ОБИКНОВЕНИ ЛИНЕЙНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ОТ „n“-ТИ РЕД

Това са уравнения от вида

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-2}(x)y''+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x) \qquad (1)$$

Ако $f(x)=0$ уравнението се нарича **хомогенно**, ако $f(x)\neq 0$ е **нехомогенно**.

Общият интеграл на хомогенното уравнение се дава с формулата

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n\ , \qquad (2)$$

където $y_1,y_2,\cdots,y_n$ са **линейно независими частни интеграли**, $C_1,C_2,\cdots,C_n$ са константи.

Ако всички функции $a_1(x)=a_1=const, a_2(x)=a_2=const,\cdots,a_n(x)=a_n=const$ то уравнението се нарича **линейно диференциално уравнение с постоянни коефициенти**.

Характеристично уравнение се нарича съответното на (1) алгебрично уравнение от вида

$$r^n+a_1r^{n-1}+\cdots+a_{n-1}r+a_nr=0\ , \qquad (3)$$

което има точно „n” на брой корена – те могат да са различни, кратни, реални или комплексни.

- Ако всички корени са различни и реални $r_1\neq r_2\neq\cdots\neq r_n$, общото решение на хомогенното уравнение има вида:

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}+\cdots+C_ne^{r_nx} \qquad (4)$$

- Ако имаме реален корен с кратност *s* (r_i с кратност *s*) той дава следните членове в решението:

$$P_{s-1}(x)e^{r_ix}=\left(C_{i+1}+C_{i+2}x+\cdots+C_{i+s-1}x^{s-1}\right)e^{r_ix} \qquad (5)$$

- Ако имаме двойка комплексно-спрегнати корени $r_j=a+ib$ и $r_{j+1}=a-ib$ те дават следните членове в решението:

$$C_je^{r_jx}+C_{j+1}e^{r_{j+1}x}=e^{ax}\left(A\cos bx+B\sin bx\right) \qquad (6)$$

- Ако имаме двойка комплексно-спрегнати корени $r_j=a+ib$ и $r_{j+1}=a-ib$ с кратност s те дават следните членове в решението:

$$e^{ax}\left[P_{s-1}(x)\cos bx+Q_{s-1}(x)\sin bx\right]=e^{ax}\begin{bmatrix}\left(A_j+A_{j+1}x+\cdots+A_{j+s-1}x^{s-1}\right)\cos bx+\\+\left(B_j+B_{j+1}x+\cdots+B_{j+s-1}x^{s-1}\right)\sin bx\end{bmatrix} \qquad (7)$$

За да намерим решението на нехомогенното уравнение е нужно да намерим един негов частен интеграл $\eta(x)$. Тогава общото решение е сума от решението на хомогенното уравнение $Y(x)$ и този частен интеграл $\eta(x)$, т.е. $y(x)=Y(x)+\eta(x)$.

Ако функцията $f(x)$ има някои от по-долните видове се постъпва по следния начин:

$$f(x)=e^{kx}P_m(x) \tag{8}$$

1. е Нека ***к* не корен** на характеристичното уравнение. Тогава
   $$\eta(x)=e^{kx}\left(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots c_mx^m\right) \tag{9}$$
   Определянето става по метода на неопределените коефициенти, като заместим израза за $\eta(x)$ и неговите производни в изходното уравнение.
2. Нека ***к* е корен с кратност *s*** на характеристичното уравнение. Тогава
   $$\eta(x)=x^se^{kx}\left(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots c_mx^m\right) \tag{10}$$
   Определянето става по метода на неопределените коефициенти, като заместим израза за $\eta(x)$ и неговите производни в изходното уравнение.

Ако

$$f(x)=e^{ax}\left[P_{m1}(x)\cos bx+Q_{m2}(x)\sin bx\right] \tag{11}$$

1. Нека $a+ib$ **не е корен** на характеристичното уравнение и m е по-голямото от $m1$ и $m2$. Тогава
   $$\eta=e^{ax}\left[\left(c_0+c_1x+\cdots+c_mx^m\right)\cos bx+\left(d_0+d_1x+\cdots+d_mx^m\right)\sin bx\right] \tag{12}$$
2. Нека $a+ib$ **е s кратен корен** на характеристичното уравнение и m е по-голямото от $m1$ и $m2$. Тогава
   $$\eta=x^se^{ax}\left[\left(c_0+c_1x+\cdots+c_mx^m\right)\cos bx+\left(d_0+d_1x+\cdots+d_mx^m\right)\sin bx\right] \tag{13}$$
   Определянето става по метода на неопределените коефициенти, като заместим израза за $\eta(x)$ и неговите производни в изходното уравнение.

При сума от няколко подобни типа функции се прилагат същите правила поотделно за всяка от тях.

Зад. 1. Да се намери общия интеграл на линейното хомогенно уравнение $y'''+y'-2y=0$

РЕШЕНИЕ

Характеристичното алгебрично уравнение е $r^3+r-2=0$. Корените му са различни, от които един реален и два комплексно спрегнати : $r_1=1, r_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2}, r_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2}$. Следователно трябва да използваме комбинация от формули (4) и (6) за да опишем общия интеграл:

$$y(x)=C_1e^{r_1x}+e^{\mathrm{Re}(r_2)x}\left(A\cos(\mathrm{Im}(r_2)+B\sin(\mathrm{Im}(r_2)\right)=C_1e^{r_1x}+e^{-\frac{1}{2}x}\left(A\cos\frac{\sqrt{7}}{2}+B\sin\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$$

Решението може да се запише и така: $y(x)=C_1e^{x}+C_2e^{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2}\right)x}+C_3e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}\right)x}$.

Зад. 2. Да се намери общия интеграл на линейното хомогенно уравнение $y'''-3y'-2y=0$ **.**

РЕШЕНИЕ

Характеристичното алгебрично уравнение е $r^3-3r-2=0$. Корените му са $r_1=-1, r_2=-1, r_3=2$.

Тъй като два от корените му съвпадат, т.е. r_1 е с кратност $s=2$ трябва да се използва формула (5), т.е. $e^{r_1x}\left(C_1+C_2x^{s-1}\right)=e^{-x}\left(C_1+C_2x\right)$, а за другия член формула (4) т.е. $C_3e^{r_3x}=C_3e^{2x}$.

Окончателно за общия интеграл имаме $y(x)=e^{-x}\left(C_1+C_2x\right)+C_3e^{2x}$.

Зад. 3. Да се намери общия интеграл на линейното хомогенно уравнение $y^{(IV)}+4y=0$ **.**

РЕШЕНИЕ

Характеристичното алгебрично уравнение е $r^4+4=0$. Корените му са $r=\{-1-i,-1+i,1-i,1+i\}$

Общият интеграл можем да запишем по два начина:

Използвайки (4) имаме $y(x)=C_1e^{(-1-i)x}+C_2e^{(-1+i)x}+C_3e^{(1-i)x}+C_4e^{(1+i)x}$ или използвайки формула (6) във вида $y(x)=e^{-x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)+e^{x}\left(C_3\cos x+C_4\sin x\right)$.

Зад. 4. Да се намери общия интеграл на линейното хомогенно уравнение $y^{(V)}+8y'''+16y'=0$ **.**

РЕШЕНИЕ

Характеристичното алгебрично уравнение е $r^5+8r^3+16r=0$. За да намерим корените по-лесно представяме уравнението в следния вид: $r\left(r^2+4\right)^2=0$. Корените му са $r_1=0$ и два кратни $\left(s=2\right)$ корена $r_{2,3}=2i, r_{4,5}=-2i$. За описание на членовете съдържащи кратни комплексни корени ще използваме формула (7). Имайки предвид, че реалните части са равни на нула и $e^0=1$ можем да запишем тези членове $\left(C_1+C_2x\right)\cos 2x+\left(C_3+C_4x\right)\sin 2x$, а за реалния корен $C_5e^{0x}=C_5$. Следователно общият интеграл е $y(x)=C_5+\left(C_1+C_2x\right)\cos 2x+\left(C_3+C_4x\right)\sin 2x$.

Зад. 5. Да се намери общия интеграл на линейното хомогенно уравнение $y^{(VIII)}-y^{(VI)}-9y^{(IV)}-11y''-4y=0$.

РЕШЕНИЕ

Характеристичното алгебрично уравнение е $r^8-r^6-9r^4-11r^2-4=0$. С проверка намираме че $r=2$ и $r=-2$ са корени на уравнението и делим полинома на $(r^2-4)=(r-2)(r+2)$. Получаваме $\left(r^2+1\right)^3$ и намираме че $r=i, r=-i$ е трикратен корен. Членовете свързани с различните реални корени съгласно (4) имат вида $C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$. Членовете съгласно (7) за спрегнатите трикратни $r=i$, $r=-i$ са $e^{0x}\left[\left(C_3+C_4x+C_5x^2\right)\cos x+\left(C_6+C_7x+C_8x^2\right)\sin x\right]$. Окончателно $y(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}+\left(C_3+C_4x+C_5x^2\right)\cos x+\left(C_6+C_7x+C_8x^2\right)\sin x$

Зад. 6. Да се намери общия интеграл на линейното нехомогенно уравнение $y'''-y''=-3x+1$

РЕШЕНИЕ

Характеристичното алгебрично уравнение е $r^3-r^2=0$. Преобразуваме $r^2(r-1)=0$. Корените са $r=0$ с кратност $s=2$ и $r=1$. Общият интеграл на хомогенното уравнение съгласно (5) и (4) има вида $Y(x)=e^{0x}\left(C_1+C_2x\right)+C_3e^x=C_1+C_2x+C_3e^x$.

Общото решение се представя във вида $y(x)=Y(x)+\eta(x)$.

За да намерим частния интеграл $\eta(x)$ виждаме, че дясната страна $f(x)=-3x+1$ може да се представи като $f(x)=e^{0x}\left(-3x+1\right)$, т.е. $f(x)=e^{kx}P_m(x)$ функция от вида (8). Тъй като в случая $k=0$ се явява двукратен корен на характеристичното уравнение избираме вида на частния интеграл $\eta(x)=x^se^{kx}\left(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots c_mx^m\right)$ съгласно формула (10) и имаме $\eta(x)=x^2e^{0x}\left(c_0+c_1x\right)$. Намираме производните $\eta'(x)=2c_0x+3c_1x^2$, $\eta''(x)=2c_0+6c_1x$, $\eta'''(x)=6c_1$ и заместваме в изходното диференциално уравнение. Имаме $6c_1-6c_1x-2c_0=-3x+1$. Оттук от уравненията $-6c_1x=-3x$ и $6c_1-2c_0=1$ определяме $c_1=\frac{1}{2}$ и $c_0=1$. Следователно $\eta(x)=x^2+\frac{1}{2}x^3$. Общият интеграл на нехомогенното уравнение $y(x)=C_1+C_2x+C_3e^x+x^2+\frac{1}{2}x^3$

Зад. 7. Да се намери общия интеграл на линейното нехомогенно уравнение $y''+4y=\sin 2x$

РЕШЕНИЕ

Характеристичното алгебрично уравнение е $r^2+4=0$. Корените са $r=2i, r=-2i$. Решението на хомогенното уравнение ще бъде $Y=e^{0x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

Дясната част $f(x)=\sin 2x$ можем да представим като $f(x)=e^{0x}\left(\sin 2x\right)$. Тъй като $0\pm 2i$ се явява и корен на характеристичното уравнение , нямаме кратни корени $s=1$ и търсим частния интеграл във вида (13), т.е. $\eta = x^1 e^{0x}\left[\left(c_0\right)\cos 2x+\left(d_0\right)\sin 2x\right]=c_0 x\cos 2x+d_0 x\sin 2x$. Намираме производните и после заместваме в диференциалното уравнение:

$$\eta'(x)=\left(c_0+2d_0 x\right)\cos 2x+\left(d_0-2c_0 x\right)\sin 2x$$

$$\eta''(x)=-4c_0\sin 2x+4d_0\cos 2x-4x\left(c_0\cos 2x+d_0\sin 2x\right)=-4c_0\sin 2x+4d_0\cos 2x-4\eta(x)\ .$$

Получаваме $-4c_0\sin 2x+4d_0\cos 2x=\sin 2x$.

Оттук определяме $-4c_0=1,\quad 4d_0=0$,т.е. $c_0=-\dfrac{1}{4},\, d_0=0$.

Частният интеграл има следния вид: $\eta(x)=-\dfrac{1}{4}x\cos 2x$ и за общият интеграл се получава:

$$y(x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{1}{4}x\cos 2x\ .$$