Диференциални уравнения се наричат уравненията, в които се търси неизвестна функция на една или няколко променливи, като в тези уравнения влизат както неизвестната функция, така и нейните производни. Редът на старшата производна на неизвестната функция се нарича **ред** на уравнението.

Ако неизвестната функция, участваща в диференциалното уравнение, зависи от няколко променливи и в уравнението участват частни производни на тази функция, то такова диференциално уравнение се нарича **частно диференциално уравнение**.

Ако неизвестната функция зависи само от една променлива и в уравнението участват обикновени производни на тази функция, то такова диференциално уравнение се нарича **обикновено диференциално уравнение** (ОДУ). В най-общ вид обикновено диференциално уравнение от $n-$ти ред се записва по следния начин:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \quad n \geq 1.$$

$y' = 3y^{2/3}$ – уравнение от първи ред;
$y'' + y = 0$ – уравнение от втори ред;
$xy''' = y'' + x$ – уравнение от трети ред.

Когато едно ОДУ е разрешимо относно старшата производна $y^{(n)}$, то същото може да се запише в следния **нормален вид**:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Уравненията

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$
$$y'' = g(x, y, y') \tag{2}$$

са съответно ОДУ от първи и втори ред, записани в нормален вид.

Функцията $y = y(x)$ се нарича **решение на ОДУ (1) в интервала** (a, b), ако е диференцуема в интервала (a, b) и

$y'(x) \equiv f(x, y(x)) \quad \forall x \in (a, b).$

Аналогично се дава определението за решение на ОДУ (2).

Графиката на дадено решение на ОДУ се нарича **интегрална крива** на уравнението.

Когато се решава ОДУ, свързано с някаква практическа задача, не се търсят всички решения, а само това решение, което удовлетворява някои предварително зададени условия, продиктувани от конкретната практическа задача. Най-често се разглежда, така наречената, начална задача. За ОДУ (1) тази задача се записва във вида

$$\left| \begin{aligned} & y' = f(x, y), \\ & y(x_0) = y_0. \end{aligned} \right. \tag{3}$$

и се нарича **начална задача** (**задача на Коши**) за **началната точка** (x_0, y_0).

Решение на началната задача (3) е това решение $y = y(x)$ на ОДУ (1), което удовлетворява началното условие $y(x_0) = y_0$. На практика с решаването на началната задача (3) се намира тази интегрална крива на ОДУ (1), която минава през точката (x_0, y_0).

ДУ от първи ред с отделящи се променливи имат вида

$$f_1(x)g_1(y)dy = f_2(x)g_2(y)dx. \qquad (4)$$

Уравнение (4) е записано в **симетрична форма** и в него променливите x и y са равноправни, т.е. може да считаме, че неизвестната функция е $y = y(x)$ или, че неизвестната функция е $x = x(y)$.

За да се реши това уравнение, първо трябва да се отделят променливите, като се раздели почленно с $f_1(x)g_2(y)$:

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = \frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx.$$

След почленно интегриране се получава, така нареченото, **решение в квадратури**:

$$\int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = \int \frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx.$$

Ако неопределените интеграли в това равенство се изразяват с елементарни функции $G(y)$ и $F(x)$, то се получава уравнение от вида

$$G(y) + F(x) = C, \qquad (5)$$

Зад. 1 Намерете общото решение на ОДУ $y' = \dfrac{dy}{dx} = e^{x-y}$

РЕШЕНИЕ:

Представяме във вида $\dfrac{dy}{dx} = e^x e^{-y}$.

От двете страни е нужно да имаме функция само на една променлива т.е. $\dfrac{dy}{e^{-y}} = e^x dx$.

Преобразуваме и интегрираме:

$\dfrac{dy}{e^{-y}} = e^y dy \Rightarrow e^y dy = e^x dx$ или $\int e^y dy = \int e^x dx + C$

Окончателно $e^y = e^x + C$.

Зад. 2. Намерете общото решение на ОДУ $2x^2 yy' + y^2 = 2$

РЕШЕНИЕ:

Представяме уравнението във вида $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2-y^2}{2x^2 y}$

Пренасяме от лявата страна членовете съдържащи y, а отляво x, т.е. $\dfrac{ydy}{2-y^2} = \dfrac{dx}{2x^2}$

Интегрираме $\int \dfrac{y}{2-y^2} dy = \int \dfrac{1}{2x^2} dx + C$ и получаваме

$-\dfrac{1}{2}\int \dfrac{d(2-y^2)}{2-y^2} = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{1}{x^2} dx + C$. Получаваме $-\dfrac{1}{2}\ln\left|2-y^2\right| = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x} + C$.

Освобождаваме се от логаритъма и окончателно получаваме $y^2 - 2 = Ce^{\frac{1}{x}}$.

Зад. 3. Намерете решението на ОДУ $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$ **, което да минава през точката** $x_0 = 0, y(x_0) = 1$ **.**

РЕШЕНИЕ:

Представяме уравнението във вида $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2xy^2}{x^2-1}$.

Пренасяме от лявата страна членовете съдържащи y, а отляво x, т.е. $\frac{dy}{y^2} = \frac{-2xdx}{x^2-1}$

Интегрираме $\int \frac{1}{y^2} dy = -\int \frac{2x}{x^2-1} dx + C$ и получаваме общото решение:

$-\frac{1}{y} = -\ln(|x^2-1|) + C$ или след смяна на знаците $\frac{1}{y} = \ln(|x^2-1|) + C$

За да определим константата *C* заместваме в израза за общото решение $x = x_0 = 0$, $y = 1$.

Търсеното частното решение има вида: $\frac{1}{y} = \ln\left(\left|x^2-1\right|\right) + 1$.

Една функция $F(x,y)$ на две реални променливи $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$ се нарича хомогенна функция от "n" степен, ако $F(tx,ty) = t^n F(x,y)$.

По-специално, една функция $F(x,y)$ (израз) на две променливи се нарича хомогенна функция от нулева степен, когато

$$F(tx,ty) = F(x,y)$$

Ако множеството (x,y) не съдържа точки с абсциса $x = 0$, то функцията е хомогенна функция от нулева степен, точно когато съществува функция на една променлива $f(u)$, така че се представя във вида

$$F(x,y) = f(u) = f\left(\frac{y}{x}\right) .$$

Ако множеството (x,y) не съдържа точки с ордината $y = 0$, то функцията $F(x,y)$ е хомогенна функция от нулева степен точно когато се представя във вида $F(x,y) = g(u) = g\left(\frac{x}{y}\right)$, където $g(u)$ е функция на една променлива.

Частното $F(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ на две хомогенни функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ от една и съща степен n е хомогенна функция от нулева степен.

Под хомогенно диференциално уравнение се разбира уравнение от вида

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0.$$

То се преобразува до уравнение от вида:

$$y'=\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)=f(u) \quad \text{или} \quad x'=\frac{dx}{dy}=g\left(\frac{x}{y}\right)=g(u),$$

Което представлява обикновено диференциално уравнение с разделящи се променливи относно *u*.

Зад. 4. Намерете решението на хомогенното ОДУ $2x^3y'=y(2x^2-y^2)$

РЕШЕНИЕ

Можем да представим уравнението във вида $y'=\frac{y}{x}-\frac{y^2}{2x^3}$ като съкратим на $2x^3$, $x\neq 0$.

Полагаме $u=\frac{y}{x}$. Тогава $u'=\frac{du}{dx}=\left(\frac{y}{x}\right)'=\frac{y'x-yx'}{x^2}=\frac{y'}{x}-\frac{1}{x}\frac{y}{x}=\frac{1}{x}\left(y'-u\right)$

Изразяваме $y'=xu'+u$ и заместваме в уравнението

$y'=xu'+u=u-\frac{1}{2x}u^2$. Съкращавайки от двете страни на *u* и разделяйки на *x* имаме

уравнението $u'=-\frac{u^2}{2x^2}$. Разделяйки променливите се достига до уравнението:

$\frac{du}{u^2}=-\frac{dx}{2x^2}$. Интегрираме последното и получаваме $\int\frac{du}{u^2}=-\int\frac{dx}{2x^2}+C$

$-\frac{1}{u}=\frac{1}{2x}+C$. Връщайки се към старата променлива $y=ux$ и съкращавайки на х имаме

$\frac{1}{y}=-\frac{1}{2x^2}+C/x$.

Зад. 5. Намерете решението на хомогенното ОДУ $\left(x^3+y^3\right)dx-3xy^2dy=0$

РЕШЕНИЕ

Нека положим обратното $u=\frac{x}{y}$ и да разделим на $y^3, y\neq 0$.

$\left(\frac{x^3}{y^3}+1\right)dx=3\frac{x}{y}dy$ или $\left(u^3+1\right)\frac{dx}{dy}=3u$.

Намираме $\frac{du}{dy}=\left(\frac{x}{y}\right)'=\frac{1}{y}\frac{dx}{dy}-\frac{x}{y^2}=\frac{1}{y}\left(\frac{dx}{dy}-u\right)$.

Изразяваме $\frac{dx}{dy}=y\frac{du}{dy}+u$ и заместваме в уравнението за u.

$$\left(u^3+1\right)\left(y\frac{du}{dy}+u\right)=3u$$

Това е вече уравнение с разделящи се променливи $y\frac{du}{dy}=\frac{3u}{u^3+1}-u$

$$\frac{du}{\left(\frac{3u}{u^3+1}-u\right)}=\frac{1}{y}dy\ .$$

Преобразуваме и интегрираме

$$\int\frac{2u-u^4}{u^3+1}du=2\int\frac{u}{u^3+1}du-\int\frac{u^4}{u^3+1}du=\int\frac{1}{y}dy+C$$

Левият интеграл е интеграл от рационална функция, десният е табличен.

$$\frac{1}{2}\left(\ln(u^2-u+1)-2\ln(u+1)-2\sqrt{3}arctg\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\ln|y|+C\ .$$

Връщаме се към изходните променливи $u=\frac{x}{y}$

$$\frac{1}{2}\left(\ln(\frac{x}{y^2}^2-\frac{x}{y}+1)-2\ln(\frac{x}{y}+1)-2\sqrt{3}arctg\left(\frac{2\frac{x}{y}-1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\ln|y|+C$$

ЛИНЕЙНИ ОБИКНОВЕНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ОТ ПЪРВИ РЕД

Ако диференциалното уравнение може да се представи във вида:

$$y' + p(x)y = q(x) \ ,$$

където $y = y(x), \ \ y' = y'(x)$ са непрекъснати и ограничени реални функции на независимата променлива *x* , то се нарича линейно.

Общото решение има вида:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]$$

Линейните уравнения НЕ ПРИТЕЖАВАТ особени решения.

Ако $q(x) = 0$ то се нарича ХОМОГЕННО, ако $q(x) \neq 0$ е НЕХОМОГЕННО.

Зад. 5. Намерете решението на линейното ОДУ $\left(2x+1\right)y' = 4x + 2y$

РЕШЕНИЕ

Представяме уравнението в вида $y' - \dfrac{2}{2x+1}y = 4x$

Тук функцията $p(x) = -\dfrac{2}{2x+1}$, а $q(x) = 4x$

Заместваме във формулата за общото решение и получаваме:

$$y(x) = e^{-\int -\frac{2}{2x+1}dx}\left[C + \int 4xe^{\int -\frac{2}{2x+1}dx}dx\right]$$

Решаваме двата интеграла

$$\int \frac{2}{2x+1}dx = \int \frac{1}{2x+1}d(2x+1) = \ln\left|2x+1\right| \ ,$$

но $e^{\int \frac{2}{2x+1}dx} = 2x+1, \quad e^{-\int \frac{2}{2x+1}dx} = \frac{1}{2x+1}$ знака се отчита и модул не е необходим

$$\int 4xe^{-\int \frac{2}{2x+1}dx}dx = \int \frac{4x}{2x+1}dx = \int \frac{2x+1+2x-1}{2x+1}dx = \int \frac{2x+1}{2x+1}dx + \int \frac{2x-1}{2x+1}dx = x + x - 2\ln|2x+1|$$

Комбинирайки и замествайки получаваме общото решение

$y(x) = (2x+1)\left(C + 2x - 2\ln|2x+1|\right)$.

Зад. 6. Намерете решението на линейното ОДУ $ydx - \left(x + y^2 \sin y\right)dy = 0$

Тук уравнението е нелинейно относно функцията $y(x)$ защото съдържа y^2 и $\sin y$. Затова е удобно да работим с $x(y)$. Представяме уравнението в следния вид:

$y\frac{dx}{dy} - x = y^2 \sin y$. Делим двете страни на $y, y \neq 0$ и получаваме $\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = y\sin y$, което се явява линейно относно *x*.

Тук $p(y) = -\frac{1}{y}$ и $q(y) = y^2 \sin y$.

Заместваме във формулата за общото решение

$$x(y) = e^{-\int \frac{-1}{y}dy}\left[C + \int y^2 \sin y \cdot e^{\int \frac{-1}{y}dy} dy\right]$$

За целта решаваме интегралите:

$\int \frac{dy}{y} = \ln|y|$, но $e^{\int \frac{dy}{y}} = y$ и $e^{-\int \frac{dy}{y}} = \frac{1}{y}$

$\int y^2 \sin y \cdot \frac{1}{y}dy = \int y\sin ydy$ … по части …$= -y\cos y - \int -\cos ydy = -y\cos y + \sin y$

Окончателно получаваме $x(y) = y\left(C - y\cos y + \sin y\right)$

Уравнения приводими към линейни

Понякога е възможно чрез подходящи субституции и полагания нелинейното диференциално уравнение да бъде приведено към линейно обикновено диференциално уравнение.

Зад. 7. Намерете решението на нелинейното ОДУ $-\dfrac{x}{\sin^2 y(x)}y'(x)+\operatorname{cotg}(y(x))=3x^2$

Забелязваме, че $\dfrac{d}{dx}\operatorname{cotg}(y)=\left(\operatorname{cotg}(y)\right)'=-\dfrac{1}{\sin^2 y(x)}y'(x)$. Тогава

можем да представим уравнението във вида:

$\left(\operatorname{cotg}(y)\right)'+\dfrac{1}{x}\operatorname{cotg}(y)=3\dfrac{x^2}{x}$.   предполагаме $x\neq 0$

Полагаме $u=\operatorname{cotg}(y)$ и получаваме линейното уравнение $u'+\dfrac{1}{x}u=3x$.

Тук $p(x)=\dfrac{1}{x}$, $\mathrm{q(x)=3x}$.

Заместваме във формулата за общото решение

$u(x)=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(C+\int 3xe^{\int\frac{1}{x}dx}dx\right)$. Както в предишните задачи $e^{-\int\frac{1}{x}dx}=\dfrac{1}{x}$ и $e^{\int\frac{1}{x}dx}=x$

Тогава $u(x)=\dfrac{1}{x}\left(C+\int 3x^2dx\right)=\dfrac{C}{x}+x^2$

Връщаме се към старите променливи $u(x)=\operatorname{cotg}(y(x))$ и получаваме

$\operatorname{cotg}(y)=\dfrac{C}{x}+x^2$ или $y=arccotg\left(\dfrac{C}{x}+x^2\right)$.