РЕШЕНИ ПРИМЕРИ С НЕСОБСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ

Определение 1. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала $[a, +\infty)$ и е интегруема във всеки негов краен подинтервал от вида $[a, A]$.* ***Несобствен интеграл от I род*** $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *се дефинира чрез формулата*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^{A} f(x)\,dx,$$

ако границата в дясната страна на равенството съществува и е крайна.

Несобствен интеграл от I род от функцията $f(x)$ върху цялата реална права $(-\infty, +\infty)$ се дефинира с формулата

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

Определение 2. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала $(a, b]$ и е интегруема във всеки негов затворен подинтервал от вида $[a+\delta, b]$, $\delta > 0$.* ***Несобствен интеграл от II род*** $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx$ *се дефинира чрез формулата*

$$\int\limits_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} \int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx,$$

ако границата в дясната страна на равенството съществува и е крайна.

Накрая, нека c е вътрешна точка за интервала $[a, b]$ и c е особена точка за интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, т.е. функцията $f(x)$ е интегруема във всички подинтервали от вида $[a, c-\delta]$ и $[c+\delta, b]$, $\delta > 0$. Тогава несобствен интеграл от II род от функцията $f(x)$ върху интервала $[a, b]$ с особена точка c се дефинира с формулата

$$\int\limits_a^{b} f(x)\,dx = \int\limits_a^{c} f(x)\,dx + \int\limits_c^{b} f(x)\,dx$$

Теорема 1 (**Критерий за сравнение**). *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в интервала $[a,+\infty)$ и нека $0 \le f(x) \le g(x)$ за всяко $x \in [a,+\infty)$. Тогава:*

1) ако $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ е сходящ, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е също сходящ;

2) ако $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е разходящ, то $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ е също разходящ.

ПОЛЕЗНИ ИНТЕГРАЛИ:

А. $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ е сходящ за $p>1$ и разходящ за $p \le 1$.

Б. $\int\limits_0^{1} \frac{1}{x^p}\,dx$ е сходящ за $p<1$ и разходящ за $p \ge 1$.

Зад. 1. Сходящ ли е интеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{(5x+2)^2}\,dx$ **?**

$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{(5x+2)^2}\,dx = \frac{1}{5}\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{(5x+2)^2}\,d(5x+2) = \frac{1}{5}\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{u^2}\,du$, който е **сходящ** виж А. $(p>1)$

$\frac{1}{5}\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{(5x+2)^2}\,d(5x+2) = \frac{1}{5}\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-1}{5x+2}\right) - \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{-1}{5x+2}\right)\right) = \frac{1}{5}\left(0+\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{35}$.

Зад. 2. Сходящ ли е интеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$ **?**

$\int\limits_1^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,d\left(1+x^2\right) = \frac{1}{2}\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{u}\,du$ **,** който е **разходящ** виж А. $(p=1)$.

Зад. 3. Сходящ ли е интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$ **?**

Представяме като сума от два интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{1} \frac{x}{1+x^2}\,dx + \int\limits_{1}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

Съгласно зад.2 втория интеграл е разходящ, откъдето следва, че и този интеграл е **разходящ.**

Зад. 4. Сходящ ли е интеграла $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ **?**

Използваме формулата за интегриране по части $\int fdg = fg - \int gdf$. Тук $f = \ln x$, $df = \frac{1}{x}$,

$dg = \frac{1}{x^2} dx$ т.е. $g = -\frac{1}{x}$. Тогава $\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx$. Окончателно получаваме:

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x}\Bigg|_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \ .$$

За втория интеграл знаем, че е сходящ, виж А.

Използваме теоремата на Лопитал, т.е че $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Намираме границите: $-\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} + \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x}$ =0-0=0.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{x}\Bigg|_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-1}{x}\right) - \lim_{x\to 1}\left(\frac{-1}{x}\right) = 0 + 1 = 1 \ .$$ Окончателно

$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = 1$ т.е интегралът е **сходящ!**

Зад. 5. Сходящ ли е интеграла $\int_1^{a} \frac{1}{\sqrt[3]{x-a}} dx, \quad a > 1$ **?**

$$\int_1^{a} \frac{1}{\sqrt[3]{x-a}} dx = \int_1^{a} (x-a)^{-\frac{1}{3}} dx = \int_1^{a} (x-a)^{-\frac{1}{3}} d(x-a) = \frac{3}{2}(x-a)^{\frac{2}{3}}\Bigg|_1^{a}$$

В горната граница имаме особеност, т.е интегралът е несобствен.

$$\int_1^{a} \frac{1}{\sqrt[3]{x-a}} dx = \lim_{x\to a}\left(\frac{3}{2}(x-a)^{\frac{2}{3}}\right) - \lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{2}(x-a)^{\frac{2}{3}}\right) = 0 - \frac{3}{2}(1-a)^{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}(1-a)^{\frac{2}{3}}$$

Интегралът е **сходящ!**

Зад. 6. Сходящ ли е интеграла $\int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{1+x^2}dx$ **?**

Използваме сравнителната теорема (теорема 1).

Тук функцията $g(x)=\frac{1}{x^2}$, а $f(x)=\frac{\cos^2 x}{1+x^2}$.

Тогава за всяко $x\in[1,\infty)$ $\cos^2 x\le 1$, следователно $f(x)=\frac{\cos^2 x}{1+x^2}\le\frac{1}{1+x^2}<\frac{1}{x^2}$

Но $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ е сходящ (виж А.) следователно $\int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{1+x^2}dx$ **<** $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ също **е сходящ**!

Зад. 7. Сходящ ли е интеграла $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x\sin x}dx$ **?**

Представяме интеграла във вида:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x\sin x}dx=\int_0^1 \frac{1}{x\sin x}dx+\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x\sin x}dx$ **.** **Вторият интеграл няма особеност.**

Функцията $0\le\sin(x)\le 1,$ при $0\le x\le\pi/2$

$\frac{1}{x\sin x}\ge\frac{1}{x}$ откъдето следва че $\int_0^1 \frac{1}{x\sin x}dx\ge\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ **.**

Но $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ е разходящ съгласно свойство Б). От сравнителната теорема следва, че $\int_0^1 \frac{1}{x\sin x}dx$ **също е разходящ и оттам, че** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x\sin x}dx$ **се явява разходящ!**

Зад. 8. Сходящ ли е интеграла $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ **?**

Прилагайки сравнителната теорема за $f(x)=\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ и $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ и имайки предвид свойство Б) от полезните интеграли имаме:

$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx\le\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2$ **, т.е интегралът се явява сходящ!**

Зад. 9. Сходящ ли е интеграла $\int_1^{\infty} \frac{5+e^{-2x}}{x} dx$ **?**

Прилагайки сравнителната теорема за $f(x) = \frac{5+e^{-2x}}{x}$ и $g(x) = \frac{1}{x}$ и имаки предвид, че навсякъде в интервала $1 \le x \le \infty$ функцията $f(x) = \frac{5+e^{-2x}}{x}$ = $\frac{5}{x} + \frac{1}{e^{2x}} \frac{1}{x} = \left(5 + \frac{1}{e^{2x}}\right)\frac{1}{x}$ е винаги по-голяма от $g(x) = \frac{1}{x}$. Съгласно свойство А) от полезните интеграли $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ е разходящ и следователно $\int_1^{\infty} \frac{5+e^{-2x}}{x} dx$ **също е разходящ.**

Зад. 10. Сходящ ли е интеграла $\int_0^1 \frac{e^x}{\sin^2 x} dx$ **?**

В интервала $0 \le x \le 1$функцията $0 \le \frac{e^x}{\sin^2 x} \ge \frac{e^x}{x^2} > \frac{1}{x^2}$

Съгласно свойство Б) от полезните интеграли за $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ следва че е разходящ и от сравнителната теорема следва че, $\int_0^1 \frac{e^x}{\sin^2 x} dx$ **също е разходящ!**

Зад. 11. Сходящ ли е интеграла $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arc} tg(x)}{x^2+1} dx$ **?**

Интегралът е несобствен. Тук предлагаме друг подход за решаването му.

За удобство сменяме променливите и оттам границите на интегриране.

Нека $u = arctg(x)$. Тогава $du = \frac{1}{1+x^2} dx$.

За долната граница имаме $a = arctg(0) = 0$ и за горната $b = arctg(\infty) = \frac{\pi}{2}$.

Решаваме интеграла $\int_0^{\frac{\pi}{2}} u du = \left. \frac{u^2}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$. Интегралът е **сходящ!**