратност на корена $\alpha = 1$ в характеристичното уравнение (4), като в случая $\boxed{s = 2}$;

☞ s' - кратност на корена (*ако изобщо има такъв*) $\alpha' = 1 + 2i$ в характеристичното уравнение (4), като в случая $\boxed{s' = 0}$;

☞ $\overline{P}_1(t)$, $\overline{Q}_0(t)$, $\overline{R}_0(t)$ - полиноми от първа и нулева степени с неизвестни (*подлежащи на определяне*) коефициенти.

С отчитане на всички упоменати по-горе съображения частното решение (7) следва да търсим във вида

(8) $\overline{x}(t) = t^2 (at + b) e^t + e^t \{c.\sin 2t + d \cos 2t\}$.

Нека определим $\overline{x}'(t)$ и $\overline{x}''(t)$:

☞ $$\begin{aligned}\overline{x}'(t) &= at^2 e^t + 2t(at + b) e^t + t^2 (at + b) e^t + \\ &+ e^t \{c.\sin 2t + d \cos 2t\} + e^t \{2c.\cos 2t - 2d \sin 2t\} = \\ &= \{at^3 + (3a + b)t^2 + 2bt\} e^t + \{(2c + d) \cos 2t + (c - 2d) \sin 2t\} e^t = \\ &= \{at^3 + (3a + b)t^2 + 2bt + (2c + d) \cos 2t + (c - 2d) \sin 2t\} e^t.\end{aligned}$$

☞ $$\begin{aligned}&\overline{x}''(t) = \{3at^2 + 2(3a + b)t + 2b\} e^t + \{at^3 + (3a + b)t^2 + 2bt\} e^t + \\ &+ \{-2(2c + d) \sin 2t + 2(c - 2d) \cos 2t\} e^t + \{(2c + d) \cos 2t + (c - 2d) \sin 2t\} e^t = \\ &= \{at^3 + (6a + b)t^2 + (6a + 4b)t + 2b\} e^t + \{(4c - 3d) \cos 2t - (3c + 4d) \sin 2t\} e^t = \\ &= \{at^3 + (6a + b)t^2 + (6a + 4b)t + 2b + (4c - 3d) \cos 2t - (3c + 4d) \sin 2t\} e^t.\end{aligned}$$

Заместваме $x(t)$ и $\overline{x}''(t)$ в (1), т.е. в $x'' - 2x' + x = 2t\,e^t + e^t \sin 2t$:

$$\begin{aligned}&\{at^3 + (6a + b)t^2 + (6a + 4b)t + 2b + (4c - 3d) \cos 2t - (3c + 4d) \sin 2t\} e^t - \\ &- 2\{at^3 + (3a + b)t^2 + 2bt + (2c + d) \cos 2t + (c - 2d) \sin 2t\} e^t + \\ &+ \{(at + b)t^2 + c.\sin 2t + d \cos 2t\} e^t = (2t + \sin 2t) e^t\end{aligned}$$

Ако съкратим двете страни на горното уравнение с $e^t \neq 0$ и рационализираме, ще получим

$$\begin{aligned}&at^3 + (6a + b)t^2 + (6a + 4b)t + 2b + (4c - 3d) \cos 2t - (3c + 4d) \sin 2t - \\ &- 2at^3 - 2(3a + b)t^2 - 4bt - 2(2c + d) \cos 2t - 2(c - 2d) \sin 2t + \\ &+ (at + b)t^2 + c.\sin 2t + d \cos 2t = 2t + \sin 2t\text{, т.е.}\end{aligned}$$

(9) $\quad (6at+2b)-4d\cos 2t-4c\sin 2t=2t+\sin 2t$.

Нека в (9) сравним еднотипните алгебрични компоненти от двете страни на равенството, т.е.

(10[а]) $\underbrace{6a}_{2}t+\underbrace{2b}_{0} \quad \Leftrightarrow \quad 2t$, и

(10[б]) $\underbrace{(-4d)}_{0}\cos 2t+\underbrace{(-4c)}_{1}\sin 2t \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2t$.

От сравняването произтичат следните алгебрични уравнения

(11[а]) $6a=2, \quad \Rightarrow \quad a=1/3;$

(11[б]) $2b=0, \quad \Rightarrow \quad b=0;$

(11[в]) $-4d=0, \quad \Rightarrow \quad d=0;$

(11[г]) $-4c=1, \quad \Rightarrow \quad c=-1/4$.

Заместваме така намерените коефициенти в (8) и за частното решение на (1) получаваме

(12) $\bar{x}(t)=t^2(at+b)e^t+e^t\{c.\sin 2t+d\cos 2t\}=\frac{1}{3}t^3e^t-e^t\frac{1}{4}.\sin 2t\equiv\left(\frac{t^3}{3}-\frac{1}{4}.\sin 2t\right)e^t$.

Накрая заместваме $x_0(t)$ от (5) и $\bar{x}(t)$ от (12) в (2) и за общото решение на (1) получаваме

(13) $$x(t)=x_0(t)+\bar{x}(t)=(C_1+C_2.t).e^t+\left(\frac{t^3}{3}-\frac{1}{4}.\sin 2t\right)e^t=$$
$$=\left(C_1+C_2.t+\frac{t^3}{3}-\frac{1}{4}.\sin 2t\right)e^t.$$

✸ **Задача** Да се реши уравнението

(1) $\quad x^{//}+x^{/}=\cos^2 t+e^t+t^2$.

Решение: общото решение на (1) има вида

(2) $\quad x(t)=x_0(t)+\bar{x}(t)$,

където:

☞ $x_0(t)$ - общо решение на хомогенното на (1) уравнение;

☞ $\bar{x}(t)$ - едно **частно решение** на нехомогенното уравнение (1).

А) Общото решение на съответното на (1) хомогенно уравнение

(3) $\quad x^{//}+x^{/}=0$

се изразява чрез корените на характеристичното му уравнение

(4) $\quad \alpha^2+\alpha=0$,

които са

$\alpha_1=0, \ \alpha_2=-1$.

При това обстоятелство общо решение на (3) ще има вида

(5) $\quad x_0(t)=C_1e^{\alpha_1 t}+C_2.e^{\alpha_2 t}\equiv C_1+C_2.e^{-t}$.

Б) Частно решение на нехомогенното уравнение (1) ще търсим по метода на полагането. За тази цел най-напред ще представим дясната страна на (1) във вида

$$d(t)=\cos^2 t+e^t+t^2=\frac{1+\cos 2t}{2}+e^t+t^2=\underbrace{\left(\frac{1}{2}+t^2\right)}_{P_2(t)}+\underbrace{\frac{1}{2}}_{Q_0(t)}\cos 2t+\underbrace{1}_{R_0(t)}.e^t\equiv$$

$$=\underbrace{P_2(t)}_{P_2(t)e^{0.t}}+Q_0(t)\cos 2t+R_0(t).e^t.$$

За ЛНхОДУ с такива десни страни се препоръчва търсене на частно решение $\bar{x}(t)$ от вида

(6) $\bar{x}(t)=t^s\bar{P}_2(t)+t^{s^/}\{\bar{Q}_0^{\,/}(t)\cos 2t+\bar{Q}_0^{\,//}(t)\sin 2t\}+t^{s^{//}}\bar{R}_0(t).e^t$,

където:

☞ s - кратност на корена $\alpha=0$ в характеристичното уравнение (4), като в случая $\boxed{s=1}$;

☞ $s^/$ - кратност на корен (*ако има такъв*) $\alpha=0+2i$ в характеристичното уравнение (4), като в случая $\boxed{s^/=0}$;

☞ $s^{//}$ - кратност на корен (*ако има такъв*) $\alpha=1$ в характеристичното уравнение (4), като в случая $\boxed{s^{//}=0}$;

☞ $\bar{P}_1(t),\ \bar{Q}_0^{\,/}(t),\ \bar{Q}_0^{\,//}(t), \bar{R}_0(t)$ - полиноми от първа и нулева степени с неизвестни (*подлежащи на определяне*) коефициенти.

С отчитане на всички упоменати по-горе съображения частно решение (6) следва да търсим във вида

(7) $\bar{x}(t)=t.(at^2+bt+c)+\{d.\cos 2t+f.\sin 2t\}+g.e^t$ q

където a,b,c,d,f,g са константи, подлежащи на определяне.

Нека определим $\bar{x}^/(t)$ и $\bar{x}^{//}(t)$:

☞ $\bar{x}^/(t)=(at^2+bt+c)+t.(2at+b)+\{-2d.\sin 2t+2f.\cos 2t\}+g.e^t=$

$=(3at^2+2bt+c)-2\{d.\sin 2t-f.\cos 2t\}+g.e^t$.

☞ $\bar{x}^{//}(t)=(6at+2b)-4\{d.\cos 2t+f.\sin 2t\}+g.e^t$.

Заместваме $x(t)$ и $\bar{x}^{//}(t)$ в (1), т.е. в $x^{//}+x^/=\cos^2 t+e^t+t^2$:

$(6at+2b)-4\{d.\cos 2t+f.\sin 2t\}+g.e^t+(3at^2+2bt+c)-$

$-2\{d.\sin 2t-f.\cos 2t\}+g.e^t=\left(\frac{1}{2}+t^2\right)+\frac{1}{2}\cos 2t+e^t$, т.е.

(8) $\{3at^2+(6a+2b)t+(2b+c)\}+\{(2f-4d).\cos 2t-(4f+2d).\sin 2t\}+2g.e^t=$

$=\left(t^2+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\cos 2t+e^t$

Нека в (8) сравним еднотипните алгебрични компоненти от двете страни на равенството, т.е.

(9ᵃ) $\underbrace{3a}_{1}t^2+(\underbrace{6a+2b}_{0})t+(\underbrace{2b+c}_{1/2})\quad\Leftrightarrow\quad t^2+\frac{1}{2}$, (9[б]) $(\underbrace{2f-4d}_{1/2}).\cos 2t-(\underbrace{4f+2d}_{0}).\sin 2t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\cos 2t+0.\sin 2t$, и

(9[в]) $\underbrace{2g}_{1}.e^t \quad \Leftrightarrow \quad 1.e^t$.

От сравняването произтичат следните алгебрични уравнения

(11[а]) $3a=1, \quad \Rightarrow \quad a=1/3;$

(11[б]) $6a+2b=0, \quad \Rightarrow \quad b=-3a=-1;$

(11[в]) $2b+c=1/2, \quad \Rightarrow \quad c=1/2-2b=5/2;$

(11[г]) $2f-4d=1/2;$

(11[д]) $4f+2d=0;$

(11[е]) $2g=1, \quad \Rightarrow \quad g=1/2$.

От съвместното решаване на (11[г]) и (11[д]) определяме още $d=-1/10$ и $f=1/20$.

Заместваме така намерените коефициенти в (7) и за частното решение на (1) получаваме

$$\bar{x}(t)=t.(at^2+bt+c)+\{d.\cos 2t+f.\sin 2t\}+g.e^t=$$
$$=t.(\frac{1}{3}t^2-t+\frac{5}{2})+\{-\frac{1}{10}\cos 2t+\frac{1}{20}\sin 2t\}+\frac{1}{2}.e^t, \quad \text{т.е.}$$

(12) $\bar{x}(t)=\frac{t^3}{3}-t^2+\frac{5}{2}t-\frac{1}{10}\{\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t\}+\frac{1}{2}.e^t$.

Накрая заместваме $x_0(t)$ от (5) и $\bar{x}(t)$ от (12) в (2) и за общото решение на (1) получаваме

(13) $x(t)=x_0(t)+\bar{x}(t)=C_1+C_2.e^{-t}+\frac{t^3}{3}-t^2+\frac{5}{2}t-\frac{1}{10}\{\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t\}+\frac{1}{2}.e^t$.

✸ **Задача** Да се реши уравнението

(1) $x^{//}-8x^{/}+17x=e^{4t}(t^2-3t\sin t)$.

Решение: общото решение на (1) има вида

(2) $x(t)=x_0(t)+\bar{x}(t)$,

където:

☞ $x_0(t)$ - общо решение на хомогенното на (1) уравнение;

☞ $\bar{x}(t)$ - едно **частно решение** на нехомогенното уравнение (1).

А) Общото решение на съответното на (1) хомогенно уравнение

(3) $x^{//}-8x^{/}+17x=0$

се изразява чрез корените на характеристичното му уравнение

(4) $\alpha^2-8\alpha+17=0$,

които са

$\alpha_{1,2}=4\pm i\equiv\lambda\pm i.\mu$.

Понеже корените са комплексни (комплексно-спрегнати), то общо решение на (3) ще има вида

(5) $x_0(t)=e^{\lambda t}[C_1\cos\mu t+C_2\sin\mu t]\equiv e^{4t}[C_1\cos t+C_2\sin t]$.

Б) Частно решение на нехомогенното уравнение (1) ще търсим по метода на полагането. За ЛНхОДУ с дясна страна от вида

(6) $\quad d(t)=e^{4t}(t^2-3t\sin t)=t^2e^{4t}+(-3t)e^{4t}\sin t\equiv P_2(t)e^{4t}+Q_1(t)e^{4t}\sin t$

се препоръчва търсене на частно решение $\bar{x}(t)$ от вида

(7) $\quad \bar{x}(t)=t^s\bar{P}_2(t).e^{4t}+t^{s^/}.e^{4t}\{\bar{Q}_1^{/}(t)\cos t+\bar{Q}_1^{//}(t)\sin t\}$,

където:

☞ s - кратност на корена $\alpha=4$ в характеристичното уравнение (4), като в случая $\boxed{s=0}$, понеже корените са ($4\pm i$), а не 4;

☞ $s^/$ - кратност на корена $\alpha=4+i$ в характеристичното уравнение (4), като в случая $\boxed{s^/=1}$;

☞ $\bar{P}_2(t)$, $\bar{Q}_1^{/}(t)$, $\bar{Q}_1^{//}(t)$ - полиноми от втора и първа степени с неизвестни (*подлежащи на определяне*) коефициенти.

С отчитане на всички упоменати по-горе съображения частно решение (7) следва да търсим във вида

(8) $\quad \bar{x}(t)=(at^2+bt+c)e^{4t}+t.e^{4t}\{(mt+n).\cos t+(pt+q).\sin t\}$,

или още

(9) $\quad \bar{x}(t)=\{(at^2+bt+c)+(mt^2+nt).\cos t+(pt^2+qt).\sin t\}.e^{4t}$

където a,b,c,m,n,p,q са 7 константи, подлежащи на определяне.

Нека определим $\bar{x}^/(t)$ и $\bar{x}^{//}(t)$ ☹:

$$\begin{aligned}\bar{x}^/(t)&=\{(2at+b)+(2mt+n).\cos t+(2pt+q).\sin t-(mt^2+nt).\sin t+(pt^2+qt).\cos t\}.e^{4t}+\\&+4\{(at^2+bt+c)+(mt^2+nt).\cos t+(pt^2+qt).\sin t\}.e^{4t}=\\&=\{4at^2+2(a+2b)t+b+4c\}.e^{4t}+\{[(p+4m)t^2+(2m+4n+q)t+n]\cos t\}.e^{4t}+\\&+\{[(4p-m)t^2+(2p+4q-n)t+q]\sin t\}.e^{4t}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{x}^{//}(t)&=\{8at+2(a+2b)\}.e^{4t}+4\{4at^2+2(a+2b)t+b+4c\}.e^{4t}+\\&+\{2[(p+4m)t+(2m+4n+q)]\cos t\}.e^{4t}-\{[(p+4m)t^2+(2m+4n+q)t+n]\sin t\}.e^{4t}+\\&+4\{[(p+4m)t^2+(2m+4n+q)t+n]\cos t\}.e^{4t}+\{[(8p-m)t+(2p+4q-n)]\sin t\}.e^{4t}+\\&+\{[(4p-m)t^2+(2p+4q-n)t+q]\cos t\}.e^{4t}+4\{[(4p-m)t^2+(2p+4q-n)t+q]\sin t\}.e^{4t}\end{aligned}$$

Заместваме $x(t)$ и $\bar{x}^{//}(t)$ в (1), т.е. в $x^{//}-8x^/+17x=e^{4t}(t^2-3t\sin t)$, и след съкращаване на e^{4t} и дълги и елементарни, но обемисти изчисления се достига до уравнението

(10) $\quad (at^2+bt+2a+c)+[4pt+2m+2q].\cos t+[-4mt-2n+2p].\sin t=t^2-3t\sin t$.

Нека в (10) сравним еднотипните алгебрични компоненти от двете страни на равенството, т.е.

(11[а]) $\quad \underbrace{a}_{1}t^2+\underbrace{b}_{0}t+\underbrace{2a+c}_{0} \quad \Leftrightarrow \quad t^2$,

(11[б]) $\quad [\underbrace{4pt+2m+2q}_{0}].\cos t+[\underbrace{-4mt-2n+2p}_{-3t}].\sin t \quad \Leftrightarrow \quad -3t.\sin t$.

От ($11^{а}$) определяме

($12^{а}$) $a=1$;

($12^{б}$) $b=0$;

($12^{в}$) $2a+c=0, \quad \Rightarrow \qquad c=-2a=-2$.

От ($11^{б}$) произтичат нови две уравнения:

($13^{а}$) $\underbrace{4p}_{0}t+\underbrace{2m+2q}_{0}=0.t+0$;

($13^{б}$) $\underbrace{-4m}_{-3}t+(\underbrace{-2n+2p}_{0})=-3t+0$,

от всяко едно от които чрез сравняване на коефициентите пред еднаквите степени на t произтичат нови равенства:

($14^{а}$) $4p=0, \qquad \Rightarrow \qquad p=0$;

($14^{б}$) $-4m=-3, \qquad \Rightarrow \qquad m=3/4$;

($14^{в}$) $2m+2q=0, \qquad \Rightarrow \qquad q=-m=-3/4$;

($14^{г}$) $-2n+2p=0, \qquad \Rightarrow \qquad n=p\equiv 0$.

Заместваме така намерените коефициенти в (8) и за частното решение на (1) получаваме

(15) $\bar{x}(t)=(t^2-2)e^{4t}+t.e^{4t}\{\frac{3}{4}t.\cos t-\frac{3}{4}.\sin t\}=\{t^2-2+\frac{3}{4}t^2.\cos t-\frac{3}{4}t.\sin t\}.e^{4t}$

Накрая заместваме $x_0(t)$ от (5) и $\bar{x}(t)$ от (15) в (2) и за общото решение на (1) получаваме

(16) $$x(t)=x_0(t)+\bar{x}(t)=e^{4t}[C_1\cos t+C_2\sin t]+\{t^2-2+\frac{3}{4}t^2.\cos t-\frac{3}{4}t.\sin t\}.e^{4t}=$$

$$=\left[t^2-2+\left(\frac{3}{4}t^2+C_1\right).\cos t+\left(C_2-\frac{3}{4}t\right).\sin t\right].e^{4t}.$$

✸ **Задача** Да се реши уравнението

(1) $x^{//}-4x^{/}+6x=(t+1)e^{2t}\sin\sqrt{2}\,t$.

Решение: общото решение на (1) има вида

(2) $x(t)=x_0(t)+\bar{x}(t)$,

където:

☞ $x_0(t)$ - общо решение на хомогенното на (1) уравнение;

☞ $\bar{x}(t)$ - едно **частно решение** на нехомогенното уравнение (1).

А) Общото решение на съответното на (1) хомогенно уравнение

(3) $x^{//}-4x^{/}+6x=0$

се изразява чрез корените на характеристичното му уравнение

(4) $\alpha^2-4\alpha+6=0$,

които са

$\alpha_{1,2}=2\pm i\sqrt{2}$.

При това обстоятелство общо решение на (3) ще има вида

(5) $\quad x_0(t)=e^{2t}(C_1\cos\sqrt{2}\,t+C_2\sin\sqrt{2}\,t)$.

Б) Частно решение на нехомогенното уравнение (1) ще търсим по метода на полагането. При това ще приложим една разновидност на метода, описана в теоретичната част, идеята на която се заключава в това вместо даденото уравнение

(6) $\quad x^{//}-4x^{/}+6x=d(t)$,

където $d(t)=P_1(t)e^{2t}\sin\sqrt{2}\,t$, да решим едно негово обобщение в комплексната област

(7) $\quad z^{//}-4z^{/}+6z=d^{/}(t)$,

където $d^{/}(t)=P_1(t)e^{(2+i\sqrt{2})t}\equiv P_1(t)e^{\alpha t}$, а $\alpha=2+\sqrt{2}i$.

Според теорията при такава дясна страна частно решение на (7) следва да се търси във вида

(8) $\quad \bar{z}(t)=t^{S}P_1(t)e^{(2+i\sqrt{2})t}$,

където s е кратност на корена $2+\sqrt{2}i$ на характеристичното уравнение (4), и в случая тази кратност е $s=1$.

Накрая, след решаването на (7), следва да обособим реалната и имагинерната части на решението $\bar{z}(t)$

$\bar{z}(t)=\operatorname{Re}\bar{z}(t)+i.\operatorname{Im}\bar{z}(t)$,

а за да получим решението $\bar{x}(t)$ от решението $\bar{z}(t)$, трябва да направим следното:

- ✓ ако решаваме уравнение с $d(t)=e^{\lambda.t}P_n(t).\cos\theta.t$, то $\bar{x}(t)=\operatorname{Re}\bar{z}(t)$, а
- ✓ ако решаваме уравнение с $d(t)=e^{\lambda.t}P_n(t).\sin\theta.t$, то $\bar{x}(t)=\operatorname{Im}\bar{z}(t)$.

От всичко казано дотук става ясно, че частно решение на „модифицираното" уравнение (7) следва да търсим във вида

(9) $\quad \bar{z}(t)=t.\overline{P}_1(t)e^{(2+i\sqrt{2})t}=t.(at+b)e^{\alpha t}\equiv(at^2+bt)e^{\alpha t}$,

след което частното решение на (1) да представим във вида

(10) $\quad \bar{x}(t)=\operatorname{Im}\bar{z}(t)$.

Нека реализираме този план на работа. За решаването на (7) е необходимо най-напред да изразим производните $\bar{z}^{/}(t)$ и $\bar{z}^{//}(t)$ от (9):

- ☞ $\bar{z}^{/}(t)=(2at+b)e^{\alpha t}+\alpha(at^2+bt)e^{\alpha t}=\{\alpha at^2+(2a+\alpha b)t+b\}e^{\alpha t}$.
- ☞ $\bar{z}^{//}(t)=\{2\alpha at+(2a+\alpha b)\}e^{\alpha t}+\alpha\{\alpha at^2+(2a+\alpha b)t+b\}e^{\alpha t}=$
  $=\{\alpha^2 at^2+(4\alpha a+\alpha^2 b).t+(2a+2\alpha b\}e^{\alpha t}$.

Заместваме така намерените производни в (7), т.е. в $z^{//}-4z^{/}+6z=(t+1)e^{\alpha t}$, като при това (*за компактност на записа*) съдържащата се във всички членове експонента $e^{\alpha t}\neq 0$ „съкращаваме" предварително:

$$\{\alpha^2 at^2+(4\alpha a+\alpha^2 b).t+(2a+2\alpha b\}-4\{\alpha at^2+(2a+\alpha b)t+b\}+6(at^2+bt)=(t+1).$$

Дотук все още не сме конкретизирали, че константата $\alpha=2+\sqrt{2}\,i$, а нейният квадрат $\alpha^2=(2+\sqrt{2}\,i)^2=4+4\sqrt{2}\,i-2=2+4\sqrt{2}\,i$. За да отчетем тези неща е удобно най-напред да представим лявата страна на горното уравнение като своеобразен полином по степените на α:

(10) $[at^2+bt]\underbrace{\alpha^2}_{\uparrow}+[-4at^2+4(a-b)t+2b]\underbrace{\alpha}_{\uparrow}+[6at^2+(6b-8a)t+2a-4b]=(t+1)$.

Заместваме α и α^2 в (10) и получаваме

$$[at^2+bt](\underbrace{2+4\sqrt{2}\,i}_{\alpha^2})+[-4at^2+4(a-b)t+2b](\underbrace{2+\sqrt{2}\,i}_{\alpha})+$$

$$+[6at^2+(6b-8a)t+2a-4b]=(t+1),\qquad \text{т.е.}$$

$$[6at^2+(6b-8a)t+2a-4b]+2[at^2+bt]+2[-4at^2+4(a-b)t+2b]+$$
$$+4[at^2+bt]\sqrt{2}\,i+[-4at^2+4(a-b)t+2b]\sqrt{2}\,i=t+1,$$

Рационализираме

$$6at^2+6bt-8at+2a-4b+2at^2+2bt-8at^2+8at-8bt+4b+$$
$$+[4at^2\sqrt{2}+4bt\sqrt{2}-4at^2\sqrt{2}+4at\sqrt{2}-4bt\sqrt{2}+2b\sqrt{2}]\,i=t+1\ \ldots..$$

…. и съкращаваме, с което получаваме

$$2a+[4at\sqrt{2}+2b\sqrt{2}]\,i=t+1,$$

или още

(11) $(\underbrace{4a\sqrt{2}\,i}_{1})t+(\underbrace{2b\sqrt{2}\,i+2a}_{1})=t+1.$

Нека в (11) сравним коефициентите пред еднаквите степени на t от двете страни на равенството, т.е.

(12^{а}) $4a\sqrt{2}\,i=1,\qquad\Rightarrow\qquad a=\dfrac{1}{i4\sqrt{2}}\dfrac{i\sqrt{2}}{i\sqrt{2}}=-\dfrac{i\sqrt{2}}{8};$

(12^{б}) $2b\sqrt{2}\,i+2a=1,\qquad\Rightarrow\qquad b=\dfrac{1-2a}{i2\sqrt{2}}=\ldots.=\dfrac{1-i2\sqrt{2}}{8}.$

Заместваме така намерените коефициенти в (9) и за частното решение на (7) получаваме

$$\bar{z}(t)=\left(\frac{i\sqrt{2}}{8}t^2+\frac{1-i2\sqrt{2}}{8}t\right)e^{(2+i\sqrt{2})\,t}=\left(\frac{1}{8}t-\frac{i\sqrt{2}}{8}(t^2+2t)\right)e^{2\,t}\underbrace{e^{i\sqrt{2}\,t}}_{\textit{Ойлер}}=$$

$$=e^{2\,t}\left(\frac{1}{8}t-\frac{i\sqrt{2}}{8}(t^2+2t)\right)(\cos\sqrt{2}t+i.\sin\sqrt{2}t)=$$

$$=\underbrace{e^{2\,t}\left(\frac{t}{8}\cos\sqrt{2}t+\frac{\sqrt{2}}{8}(t^2+2t)\sin\sqrt{2}t\right)}_{\mathrm{Re}\,\bar{z}(t)}+i\,\underbrace{e^{2\,t}\left(\frac{t}{8}\sin\sqrt{2}t-\frac{\sqrt{2}}{8}(t^2+2t)\cos\sqrt{2}t\right)}_{\mathrm{Im}\,\bar{z}(t)}.$$

По силата на идеята на метода трябва да приемем, че уравнение (1), имащо дясна страна, съдържаща $\sin\sqrt{2}t$, следва да има частно решение

(13) $\bar{x}(t)=\mathrm{Im}\,\bar{z}(t)=\left(\dfrac{t}{8}\sin\sqrt{2}t-\dfrac{\sqrt{2}}{8}(t^2+2t)\cos\sqrt{2}t\right)e^{2\,t}.$

Накрая заместваме $x_0(t)$ от (5) и $\bar{x}(t)$ от (13) в (2) и за общото решение на ЛНхОДУ (1) получаваме

$$x(t)=x_0(t)+\bar{x}(t)=\left(C_1\cos\sqrt{2}\,t+C_2\sin\sqrt{2}\,t+\frac{t}{8}\sin\sqrt{2}t-\frac{\sqrt{2}}{8}(t^2+2t)\cos\sqrt{2}t\right)e^{2t}=$$

$$=\left[\left(C_1-\frac{\sqrt{2}}{8}(t^2+2t)\right)\cos\sqrt{2}\,t+\left(C_2+\frac{t}{8}\right)\sin\sqrt{2}t\right]e^{2t}.$$

II. Същност на метода на Лагранж за намиране на частни решения на ЛНхОДУ

Нека илюстрираме идеята на метода за ЛНхОДУ от 2-ри ред:

(9.10) $\qquad x^{//}+a(t)x^{/}+b(t)x=d(t)$.

Ще считаме, че съответното на (9.10) хомогенно ОДУ $x^{//}+a(t)x^{/}+b(t)x=0$ има известно (*намерено*) вече общо решение

(9.11) $\qquad x(t)=C_1.x_1(t)+C_2.x_2(t)$,

където $x_1(t)$ и $x_2(t)$ са две линейно-независими частни решения на хомогенното на (9.10) уравнение, а C_1 и C_2 са две **<u>константи</u>**.

Идеята на метода на Лагранж се свежда до това константите C_1 и C_2 в (9.11) да се „заменят" с две диференцируеми функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$, след което **частното решение** на (9.10) да се представи (*т.е.да се търси*) във вида

(9.12) $\qquad \bar{x}(t)=C_1(t).x_1(t)+C_2(t).x_2(t)$.

Стои проблемът **да се определят функциите** $C_1(t)$ и $C_2(t)$. За тяхното намиране са необходими две уравнения (*диференциални или алгебрични*).

Първото от тях се получава от изискването двете функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$ да бъдат такива (*т.е. така избрани*), че първата производна $\bar{x}^{/}(t)$ на решението (9.11) да се получи (*т.е. изрази*) така, **сякаш** (*формално*) $C_1(t)$ и $C_2(t)$ са константи. Тъй като

(9.13) $\qquad \bar{x}^{/}(t)=\{C_1^{/}(t).x_1(t)+C_2^{/}(t).x_2(t)\} \quad + \quad C_1(t).x_1^{/}(t)+C_2(t).x_2^{/}(t)$,

то очевидно изпълнението на гореуказаното изискване се свежда до изпълнение на равенството

(9.14) $\qquad C_1^{/}(t).x_1(t)+C_2^{/}(t).x_2(t)=0$,

което е всъщност първото от необходимите ни две уравнения за определянето на $C_1(t)$ и $C_2(t)$. С отчитането на (9.14) уравнение (9.13) добива вида

(9.15) $\qquad \bar{x}^{/}(t)=C_1(t).x_1^{/}(t)+C_2(t).x_2^{/}(t)$.

* *Резултатът от диференцирането наистина е такъв, сякаш* $C_1(t)$ *и* $C_2(t)$ *са константи.*

С помощта на (9.15) се определя и втората производна

(9.16) $\qquad \bar{x}^{//}(t)=C_1^{/}(t).x_1^{/}(t)+C_1(t).x_1^{//}(t)+C_2^{/}(t).x_2^{/}(t)+C_2(t).x_2^{//}(t)$.

След заместване на $\boxed{\bar{x}(t)}$, $\boxed{\bar{x}^{/}(t)}$ и $\boxed{\bar{x}^{//}(t)}$ в (9.10) се получава

$$\{C_1^{/}(t).x_1^{/}(t)+C_1(t).x_1^{//}(t)+C_2^{/}(t).x_2^{/}(t)+C_2(t).x_2^{//}(t)\}+$$

$+a(t)\{C_1(t).x_1^{/}(t)+C_2(t).x_2^{/}(t)\}+b(t)\{C_1.x_1(t)+C_2.x_2(t)\}=d(t)$,

или още (*след подходящо групиране на събираемите*)

$$C_1(t).[x_1^{//}(t)+a(t).x_1^{/}(t)+b(t)x_1(t)]+C_2(t).[x_2^{//}(t)+a(t).x_2^{/}(t)+b(t)x_2(t)]+$$
$$+[C_1^{/}(t).x_1^{/}(t)+C_2^{/}(t).x_2^{/}(t)]=d(t).$$

Обаче $\boxed{x_1^{//}(t)+a(t).x_1^{/}(t)+b(t)x_1(t)=0}$ и $\boxed{x_2^{//}(t)+a(t).x_2^{/}(t)+b(t)x_2(t)=0}$, понеже $x_1(t)$ и $x_2(t)$ са две линейно-независими частни **решения на хомогенното** на (9.10) **уравнение**, с отчитането на който факт горното ДУ добива вида

(9.17) $\quad C_1^{/}(t).x_1^{/}(t)+C_2^{/}(t).x_2^{/}(t)=d(t)$.

И така двете уравнения (9.14) и (9.17) образуват следната система

(9.18) $\quad \left| \begin{array}{l} C_1^{/}(t).x_1(t)+C_2^{/}(t).x_2(t)=0 \\ C_1^{/}(t).x_1^{/}(t)+C_2^{/}(t).x_2^{/}(t)=d(t) \end{array} \right.$.

След решаване на системата (9.18) се определят $C_1^{/}(t)=f_1(t)$ и $C_2^{/}(t)=f_2(t)$, а след това всяко от получените две ОДУ с разделени променливи се решава, с което се намират самите $C_1(t)$ и $C_2(t)$. След определянето на $C_1(t)$ и $C_2(t)$ се намира и частното решение на ЛНхОДУ (9.10) във вида $\bar{x}(t)=C_1(t).x_1(t)+C_2(t).x_2(t)$.

Обобщението на метода на Лагранж за ЛНхОД уравнения от n-ти ред се извършва по аналогичен начин.

✸ **Задача** Да се реши уравнението

(1) $\quad t^2x^{//}-2x=\cos\ln t$.

Решение: общото решение на (1) има вида

(2) $\quad x(t)=x_0(t)+\bar{x}(t)$,

където:

☞ $x_0(t)$ - общо решение на хомогенното на (1) уравнение;

☞ $\bar{x}(t)$ - едно **частно решение** на нехомогенното уравнение (1).

А) Съответното на (1) хомогенно уравнение е

(3) $\quad t^2x^{//}-2x=0$.

Вижда се, че това е линейно хомогенно ДУ от втори ред с непостоянни коефициенти. В теорията на ДУ то се нарича уравнение на Ойлер. То може да бъде сведено до ЛХОДУ с постоянни коефициенти посредством полагането

(4) $\quad t=e^{\xi}$, $\quad$ т.е. $\quad \xi=\ln t$, $\quad dt=e^{\xi}d\xi$, откъдето

(5) $\quad \dfrac{d\xi}{dt}=e^{-\xi}$.

Нека изразим производните $x^{/}$ и $x^{//}$ посредством ξ:

☞ $x^{/}=\dfrac{dx}{dt}=\underbrace{\dfrac{dx}{d\xi}}_{x^{/}(\xi)}\underbrace{\dfrac{d\xi}{dt}}_{e^{-\xi}}=x^{/}(\xi)e^{-\xi}$;

☞ $x^{//}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)=\dfrac{d}{\underbrace{(e^{\xi}d\xi)}_{dt}}[x^{/}(\xi)e^{-\xi}]=e^{-\xi}\dfrac{d}{d\xi}[x^{/}(\xi)e^{-\xi}]=e^{-\xi}[x^{//}(\xi)e^{-\xi}+x^{/}(\xi)\dfrac{de^{-\xi}}{d\xi}]=$

$=e^{-\xi}[x^{//}(\xi)e^{-\xi}-x^{/}(\xi)e^{-\xi}]=e^{-2\xi}[x^{//}(\xi)-x^{/}(\xi)].$

Заместваме x и $x^{//}$ в (3), отчитайки че $t^2=(e^{\xi})^2=e^{2\xi}$, и получаваме уравнението

(6) $\quad(\underbrace{e^{2\xi}}_{t^2})e^{-2\xi}[x^{//}(\xi)-x^{/}(\xi)]-2x(\xi)=0$, или още

(7) $\quad x^{//}(\xi)-x^{/}(\xi)-2x(\xi)=0$.

Характеристичното уравнение

(8) $\quad\alpha^2-\alpha-2=0$

има корени $\alpha_{1,2}=-1,2$ и следователно общото решение на хомогенното уравнение (7) ще бъде

(9) $\quad x_0(\xi)=C_1e^{\alpha_1\xi}+C_2e^{\alpha_2\xi}=C_1e^{-\xi}+C_2e^{2\xi}$.

Ако се върнем на полагането (4) и възстановим „старата” променлива t, използвайки че $\xi=\ln t$, ще получим

(10) $\quad x_0(t)=C_1e^{-\ln t}+C_2e^{2\ln t}=C_1e^{\ln t^{-1}}+C_2e^{\ln t^2}=C_1t^{-1}+C_2t^2$.

Б) Частно решение на нехомогенното уравнение (1) ще търсим по метода на Лагранж. Индикация за това е факта, че (1) е ДУ е с непостоянни коефициенти. По метода на вариране на коефициентите частно решение на (1) ще търсим във вида

(11) $\quad\bar{x}(t)=C_1(t).t^{-1}+C_2(t).t^2$,

където $C_1(t)$ и $C_2(t)$ са две подлежащи на определяне функции.

Нека определим $\bar{x}^{/}(t)$ и $\bar{x}^{//}(t)$:

☞ $\quad\bar{x}^{/}(t)=C_1^{/}(t).t^{-1}-C_1(t).t^{-2}+C_2^{/}(t).t^2+2C_2(t).t=$

$=\{-C_1(t).t^{-2}+2C_2(t).t\}+\underbrace{\{C_1^{/}(t).t^{-1}+C_2^{/}(t).t^2\}}_{полагаме=0}$.

Ако положим

(12) $\quad\boxed{C_1^{/}(t).t^{-1}+C_2^{/}(t).t^2=0}$, то

(13) $\quad x^{/}(t)=-C_1(t).t^{-2}+2C_2(t).t$.

☞ $\quad\bar{x}^{//}(t)=-C_1^{/}(t).t^{-2}-(-2)C_1(t).t^{-3}+2C_2^{/}(t).t+2C_2(t)$, т.е.

(14) $\quad\bar{x}^{//}(t)=-C_1^{/}(t).t^{-2}+2C_1(t).t^{-3}+2C_2^{/}(t).t+2C_2(t)$.

Заместваме $x(t)$ и $\bar{x}^{//}(t)$ в (1), т.е. в $\boxed{t^2x^{//}-2x=\cos\ln\,t}$ и получаваме

$$t^2\{-C_1^{/}(t).t^{-2}+2C_1(t).t^{-3}+2C_2^{/}(t).t+2C_2(t)\}-2\{C_1(t).t^{-1}+C_2(t).t^2\}=\cos\ln\,t,$$

или още

$$-C_1^{/}(t)+2C_1(t).t^{-1}+2C_2^{/}(t).t^3+2C_2(t)t^2-2C_1(t).t^{-1}-2C_2(t).t^2=\cos\ln\,t,$$

откъдето след съкращения получаваме

(15) $\boxed{-C_1^{/}(t)+2C_2^{/}(t).t^3=\cos\ln\, t}$.

Комбинираме двете равенства (*диференциални уравнения*) (12) и (15) за неизвестните функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$ в система

(16) $$\left|\begin{array}{l} C_1^{/}(t).t^{-1}+C_2^{/}(t).t^2=0 \\ -C_1^{/}(t)+2C_2^{/}(t).t^3=\cos\ln\, t \end{array}\right. .$$

Решаваме тази нехомогенна система относно $C_1^{/}(t)$ и $C_2^{/}(t)$ с помощта на формулите на Крамер. За целта най-напред определяме детерминантите:

☞ $$\Delta(t)=\begin{vmatrix} t^{-1} & t^2 \\ -1 & 2t^3 \end{vmatrix}=2t^3t^{-1}-t^2(-1)=2t^2+t^2=3t^2\neq 0;$$

☞ $$\Delta_1(t)=\begin{vmatrix} 0 & t^2 \\ \cos\ln t & 2t^3 \end{vmatrix}=t^2\cos\ln t;$$

☞ $$\Delta_2(t)=\begin{vmatrix} t^{-1} & 0 \\ -1 & \cos\ln t \end{vmatrix}=-t^{-1}\cos\ln t=-\frac{\cos\ln t}{t}.$$

Тогава решенията на (16) са

(17^а) $$C_1^{/}(t)=\frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)}=\frac{t^2\cos\ln t}{3t^2}=\frac{\cos\ln t}{3};$$

(17^б) $$C_2^{/}(t)=\frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)}=-\frac{\cos\ln t}{t}\frac{1}{3t^2}=-\frac{\cos\ln t}{3t^3}.$$

За да определим функциите $C_1(t)$ и $C_2(t)$ остава да решим следните ОДУ с РП:

(18^а) $$dC_1(t)=\frac{\cos\ln t}{3}dt, \text{ и}$$

(18^б) $$dC_2(t)=-\frac{\cos\ln t}{3t^3}dt.$$

Интегрираме (18^а), като интеграционната константа в този неопределен интеграл приемаме да е равна на нула:

(19^а) $$C_1(t)=\frac{1}{3}\underbrace{\int\cos\ln t\, dt}_{I_1}.$$

Решаваме интеграла I_1, полагайки $x=\ln t$, т.е. $t=e^x$, $dt=e^x dx$,

$$I_1=\int\cos x\, e^x dx\equiv\int\cos x\, d(e^x)= \ \ldots \text{ по части } \ldots \ =\cos x\, e^x-$$
$$-\int e^x\, d(\cos x)=\cos x\, e^x+\int\sin x\, e^x dx=\cos x\, e^x+\int\sin x\, d(e^x)= \ \ldots \text{ по части } \ldots$$
$$\cos x\, e^x+\sin x\, e^x-\int e^x\, d(\sin x)=(\cos x+\sin x)\, e^x-\underbrace{\int\cos x\, e^x dx}_{I_1}.$$

И така получихме $I_1=(\cos x+\sin x)\, e^x-I_1$, т.е. $2I_1=(\cos x+\sin x)\, e^x$, откъдето

$$I_1=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)\, e^x.$$

След заместване на така намерената стойност на интеграла I_1 в (19[а]) получаваме

(20[а]) $C_1(t)=\frac{1}{3}I_1=\frac{1}{6}(\cos x+\sin\,x)\,e^x$.

А с отчитане на полагането $x=\ln t$ получаваме

(21[а]) $C_1(t)=\frac{1}{6}(\cos\ln t.+\sin\,\ln t)\,e^{\ln t}\equiv\frac{t}{6}(\cos\ln t.+\sin\,\ln t)$.

Интегрираме и (18[б]), като отново интеграционната константа в този интеграл приемаме равна на нула:

(19[б]) $C_2(t)=-\frac{1}{3}\underbrace{\int\frac{\cos\ln t}{t^3}dt}_{I_2}$.

И този интеграл I_2 решаваме, полагайки $x=\ln t$, т.е. $t=e^x$, $dt=e^x dx$,

$$I_2=\int\frac{\cos\ln t}{t^3}dt=\int\frac{\cos x}{e^{3x}}(e^x dx)=\int\cos x\,e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\underbrace{\int\cos x\,d(e^{-2x})}_{\text{по части}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cos x\,e^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}\,d(\cos x)=-\frac{1}{2}\cos x\,e^{-2x}-\frac{1}{2}\int e^{-2x}\sin x\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\cos x\,e^{-2x}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\int\sin x\,d(e^{-2x})=\quad\ldots\quad\text{по части}\quad\ldots\quad=$$

$$=-\frac{1}{2}\cos x\,e^{-2x}+\frac{1}{4}\sin\,x\,e^{-2x}-\frac{1}{4}\int e^{-2x}\,d(\sin x)=\frac{1}{4}\sin\,x\,e^{-2x}-\frac{1}{2}\cos x\,e^{-2x}-$$

$$-\frac{1}{4}\underbrace{\int e^{-2x}\,\cos x\,dx}_{I_2}=\frac{1}{4}(\sin\,x-2\cos x)\,e^{-2x}-\frac{1}{4}I_2.$$

И така получихме

$$I_2=\frac{1}{4}(\sin\,x-2\cos x)\,e^{-2x}-\frac{1}{4}I_2,\quad \text{т.е.}\quad \frac{5}{4}I_2=\frac{1}{4}(\sin\,x-2\cos x)\,e^{-2x},$$

откъдето

$$I_2=\frac{1}{5}(\sin\,x-2\cos x)\,e^{-2x}.$$

След заместване на така намерената стойност на интеграла I_2 в (19[б]) получаваме

(20[б]) $C_2(t)=-\frac{1}{3}I_2=-\frac{1}{3}.\frac{1}{5}(\sin\,x-2\cos x)\,e^{-2x}=-\frac{1}{15}(\sin\,x-2\cos x)\,e^{-2x}$.

С отчитане на полагането $x=\ln t$ получаваме

(21[б]) $C_2(t)=-\frac{1}{15}(\sin\ln t-2\cos\ln t)\,e^{-2\ln t}\equiv-\frac{1}{15t^2}(\sin\ln t-2\cos\ln t)$.

След намирането на функциите $C_1(t)$ и $C_2(t)$ частното решение (11) добива вида

$$\overline{x}(t)=C_1(t).t^{-1}+C_2(t).t^2=\frac{t}{6}(\cos\ln t.+\sin\,\ln t).t^{-1}-\frac{1}{15t^2}(\sin\ln t-2\cos\ln t).t^2=$$

$$=\frac{1}{6}(\cos \ln t.+\sin \ln t)-\frac{1}{15}(\sin \ln t-2\cos \ln t)=\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{15}\right)\cos \ln t+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{15}\right)\sin \ln t=$$

$=\frac{3}{10}\cos \ln t+\frac{1}{10}\sin \ln t=\frac{1}{10}(3\cos \ln t+\sin \ln t)$, т.е.

(22) $\bar{x}(t)=\frac{1}{10}(3\cos \ln t+\sin \ln t)$.

Накрая заместваме $x_0(t)$ от (10) и $\bar{x}(t)$ от (22) в (2) и за общото решение на (1) получаваме

(16) $x(t)=x_0(t)+\bar{x}(t)=C_1t^{-1}+C_2t^2+\frac{1}{10}(3\cos \ln t+\sin \ln t)$

Тема: Системи от ОДУ от първи ред. Системи от ОДУ от ред, по-висок от първи

Теоретичен минимум

10. Системи от ОДУ от първи ред

Общ (*нормален*) вид на система от две уравнения от първи ред за две неизвестни функции $x=x(t)$ и $y=y(t)$:

(10.1) $$\frac{dt}{P(t,x,y)}=\frac{dx}{Q(t,x,y)}=\frac{dy}{R(t,x,y)}.$$

За получаване на интегруеми комбинации могат с успех да се използват напр. някое от следните свойства на пропорциите:

(10.2) ако $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\Rightarrow$ $\frac{a}{b}=\frac{a+\alpha.c}{b+\alpha.d}$, и

(10.3) ако $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, то $\Rightarrow$ $\frac{a}{b}=\frac{a+\alpha.c+\beta.e}{b+\alpha.d+\beta.f}$,

където α или α,β - произволни константи.

11. Системи от ОДУ от ред, по-висок от първи

В подобни задачи намирането на интегруеми комбинации (*първи интеграли*) в някои случаи се улеснява значително, **ако** се окаже възможно двете страни на едно (*или повече*) от уравненията да се представят като пълен диференциал от някакви функции, което би позволило това (*тези*) уравнение(я) да се интегрира(т). С така намерените решения (*частни интеграли*) се замества в неинтегрираните (*до момента*) уравнения с цел тяхното „опростяване” и окончателно решаване.

✸ **Задача** (Стр. 18/ Зад. 243) Да се интегрира системата

(1) $$\frac{dt}{x+y}=\frac{dx}{t+y}=\frac{dy}{t+x}.$$

Решение: за получаване на интегруеми комбинации ще използваме свойството на пропорциите, изразено чрез формула (10.2) от теоретичната част.

Това свойство ще приложим двукратно, за да преобразуваме поотделно двете съотношения

(2^{а}) $\dfrac{dt}{x+y}=\dfrac{dx}{t+y}$ и (2^{б}) $\dfrac{dt}{x+y}=\dfrac{dy}{t+x}$.

И за двата случая избираме константата α да бъде $\alpha=-1$. Така получаваме

(3^{а}) $\dfrac{dt}{x+y}=\dfrac{dt-dx}{(x+y)-(t+y)}=\dfrac{d(t-x)}{(x-t)}=-\dfrac{d(x-t)}{(x-t)}$, и

(3^{б}) $\dfrac{dt}{x+y}=\dfrac{dt-dy}{(x+y)-(t+x)}=\dfrac{d(t-y)}{(y-t)}=-\dfrac{d(y-t)}{(y-t)}$.

Понеже левите страни на уравнения (3^{а}) и (3^{б}) са идентични, то десните им страни трябва да са равни, откъдето получаваме

(4) $\dfrac{d(x-t)}{(x-t)}=\dfrac{d(y-t)}{(y-t)}$.

Интегрирането на (4) ни дава пръв интеграл на системата

(5) $\ln(x-t)=\ln(y-t)+\ln C_1$,

откъдето след антилогаритмуване следва

(6) $(x-t)=C_1(y-t)$.

Още един пръв интеграл може да бъде намерен, ако приложим спрямо нормалното уравнение на системата (1) свойството на пропорциите, изразено чрез формула (10.3) от теоретичната част за случая $\alpha=\beta=1$:

(7) $\dfrac{dt}{x+y}=\dfrac{dx}{t+y}=\dfrac{dy}{t+x} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{dt}{x+y}=\dfrac{dt+dx+dy}{(x+y)+(t+y)+(t+x)}=$

$$=\frac{d(t+x+y)}{2(t+x+y)}=\frac{1}{2}\frac{d(t+x+y)}{t+x+y}.$$

Нека приравним дясната страна на (7) с дясната страна на някое от получените по-горе равенства (3^{а}) или (3^{б}), и напр. нека да е (3^{а}):

(8) $\dfrac{1}{2}\dfrac{d(t+x+y)}{t+x+y}=-\dfrac{d(x-t)}{(x-t)} \qquad \Big|\,.2$

След интегриране получаваме

(9) $\ln(x+y+t)=-2\ln|x-t|+\ln C_2$, т.е.

(10) $(x+y+t)=\dfrac{C_2}{|x-t|^2}$,

или още

(11) $(x+y+t)(x-t)^2=C_2$.

Намерените два първи интеграла (6) и (11) са независими. Общият интеграл е:

(12) $\left|\begin{array}{l}(x-t)=C_1(y-t)\\(x+y+t)(x-t)^2=C_2\end{array}\right.$.

✸ **Задача** (Стр. 18/ Зад. 247) Да се интегрира системата

(1) $x' = \dfrac{t}{y}, \qquad y' = -\dfrac{t}{x}.$

Решение: двете уравнения на системата могат да бъдат представени още във вида

(2[а]) $y.dx = t.dt$ и (2[б]) $-x.dy = t.dt.$

От сравняването на левите страни на тези две уравнения получаваме

(3) $y.dx = -x.dy$, или още

(4) $\dfrac{dx}{x} = -\dfrac{dy}{y},$

интегрирането на което дава

(5) $\ln x = -\ln y + \ln C_1,$

откъдето след антилогаритмуване получаваме следния пръв интеграл на системата

(6) $x = \dfrac{C_1}{y}.$

Търсим още един първи интеграл. За неговото получаване използваме (2[а]), в което заместваме функцията y от (6)

(7) $y.dx = t.dt \quad \Rightarrow \quad \dfrac{C_1}{x}.dx = t.dt.$

Интегрираме това УРП:

(8) $C_1 \ln x = \dfrac{t^2}{2} + C_2{}',$ или още

(9) $\ln x = \dfrac{t^2}{2C_1} + \dfrac{C_2{}'}{C_1} \equiv \ln e^{\frac{t^2}{2C_1}} + \ln \underbrace{e^{\frac{C_2{}'}{C_1}}}_{озн.\, C_2}.$

Така след антилогаритмуване получаваме

(10) $x = C_2.\exp\left(\dfrac{t^2}{2C_1}\right).$

Тогава от (6) и (10) следва още

(11) $y = \dfrac{C_1}{x} = \dfrac{C_1}{C_2}.\exp\left(-\dfrac{t^2}{2C_1}\right).$

✸ **Задача** (Стр. 22/ Зад. 308) Да се интегрира системата

(1) $\left| \begin{array}{l} x' + y'' = xy \\ x'' = x'y + xy' \end{array} \right..$

Решение: лесно се забелязва, че системата може да бъде записана още във вида

(2) $\left| \begin{array}{l} x' + y'' = xy \\ x'' = \dfrac{d(xy)}{dt} \end{array} \right..$

Ако заместим xy от първото уравнение в дясната страна на второто, ще имаме

(3) $$x'' = \frac{d(xy)}{dt} = \frac{d}{dt}(x' + y'') = x'' + y'''.$$

След съкращаване на x'' в двете страни на горното равенство получаваме

(4) $$y''' = 0, \ \Rightarrow \ y'' = C_1', \ \Rightarrow \ y' = C_1'.t + C_2, \ \Rightarrow \ y = \frac{C_1'}{2}.t^2 + C_2.t + C_3.$$

Ако (*за естетика на записа* ☺) положим $C_1 = 2C_1'$, то решението на системата (1) за неизвестната функция $y(t)$ добива вида

(5) $$\boxed{y = C_1.t^2 + C_2.t + C_3}.$$

За да определим и другата функция $x(t)$, използваме че $y(t)$ и $y'' = C_1' \equiv 2C_1$ са вече известни, следователно от първото уравнение на системата (1) ще имаме

(6) $$x' = xy - y'' = x.(C_1.t^2 + C_2.t + C_3) - 2C_1.$$

Очевидно това е линейно ОДУ от първи ред

(7) $$\frac{dx}{dt} = \underbrace{(C_1.t^2 + C_2.t + C_3)}_{A(t)}.x + \underbrace{(-2C_1)}_{B(t)},$$

общото решение на което се дава с израза

(8) $$x(t, C_4) = e^{\int A(t)\,dt}\left\{\int B(t).e^{-\int A(t)\,dt}dt + C_4\right\},$$

решаването на интегралите в който не представлява никакъв проблем, но е твърде обемисто, и затова ще бъде „спестено” и оставено за любознателния читател ☺.

*Забележка: интеграционните константи, чрез които се изразяват решенията (5) и (8) на системата (1) са 4 на брой, защото уравненията са две и неизвестните функции участват в тях с производните си до втори ред включително.

✸ **Задача** (Стр. 22/ Зад. 309) Да се интегрира системата

(1) $$\left| \begin{array}{l} xy' = y \\ y''(1-x) = x'y' \end{array} \right. .$$

Решение: нека диференцираме първото уравнение на системата. Така тя добива вида

(2) $$\left| \begin{array}{l} x'y' + xy'' = y' \\ y'' - xy'' = x'y' \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} y' - xy'' = x'y' \\ y'' - xy'' = x'y' \end{array} \right. .$$

При равни десни страни приравняваме левите страни на двете уравнения, от което следва

(3) $$y'' = y', \quad \text{т.е.} \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt}, \quad \text{или още} \quad dy' = dy,$$

интегрирането на което дава

(4) $$y' = y + C_1'.$$

Това УРП може да бъде интегрирано отново

(5) $$\frac{dy}{y+C_1^{/}}=dt\,,$$

решаването на което дава

(6) $$\ln\,(y+C_1^{/})=t+\ln C_2\equiv\ln e^t+\ln C_2=\ln\,(C_2e^t)\,,$$

след антилогаритмуването на което получаваме

(7) $$y+C_1^{/}=C_2e^t\,,$$ или още

(8) $$\boxed{y=C_1+C_2e^t},$$

където $C_1=-C_1^{/}$.

За да изразим в явен вид и другата неизвестна функция $x(t)$, явяваща се решение на системата, използваме първото уравнение от нея, а y и $y^{/}$ изразяваме от (8) и (4) съответно, и по-конкретно $y^{/}=y+C_1^{/}=y-C_1$. Така получаваме

$$x(t)=\frac{y}{y^{/}}=\frac{y}{y-C_1}=\frac{C_1+C_2e^t}{C_1+C_2e^t-C_1}=\frac{C_1+C_2e^t}{C_2e^t}=\frac{C_1}{C_2}e^{-t}+1,$$ т.е.

(9) $$\boxed{x(t)=\frac{C_1}{C_2}e^{-t}+1}.$$

✸ **Задача** (Стр. 22/ Зад. 310) Да се интегрира системата

(1) $$\left|\begin{array}{l} xy^{/}=t \\ y^{//}(x^2-1)+xx^{/}y^{/}=x \end{array}\right..$$

Решение: нека към двете страни на второто уравнение прибавим $xx^{/}y^{/}$, с което системата добива вида

(2) $$\left|\begin{array}{l} xy^{/}=t \\ y^{//}(x^2-1)+2xx^{/}y^{/}=x+xx^{/}y^{/} \end{array}\right.,$$

а ако в дясната страна на второто уравнение в (2) заместим $xy^{/}\to t$ съгласно първото уравнение, получаваме

(3) $$\left|\begin{array}{l} xy^{/}=t \\ y^{//}(x^2-1)+2xx^{/}y^{/}=x+t.x^{/} \end{array}\right..$$

Вече не е трудно да се забележи, че след тези „модификации” двете страни на второто уравнение се представят чрез пълни диференциали. Действително:

☞ $$y^{//}(x^2-1)+2xx^{/}y^{/}=\frac{d}{dt}[y^{/}(x^2-1)],$$ и

☞ $$x+t.x^{/}=\frac{d}{dt}(t.x).$$

Така второто уравнение може да бъде записано във вида

(4) $$d\,[y^{/}(x^2-1)]=d(t.x)\,,$$

интегрирането на което дава

(5) $$y^{/}(x^2-1)=t.x+C_1^{/}.$$

Преди да интегрираме (5) още веднъж, нека отбележим, че тъй като според първото уравнение на системата $t = xy^{/}$, то замествайки в (5) ще имаме

(6) $y^{/}(x^2-1) = (xy^{/}).x + C_1^{/}$, т.е. $y^{/}x^2 - y^{/} = x^2y^{/} + C_1^{/}$, откъдето

(7) $y^{/} = -C_1^{/}$, или още $\boxed{y^{/} = C_1}$, където $C_1 = -C_1^{/}$.

Сега интегрирането на (5), респективно (7), е елементарно

(8) $y = C_1.t + C_2$.

За намирането на другата неизвестна функция $x(t)$ използваме първото уравнение на (1) и представянето (7) за $y^{/}$:

(9) $x(t) = \dfrac{t}{y^{/}} = \dfrac{t}{C_1}$, т.е. $\boxed{C_1.x = t}$ - втори „пръв" интеграл на системата (1).

✸ **Задача** (Стр. 22/ Зад. 311) Да се интегрира системата

(1) $$\left| \begin{aligned} & yy^{//} = x^{//} - y^{/\,2} \\ & y^{//} = x^{//} + 2t \end{aligned} \right. .$$

Решение: лесно се вижда, че второто уравнение на системата, записано във вида $y^{//} - x^{//} = 2t$, може да бъде представено като интегруема комбинация (*пълен диференциал*)

(2) $$\frac{d}{dt}(y^{/} - x^{/}) = \frac{d}{dt}(t^2),$$

откъдето

(3) $d(y^{/} - x^{/}) = d(t^2)$,

интегрирането на което дава

(4) $y^{/} - x^{/} = t^2 + C_1$.

Ако представим (4) във вида

(5) $$\frac{d}{dt}(y - x) = t^2 + C_1$$

и го интегрираме като своеобразно УРП относно неизвестна функция $(y-x)$, получаваме

(6) $$y - x = \frac{t^3}{3} + C_1.t + C_2,$$

откъдето получаваме следния пръв интеграл на системата

(7) $$\boxed{y = x + \frac{t^3}{3} + C_1.t + C_2}.$$

За да получим още един пръв интеграл, използваме неизползваното досега първо уравнение на системата което, записано във вида

(8) $yy^{//} + y^{/\,2} = x^{//}$

представлява също интегруема комбинация, понеже може да се представи във вида

(9) $\frac{d}{dt}(yy^{/})=\frac{d}{dt}(x^{/})$, т.е. $d(yy^{/})=d(x^{/})$,

интегрирането на което дава

(10) $x^{/}=yy^{/}+C_3$, т.е. $\frac{dx}{dt}=y\frac{dy}{dt}+C_3 \quad \big| .dt$

(11) $dx=ydy+C_3dt \quad \big| \int$

откъдето

(12) $\boxed{x=\frac{y^2}{2}+C_3t+C_4}$.

Очевидно (12) представлява втория „пръв” интеграл на системата (1).

Тема: ОДУ от ред, по-висок от първи

Теоретичен минимум

12. ОДУ от ред, по-висок от първи

Общ вид:

(12.1) $F(t,x,x^{(1)},x^{(2)},....,x^{(n)})=0$,

„Нормален” вид:

(12.2) $x^{(n)}=f(t,x,x^{(1)},x^{(2)},....,x^{(n-1)})$.

За ОДУ от по-висок от първи ред е в сила следното твърдение

Т: Всяко ОДУ от n-ти ред, **представимо в нормален вид**, може да бъде сведено към еквивалентна на него система от n на брой ОДУ от първи ред (*представими също в нормален вид*).

Илюстриране на подобна възможност: въвеждаме n на брой функции $x_i(t)$ с полаганията $x_1\equiv x(t)$, $x_2\equiv x^{(1)}(t)$, ... , $x_n\equiv x^{(n-1)}(t)$. Тогава следва представянето (системата)

$$(12.3)\qquad \left|\begin{array}{l} x_1^{/}=x_2 \\ x_2^{/}=x_3 \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1}^{/}=x_n \\ x_n^{/}=F(t,x,x_1,x_2,....,x_n) \end{array}\right. ,$$

с което илюстрирахме точно това, което се твърди в **Т** .

По-интересни частни случаи на ОДУ от ред, по-висок от първи

12.1 Уравнение от вида $\boxed{x^{(n)}=f(t)}$, т.е. в дясната му страна не присъстват неизвестната функция $x(t)$ и нейните производни. Очевидно това е УРП и то се решава посредством n последователни „директни” квадратури (*интегрирания*).

12.2 Уравнение от вида

(12.2.1) $F(t,x^{(k)},x^{(k+1)},....,x^{(n)})=0$ за $0<k<n$,

т.е. в дясната страна липсват производните на функцията $x(t)$ до ред $(k-1)$-ви вкл. Редът на такова ДУ се понижава с „k” единици посредством полагането $u(t)=x^{(k)}(t)$, откъдето следват: $x^{(k+1)}(t)=u^{(1)}(t)$, ….. , $x^{(n)}(t)=u^{(n-k)}(t)$. След заместването на тези производни в изходното ДУ, то се „превръща” в уравнение от $(n-k)$-ти ред относно новата функция $u(t)$

$$F(t,u,u^{(1)},u^{(2)},....,u^{(n-k)})=0 \text{ за } 0<k<n.$$

Намира се (*ако това е възможно*) неговото общо решение $u(t)=u(t,C_1,C_2,..C_{n-k})$, и след връщане към полагането $u(t)=x^{(k)}(t)$ се получава ДУ от k-ти ред

$$x^{(k)}(t)=u(t,C_1,C_2,..C_{n-k}),$$

което продължава да се решава (*чрез k-квадратури*) като уравнение от първия тип.

12.3 Уравнение от вида

$\boxed{F(x,x^{(1)},x^{(2)},....,x^{(n)})=0}$, т.е. **липсва аргументът** t.

Редът на такова уравнение се понижава с единица, ако се въведе нова неизвестна функция с **аргумент** x чрез полагането $u(x)=x^{/}$. Определят се последователно производните:

- ☞ $x^{(1)}=u(x)$;
- ☞ $x^{(2)}(t)=u^{/}u$;
- ☞ $x^{(3)}(t)=u^2u^{//}+(u^{/})^2u$;
- ……………………………
- ☞ $x^{(n)}(t)=g(u,u^{(1)},u^{(2)},....,u^{(n-1)})$.

След заместване на всички производни в изходното ДУ същото се трансформира в уравнение от ред $(n-1)$-ви относно „новата” функция $u(x)$: $F(x,u,u^{(1)},....,u^{(n-1)})=0$. Ако то може да бъде решено, и неговото общо решение е $u\,(x)=u\,(x,C_1,C_2,..C_{n-1})$, то след „връщане” към полагането $u(x)=x^{/}$ се получава ДУ с разделени променливи $x^{/}=u\,(x,C_1,C_2,..C_{n-1})$, след интегрирането на което получаваме окончателно крайното решение: $x\,(t)=x\,(t,C_1,C_2,..C_{n-1},C_n^*)$.

12.4 Уравнения от вида

$F(t,x,x^{(1)},x^{(2)},....,x^{(n)})=0$, където $F=F(t,x,x^{(1)},x^{(2)},....,x^{(n)})$ е **хомогенна функция** от **степен** k относно променливите си $x,x^{(1)},x^{(2)},....,x^{(n)}$, т.е. функция, за която $F(t,\alpha\,x,\alpha\,x^{(1)},\alpha\,x^{(2)},....,\alpha\,x^{(n)})=\alpha^kF(t,x,x^{(1)},x^{(2)},....,x^{(n)})$.

Редът на всяко едно такова уравнение може да бъде понижен с единица чрез полагането $\boxed{x^{/}(t)=x(t).u(t)}$. Всички производни от ред n-ти $(n=0,1,2,...)$ се изразяват (*без изключение*) във вида $x^{(n)}=x.g_n(u,u^{(1)},.....,u^{(n-1)})$ и след заместването им се оказва, че при $x\neq 0$ функцията $u(t)$ също удовлетворява ДУ от вида $F(t,u,u^{(1)},u^{(2)},....,u^{(n-1)})=0$, което е ДУ от $(n-1)$-ви ред. Ако неговото решение е $u\,(t)=u\,(t,C_1,C_2,...C_{n-1})$, то от полагането $x^{/}(t)=x(t).u(t)$ се получава ДУ с разделени променливи за определянето на $x(t)$

$$\frac{dx}{x}=u\,(t,C_1,C_2,...C_{n-1})\,dt\,,$$

което се интегрира елементарно

$$\ln x(t)=\int u\,(t,C_1,C_2,...C_{n-1})\,dt+\ln C_n^{*}, \text{ т.е. } x(t)=C_n^{*}.\,e^{\int u\,(t,C_1,C_2,...C_{n-1})\,dt}.$$

12.5 Уравнения от вида

$F(t,x,x^{(1)},x^{(2)},....,x^{(n)})=0$, където функцията F може да се представи като **пълна производна** по t от някаква друга функция, т.е.

$$\boxed{F(t,x,x^{(1)},x^{(2)},....,x^{(n)})=\frac{d}{dt}\Phi(t,x,x^{(1)},x^{(2)},....,x^{(n-1)})}.$$

В такъв случай уравнението се свежда до $\dfrac{d}{dt}\Phi(t,x,x^{(1)},x^{(2)},....,x^{(n-1)})=0$, откъдето следва, че функцията $\Phi(t,x,x^{(1)},x^{(2)},....,x^{(n-1)})=C$ е пръв интеграл на изходното уравнение.

✸ **Задача** (Стр. 20/ Зад. 272) Да се интегрира уравнението

(1) $\quad 8x^{//}+9x^{/\,4}=0$

Решение: очевидно уравнението е от вида (12.3), т.е. **липсва аргументът** t. Както е известно редът на такова уравнение се понижава с единица, ако се въведе нова неизвестна функция с аргумент x чрез полагането $u(x)=x^{/}$. Определяме последователно производните:

(2) $\quad x^{(1)}=u(x)$, и $\quad x^{(2)}(t)=u^{/}u$.

Заместваме производните в (1)

(3) $\quad 8uu^{/}+9u^{4}=0$, т.е.

(4) $\quad u\,(8u^{/}+9u^{3})=0$,

откъдето произтичат две уравнения (възможности):

А) $u=0$, т.е. $x^{/}=0$, $\Rightarrow$ (5) $x(t)=C$.

Б) $8u^{/}+9u^{3}=0$, т.е. $\dfrac{du}{dx}=-\dfrac{9}{8}u^{3}$,

(5) $\quad u^{-3}du=-\dfrac{9}{8}dx \qquad \Big|\int$

(6) $\quad -\dfrac{1}{2}u^{-2}=-\dfrac{9}{8}x+C_1^{/} \qquad \Big|.(-2)$

$$\frac{1}{u^{2}}=\frac{9}{4}x+C_1^{//};$$

(7) $\quad u=\left(\dfrac{9}{4}x+C_1^{//}\right)^{-\frac{1}{2}}$, т.е. $\quad \dfrac{dx}{dt}=\left(\dfrac{9}{4}x+C_1^{//}\right)^{-\frac{1}{2}}$,

$$\left(\frac{9}{4}x + C_1^{//}\right)^{\frac{1}{2}} dx = dt\,;$$

$$\frac{3}{2}\left(x + \underbrace{\frac{4}{9}C_1^{//}}_{C_1}\right)^{\frac{1}{2}} dx = dt\,, \quad \text{т.е.} \quad (x + C_1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}dt \;\Big|\; \int$$

$$\frac{1}{(1/2+1)}(x + C_1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}t + C_2^{/}\,;$$

$$\frac{2}{3}(x + C_1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}t + C_2^{/} \qquad \Big|\cdot\frac{3}{2}$$

$$(x + C_1)^{\frac{3}{2}} = t + C_2\,,$$

откъдето след повдигане в степен $2/3$ получаваме

(8) $\boxed{x = (t + C_2)^{\frac{2}{3}} - C_1}$.

✸ **Задача** Да се интегрира уравнението

(1) $2t\,x^{/}x^{//} = 2x^{/\,2} + t^3$.

Решение: очевидно уравнението е от вида

(2) $F(t, x^{/}, x^{//}) = 0$,

т.е. липсва неизвестната функция $x(t)$. Редът на такова ДУ се понижава с единица посредством полагането

(3) $x^{/}(t) = u(t)$,

откъдето изразяваме $x^{//} = u^{/}$, и след заместване в (1) получаваме ДУ от първи ред относно $u(t)$

(4) $2t\,u\,u^{/} = 2u^2 + t^3$.

Ако представим ДУ (4) в нормален вид

(5) $$u^{/} = \underbrace{\left(\frac{1}{t}\right)}_{A(t)} u + \underbrace{\left(\frac{t^2}{2}\right)}_{B(t)} u^{-1}$$

се вижда, че то е уравнение на Бернули с $n = -1$. За неговото решаване правим стандартното полагане

(6) $y = u^{1-n} = u^{1-(-1)} \equiv u^2$.

С това полагане уравнението се трансформира в линейното уравнение

(7) $$y^{/} = \underbrace{(1-n)A(t)}_{A^*(t)}\,y + \underbrace{(1-n)B(t)}_{B^*(t)} \equiv \left(\frac{2}{t}\right) y + t^2,$$

решението на което е

(8) $$y(t,C_1)=e^{\int A^*(t)dt}\left(\int B^*(t)e^{-\int A^*(t)dt}dt+C_1\right)=$$
$$=e^{2\int\frac{dt}{t}}\left(\int t^2 e^{-2\int\frac{dt}{t}}dt+C_1\right)=e^{2\ln t}\left(\int t^2 e^{-2\ln t}dt+C_1\right)=$$
$$=t^2(\int t^2 t^{-2}dt+C_1)=t^2(t+C_1).$$

Ако вземем под внимание полагането (6), т.е. $u=\sqrt{y}$, получаваме

(9) $$u(t,C_1)=t\sqrt{t+C_1}.$$

Остана да отчетем в (9) и полагането (3), с което достигаме до следното ДУ

(10) $$x'=t\sqrt{t+C_1},\qquad \text{т.е.}\qquad dx=t\sqrt{t+C_1}\,dt.$$

За да го интегрираме, правим ново полагане

(11) $$t+C_1=z^2,\ \text{т.е.}\quad t=z^2-C_1\quad \text{и}\quad dt=2z\,dz,$$

с което (10) добива вида

(12) $$dx=(z^2-C_1).z.2z\,dz=2(z^4-C_1z^2)dz,$$

от интегрирането на което получаваме

(13) $$x(t,C_1,C_2)=2\frac{z^5}{5}-2C_1\frac{z^3}{3}+C_2=\frac{2}{5}(t+C_1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}C_1(t+C_1)^{\frac{3}{2}}+C_2.$$

✸ **Задача** (Стр. 20/ Зад. 275) Да се интегрира уравнението

(1) $$t.x^{(4)}+5x^{(3)}-120=0$$

Решение: очевидно уравнението е от вида (12.2)

$$F(t,x^{(k)},x^{(k+1)},....,x^{(n)})=0 \text{ за } 0<k<n,$$

т.е. в лявата страна липсват производните на функцията $x(t)$ до ред ($k-1$)-ви вкл. Редът на такова ДУ се понижава с „k” единици посредством полагането $u(t)=x^{(k)}(t)$, откъдето следват: $x^{(k+1)}(t)=u^{(1)}(t)$, ….. , $x^{(n)}(t)=u^{(n-k)}(t)$. В нашия случай $k=3,\ n=4$, а полагането е

(2) $$u(t)=x^{(3)}(t).$$

Очевидно

(3) $$x^{(4)}=\frac{d}{dt}[x^{(4)}]\equiv u'(t).$$

Така уравнението (1) добива вида

(4) $$t.u'+5u-120=0\qquad \Big|:t,\quad t\neq 0$$

(5) $$u'=\underbrace{\left(-\frac{5}{t}\right)}_{A(t)}u+\underbrace{\left(\frac{120}{t}\right)}_{B(t)}=0.$$

Получихме линейно ОДУ от първи ред, и неговото общо решение е

(6) $$u(t,C_1)=e^{\int\left(-\frac{5}{t}\right)dt}\left(\int\frac{120}{t}e^{-\int\left(-\frac{5}{t}\right)dt}dt+C_1\right)=$$

$$=e^{-5\ln t}\left\{\int\frac{120}{t}e^{5\ln t}dt+C_1\right\}=\frac{1}{t^5}\left\{\int\frac{120}{t}t^5dt+C_1\right\}=\frac{1}{t^5}\left\{120\int t^4dt+C_1\right\}=$$

$$=\frac{1}{t^5}\left\{120\frac{1}{5}t^5+C_1\right\}=\frac{1}{t^5}(24t^5+C_1).$$ И така

(7) $\quad u(t,C_1)=\frac{C_1}{t^5}+24.$

Ако вземем под внимание полагането (2), от (7) получаваме следното ОДУ с РП

(8) $\quad x^{(3)}(t)=\frac{C_1}{t^5}+24,$

което се решава елементарно с три последователни квадратури:

☞ $\quad x^{(2)}(t)=C_1\int t^{-5}dt+24t+C_2=-\frac{C_1}{4}t^{-4}+24t+C_2;$

☞ $\quad x^{(1)}(t)=-\frac{C_1}{4}\int t^{-4}dt+\frac{24}{2}t^2+C_2t+C_3=-\frac{C_1}{4(-3)}t^{-3}+12t^2+C_2t+C_3;$

☞ $\quad x(t)=\frac{C_1}{12}\int t^{-3}dt+\frac{12}{3}t^3+\frac{C_2}{2}t^2+C_3.t+C_4=\frac{C_1}{12(-2)}t^{-2}+4t^3+\frac{C_2}{2}t^2+C_3.t+C_4.$

И така

$$x(t)=\underbrace{-\frac{C_1}{24}}_{C_1^*}t^{-2}+4t^3+\underbrace{\frac{C_2}{2}}_{C_2^*}t^2+\underbrace{C_3}_{C_3^*}.t+\underbrace{C_4}_{C_4^*},\qquad \text{т.е.}$$

(9) $\quad x(t)=4t^3+C_1^*t^{-2}+C_2^*t^2+C_3^*.t+C_4^*.$

Задача: Да се реши уравнението:

(1) $\quad 2x\,x^{//}=x^2+x^{/\,2}.$

Решение: уравнението е от тип (12.3), т.е. уравнение, в което не присъства (явно) аргумента t. Както е известно редът на подобни уравнения се понижава с единица чрез полагането

(2) $\quad x^{/}=u(x)\quad$ (*т.е. въвежда се функция с аргумент x, понеже* t *отсъства*)

Изразяваме втората производна

(3) $\quad x^{//}=\frac{d}{dt}u(x)=\underbrace{\frac{du(x)}{dx}}_{u^{/}}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{u}=u\,u^{/},$

След което заместваме (2) и (3) в (1)

(4) $\quad 2xu\,u^{/}=x^2+u^2 \qquad \Big| :2u.x \qquad$ при $x\neq 0, u\neq 0$

(5) $\quad \frac{du}{dx}=\underbrace{\left(\frac{1}{2x}\right)}_{A(x)}u+\underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)}_{B(x)}u^{-1}.$

В този си вид уравнение (5) е уравнение на Бернули с $n=-1$ относно неизвестната функция $u=u(x)$. Както е известно то се решава с полагането

(6) $\quad y=u^{1-n}\equiv u^{1-(-1)}=u^2.$

След това полагане уравнението на Бернули

(7) $$\frac{du}{dx} = A(x)\,u + B(x)\,u^n$$

преминава в уравнението

(8) $$\frac{dy}{dx} = A^*(x).y + B^*(x),$$

което е линейно ОДУ от първи ред с коефициенти

(9[а]) $$A^*(x) = (1-n)A(x) = (1-(-1))\frac{1}{2x} = 2\frac{1}{2x} = \frac{1}{x},$$ и

(9[б]) $$B^*(x) = (1-n)B(x) = (1-(-1))\frac{x}{2} = 2\frac{x}{2} = x.$$

И така, решаваме линейното уравнение

(10) $$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x}\right)y + x.$$

Неговото общо решение е

$$y(x,C) = e^{\int\left(\frac{1}{x}\right)dx}\left(\int x e^{-\int\left(\frac{1}{x}\right)dx}dx + C\right) = e^{\ln x}\left(\int x e^{-\ln x}dx + C\right) =$$

$$= x\left(\int x x^{-1}dx + C\right) = x\left(\int dx + C\right) = x(x+C) = x^2 + Cx.$$

И така:

(11) $$y(x,C) = x^2 + Cx.$$

Връщаме се „назад” към направените дотук две полагания. Според предпоследното: $y = u^2$, т.е. $u = \pm\sqrt{y}$, или

(12) $$u(x,C) = \pm\sqrt{x^2 + Cx}.$$

А според първото полагане: $u(x) = x'$, т.е.

(13) $$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{x^2 + Cx},$$

което е ОДУ с РП

(14) $$\frac{dx}{\sqrt{x^2 + Cx}} = \pm\, dt \qquad \Big|\int$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 + Cx}} = \pm\int dt + C_1.$$

След интегрирането му получаваме

(15) $$\ln\left|2x + C + 2\sqrt{x^2 + Cx}\right| = \pm\, t + C_1.$$

С непосредствена проверка в (1) се установява, че и $x = 0$ е решение („изпуснато” до момента).

✸ **Задача** (Стр. 20 / Зад. 271) Да се интегрира уравнението

(1) $$(t^2 - 1).x'' + 2t\,x' = 0.$$

Решение: уравнението е от вида

(2) $F(t,x',x'')=0$,

т.е. липсва неизвестната функция. Редът на такова ДУ се понижава с единица посредством полагането

(3) $u=x'$, следователно (4) $x''=u'$.

След това полагане уравнение (1) се свежда до ДУ от първи ред, което решено относно производната u' има вида

(4) $u'=-\dfrac{2t}{(t^2-1)}u$, или още $\dfrac{du}{u}=-\dfrac{2t}{(t^2-1)}dt \quad \Big| \int$

$$\ln u=-2.\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2-1)}{(t^2-1)}+\ln C_1=-\ln(t^2-1)+\ln C_1;$$

$\ln u+\ln(t^2-1)=\ln C_1$, т.е.

(5) $u(t^2-1)=C_1$

Ако отчетем полагането (3)

(6) $dx=\dfrac{C_1}{(t^2-1)}dt$, т.е.

(7) $x(t,C_1,C_{2)}=C_1\displaystyle\int\frac{dt}{(t^2-1)}+C_2=C_1\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C_2$.

✸ **Задача** (Стр. 20 / Зад. 280) Да се интегрира уравнението

(1) $x(1-\ln x)x''+(1+\ln x)x'^{\,2}=0$.

Решение: уравнението е от вида

(2) $F(x,x',x'')=0$,

т.е. липсва аргумента t. Редът на такова ДУ се понижава с единица посредством въвеждането на функция с аргумент **x**

(3) $x'=u(x)$, следователно

(4) $x''=\underbrace{\dfrac{du}{dx}}_{u'}\underbrace{\dfrac{dx}{dt}}_{u}=u.u'$.

След това полагане уравнение (1) се свежда до ДУ от първи ред,

(4) $x(1-\ln x)u.\dfrac{du}{dx}=-(1+\ln x)u^2 \qquad \Big| :u\neq 0$

което решено относно производната u' има вида

(5) $\dfrac{du}{dx}=-\dfrac{(1+\ln x)}{(1-\ln x)x}u$

или още $\dfrac{du}{u}=-\dfrac{(1+\ln x)}{(1-\ln x)x}dx \qquad \Big| \int$

$$\ln u=-\int\frac{(1+\ln x)}{(1-\ln x)}d(\ln x)+\ln C_1=\int\frac{(2+\ln x-1)}{(\ln x-1)}d(\ln x-1)+\ln C_1=$$

$$=2\int\frac{d(\ln x-1)}{(\ln x-1)}+\int\frac{\ln x-1}{(\ln x-1)}d(\ln x)+\ln C_1=$$

$= 2\ln(\ln x - 1) + \ln x + \ln C_1 = \ln(\ln x - 1)^2 + \ln x + \ln C_1$, следователно

(6) $\quad u(x, C_1) = C_1\, x\, (\ln x - 1)^2$.

Ако отчетем полагането (3)

(7) $\quad \dfrac{dx}{dt} = C_1\, x\, (\ln x - 1)^2, \qquad$ т.е. $\qquad \dfrac{dx}{x(\ln x - 1)^2} = C_1\, dt \qquad \Big|\int$

$\displaystyle\int \frac{d(\ln x)}{(\ln x - 1)^2} = C_1\, t + C_2, \qquad$ т.е. $\qquad \displaystyle\int (\ln x - 1)^{-2} d(\ln x - 1) = C_1\, t + C_2,$

$\dfrac{1}{(-1)}(\ln x - 1)^{-1} = C_1\, t + C_2, \qquad$ т.е. $\qquad -\dfrac{1}{\ln x - 1} = C_1\, t + C_2;$

$\ln x - 1 = -\dfrac{1}{C_1\, t + C_2}, \qquad \ln x = 1 - \dfrac{1}{C_1\, t + C_2} = \dfrac{C_1\, t + C_2 - 1}{C_1\, t + C_2};$

(8) $\quad x(t, C_1, C_2) = \exp\left(\dfrac{C_1\, t + C_2 - 1}{C_1\, t + C_2}\right).$

Понеже в (4) делихме с $u(x) \equiv x'$, приемайки $u \neq 0$, то очевидно сме пропуснали решението

(9) $\quad x' = 0, \qquad$ т.е. $\qquad x = C$.

Задача. Да се реши уравнението:

(1) $\quad t\, x\, x'' - x'^2 t = x\, x'$.

Решение: уравнението е ОДУ от втори ред

(2) $\quad F(t, x, x', x'') = 0$.

Нека видим дали F не е хомогенна функция от някаква степен, т.е. дали уравнение от типа

(3) $\quad F(t, \alpha x, \alpha x', \alpha x'') = \alpha^s F(t, x, x', x'')$

допуска нетривиално решение относно s (*ако подобно уравнение има изобщо смисъл за дадената функция* F, *разбира се*). В нашия случай уравнението е

(4) $\quad t\,(\alpha x)(\alpha x'') - (\alpha x')^2 t - (\alpha x)(\alpha x') = \alpha^s \{t\, x\, x'' - x'^2 t - x\, x'\}$.

Лесно се вижда, че (4) е изпълнено тъждествено за $s = 2$, с което всъщност установихме, че уравнението (1) е от типа (12.4), т.е. уравнение с хомогенна функция F от типа (2). Редът на всяко едно такова уравнение може да бъде понижен с единица чрез полагането

(5) $\quad x'(t) = x(t).u(t)$,

чрез което уравнение (1) се свежда до уравнение за новата функция $u(t)$. Действително

(6) $\quad x'' = \underbrace{x'}_{\text{от } (5)} .u + x.u' = x.u^2 + x.u' = x.(u^2 + u')$.

Заместваме (5) и (6) в (1)

(7) $\quad t\, x\{x.(u^2 + u')\} - (x.u)^2 t = x\,(x.u)$, т.е.

$\quad t\, x^2 u^2 + t\, x^2 u' - t\, x^2.u^2 = x^2\, u;$

$x^2(tu' - u) = 0 \qquad \Big| : x^2, \quad x \neq 0$

(8) $\quad tu' - u = 0$, т.е. $\dfrac{du}{u} = \dfrac{dt}{t}$,

(9) $\quad \ln u = \ln t + \ln C_1$, откъдето

(10) $\quad u(t, C_1) = C_1.t$.

С така намереното решение на (8) се връщаме на полагането (5), откъдето

(11) $\quad \dfrac{dx}{dt} = x.u(t, C_1) = x.C_1.t$, или още $\dfrac{dx}{x} = C_1.t\, dt$,

решението на което е

(12) $\quad \ln x = \dfrac{C_1}{2} t^2 + \ln C_2 = \ln[C_2 e^{\frac{C_1}{2} t^2}]$.

След антилогаритмуване получаваме

(13) $\quad x(t, C_1, C_2) = C_2 e^{\frac{C_1}{2} t^2}$.

Понеже при направените преобразования делихме с x^2, като приехме $x \neq 0$, то следва да проверим дали $x = 0$ не е „изпуснато” решение. С непосредствена проверка в (1) се установява, че $x = 0$ е решение. Обаче това решение не е „изпуснато”, защото то се получава от общото решение (13) за $C_2 = 0$.

Задача. Да се реши уравнението

(1) $\quad x x'' = x'^2 + 15x^2\sqrt{t}$

Решение: и това уравнение е ОДУ от втори ред

(2) $\quad F(t, x, x', x'') = 0$,

имащо хомогенна функция от степен $s = 2$, понеже уравнението от типа

(3) $\quad F(t, \alpha x, \alpha x', \alpha x'') = \alpha^s F(t, x, x', x'')$,

което в нашия случай е

(4) $\quad (\alpha x)(\alpha x'') - (\alpha x')^2 t - 15(\alpha x)^2\sqrt{t} = \alpha^s\{x x'' - x'^2 - 15x^2\sqrt{t}\}$

е изпълнено тъждествено за $s = 2$. Редът на всяко едно такова уравнение може да бъде понижен с единица чрез полагането

(5) $\quad x' = x.u(t)$,

чрез което уравнение (1) се свежда до уравнение за новата функция $u(t)$. Действително

(6) $\quad x'' = \underbrace{x'}_{от\ (5)}.u + x.u' = x.u^2 + x.u' = x.(u^2 + u')$.

Заместваме (5) и (6) в (1)

(7) $\quad x x.(u^2 + u') - (x.u)^2 - 15x^2\sqrt{t} = 0$, или още

(8) $\quad x^2(u' - 15\sqrt{t}) = 0 \qquad \Big| : x^2, \quad x \neq 0$

(9) $\quad u' - 15\sqrt{t} = 0$, т.е. $\dfrac{du}{dt} = 15.t^{\frac{1}{2}} \quad \Big| \int$

(10) $\quad u(t) = 15\int t^{\frac{1}{2}}\, dt + C_1 = \dfrac{15}{(1/2+1)} t^{\frac{3}{2}} + C_1 = 10 t^{\frac{3}{2}} + C_1.$

Връщаме се на полагането (5)

(11) $\quad \dfrac{dx}{dt} = x.u(t) = x\left(10 t^{\frac{3}{2}} + C_1\right), \quad$ т.е. $\quad \dfrac{dx}{x} = \left(10 t^{\frac{3}{2}} + C_1\right) dt \qquad \Big| \int$

(12) $\quad \ln x = \int \left(10 t^{\frac{3}{2}} + C_1\right) dt + C_2 = 10\int t^{\frac{3}{2}}\, dt + C_1.t + C_2 =$

$$= \frac{10}{(3/2+1)} t^{\frac{5}{2}} + C_1.t + C_2 = \frac{10}{(5/2)} t^{\frac{5}{2}} + C_1.t + C_2 = 4\, t^{\frac{5}{2}} + C_1.t + C_2,$$

откъдето след антилогаритмуване получаваме общото решение на (1)

(13) $\quad x(t, C_1, C_2) = \exp\left(4\, t^{\frac{5}{2}} + C_1.t + C_2\right).$

Понеже при направените преобразования делихме с x^2, като приехме $x \neq 0$, то следва да проверим дали $x = 0$ не е „изпуснато" решение. С непосредствена проверка в (1) се установява, че $x = 0$ е решение. А съдейки по (13) това решение наистина е „изпуснато", защото то не се получава за никои стойности на интеграционните константи C_1 и C_2. Ето защо общото решение следва освен (13) да включва и $x = 0$.

Забележка: Цитираните в настоящото ръководство задачи (Стр. *xxx*, Зад. *yyy*) визират „**Сборник задачи по математични методи на физиката физика**", с автори **Кръстю Иванов**, **Вълю Великов**, Пловдивско университетско издание, **2000 г**.

Април 2010 г. Гл. ас. Петко Митев