Увод:

☞ **Производни и интеграли**

✍ **Зад. 1:** $J = \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$.

Решение: представяме

$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{a+x} = \frac{A.(a+x) + B(a-x)}{a^2 - x^2} = \frac{(A+B).a + (A-B)x)}{a^2 - x^2},$$

откъдето следва

$$\left| \begin{array}{l} (A+B).a = 1 \\ A - B = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} 2A.a = 1 \\ B = A \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} A = 1/2a \\ B = A \end{array} \right. .$$

Така интегралът добива вида

$$J = \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{a+x} + \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{a-x} = \frac{1}{2a} \int \frac{d(x+a)}{a+x} - \frac{1}{2a} \int \frac{d(-x+a)}{a-x} =$$

$$= \frac{1}{2a} \ln|a+x| - \frac{1}{2a} \ln|a-x| = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|.$$

☞ **Интегриране по части**: $\boxed{\int u(x)\, dv(x) = u(x)\, v(x) - \int v(x)\, du(x)}$

✍ **Зад. 2:** $J = \int \ln(x^2 - 1)\, dx = ?$

Решение: $J = \int \ln(x^2 - 1)\, dx = x.\ln(x^2 - 1) - \int x\, d\ln(x^2 - 1) =$

$$= x.\ln(x^2 - 1) - \int x \frac{1}{x^2 - 1}.2x\, dx = x.\ln(x^2 - 1) - 2\int \frac{x^2}{x^2 - 1} dx = x.\ln(x^2 - 1) - 2\int \frac{x^2 - 1 + 1}{x^2 - 1} dx =$$

$$= x.\ln(x^2 - 1) - 2\int \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} dx - 2\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = x.\ln(x^2 - 1) - 2\int dx - 2J(x).$$

И така

(1) $\quad J = \int \ln(x^2 - 1)\, dx = x.\ln(x^2 - 1) - 2x - 2J(x)$.

Решаваме отделно интеграла

(2) $\quad J_1(x) = \int \frac{1}{x^2 - 1} dx$.

За неговото решаване най-напред представяме (разлагаме) подинтегралната му функция:

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} \stackrel{\ni A,B}{=} \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} = \frac{A(x+1)}{(x-1)} + \frac{B(x-1)}{(x+1)} = \frac{(A+B)x + (A-B)}{(x-1)(x+1)}.$$

Очевидно трябва $(A+B) = 0 \cap (A-B) = 0$, $\Rightarrow$ $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, при което

(3) $$\frac{1}{x^2-1}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right).$$

Заместваме (3) в (2), и получаваме

$$J_1(x)=\int\frac{1}{x^2-1}dx=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x-1)}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{d(x+1)}{x+1}=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|,$$

където е използван табличният интеграл $\int\frac{du}{u}=\ln|u|$.

И така доказахме, че

(4) $$\boxed{J_1(x)=\int\frac{1}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}$$

Заместваме така получената стойност на интеграла $J_1(x)$ в (1) и получаваме

(5) $$J=\int\ln(x^2-1)\,dx=x.\ln(x^2-1)-2x-2\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=$$

$$=x.\ln(x^2-1)-2x-\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

Въпрос 1. Интегриране чрез смяна на променливите
Въпрос 2. Интегриране на рационални функции

а) за рационални функции от I вид: $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$.

☞ При $\boxed{\alpha=1}$: $\int\frac{A}{x-a}d(x-a)=A.\ln|x-a|+C$

☞ При $\boxed{\alpha>1}$: $\int\frac{A}{(x-a)^\alpha}\,dx=A.\int(x-a)^{-\alpha}\,d(x-a)=\frac{A}{-\alpha+1}(x-a)^{-\alpha+1}+C$ **.**

б) за рационални функции от II вид: те участват в интеграли, съдържащи в знаменателя на подинтегралната си функция квадратен тричлен $x^2+p.x+q$, **непритежаващ реални корени**, т.е. $D=p^2-4q<0$. Разновидност на интеграли от II вид са и интегралите, чиято подинтегрална функция има вид $\frac{M.x+N}{x^2+p.x+q}$ на правилна дроб, неприводима към I вид.

➢ Интеграли от II вид се решават, като в тях се прави <u>**субституция на Хорнер**</u>**:** $x=t-\frac{p}{2}$**.**

✍ <u>**Пример 1:**</u> $J(x)=\int\frac{dx}{x^2-3x+4}$, $D<0$.

Решение: Полагаме $x = t - \frac{p}{2} \equiv t - \frac{(-3)}{2} = t + \frac{3}{2}$, като очевидно $dx = d\,t$. Квадратният тричлен в знаменателя ще се представи така:

$$\left(t+\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(t+\frac{3}{2}\right) + 4 = t^2 + 2.t.\frac{3}{2} + \frac{9}{4} - 3t - 3.\frac{3}{2} + 4 = t^2 + \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 4 = t^2 + \frac{7}{4}.$$

След заместване в интеграла получаваме

$$J(x) = \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 4} = \int \frac{dt}{t^2 + \frac{7}{4}} = \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}.$$

Ако използваме табличния интеграл $\boxed{\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}.arctg\frac{x}{a} + C}$, получаваме

$$\int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)}.arctg\frac{t}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)} + C = \frac{2}{\sqrt{7}}.arctg\frac{2.t}{\sqrt{7}} + C,$$

откъдето, използвайки, че по полагане $x = t + \frac{3}{2}$, т.е. $t = x - \frac{3}{2}$, получаваме окончателно

$$J(x) = \frac{2}{\sqrt{7}}.arctg\frac{2.t}{\sqrt{7}} + C = \frac{2}{\sqrt{7}}.arctg\frac{2.\left(x - \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{7}} + C = \frac{2}{\sqrt{7}}.arctg\frac{2.x - 3}{\sqrt{7}} + C.$$

✍ **<u>Пример 2:</u>** $J = \int \frac{2x-3}{x^2 + 3x + 3}dx$, $D = 9 - 12 < 0$.

Решение: Полагаме $x = t - \frac{p}{2} \equiv t - \frac{3}{2}$, като очевидно $dx = d\,t$. При тази субституция подинтегралната функция ще се представи във вида:

$$\frac{2x-3}{x^2+3x+3} = \frac{2\left(t-\frac{3}{2}\right)-3}{\left(t-\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(t-\frac{3}{2}\right)+3} = \frac{2t-6}{t^2 - 2t.\frac{3}{2} + \frac{9}{4} + 3t - \frac{9}{2} + 3} = \frac{2t-6}{t^2 + \frac{3}{4}}.$$

След заместване в интеграла получаваме

$$J(x) = \int \frac{2t-6}{t^2+\frac{3}{4}}dt = 2\int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}dt - 6.\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = 2.\int \frac{d\left(\frac{1}{2}t^2\right)}{t^2+\frac{3}{4}} - 6.\int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$\int \frac{d\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}} - 6.\int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \ln\left|t^2+\frac{3}{4}\right| - 6.\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}.arctg\frac{t}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} + C =$$

$$= \ln\left|t^2 + \frac{3}{4}\right| - \frac{12}{\sqrt{3}}.arctg\frac{2t}{\sqrt{3}} + C,$$

където отново е използван табличния интеграл $\boxed{\int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}.arctg\frac{x}{a} + C}$,

След възстановяване на променливата „x” от полагането, т.е. $t = x + \frac{3}{2}$, получаваме окончателно

$$J(x) = \ln\left|\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right| - \frac{12}{\sqrt{3}}.arctg\frac{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{3}} + C = \ln\left|x^2+3x+3\right| - \frac{12}{\sqrt{3}}.arctg\frac{2x+3}{\sqrt{3}} + C$$

2. Разлагане на правилна дроб на сбор от елементарни дроби (от I и II вид).

✍ **Пример:** $J(x) = \int\frac{x}{x^3-1}dx$.

Решение: разлагаме подинтегралната функция на дроби

$$\frac{x}{x^3-1} \equiv \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} \overset{Теорема}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1},$$

където дискриминантата на квадратния член в знаменателя е $D = 1-4 < 0$. След привеждане към общ знаменател в дясната страна, получаваме

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{A(x^2+x+1)+(Mx+N)(x-1)}{x^3-1}, \text{ или още}$$

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{Ax^2+Ax+A+Mx^2+Nx-Mx-N}{x^3-1}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{0.x^2+1.x+0}{x^3-1} = \frac{(A+M)x^2+(A+N-M)x+(A-N)}{x^3-1},$$

откъдето

$$\left|\begin{array}{l} A+M=0 \\ A+N-M=1, \\ A-N=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} M=-A \\ A+(A)-(-A)=1, \\ N=A \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} M=-1/3 \\ A=1/3 \\ N=1/3 \end{array}\right. .$$

Така получаваме

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1} = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}(x-1)}{x^2+x+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\frac{x-1}{x^2+x+1}.$$

Тогава

$$J(x) = \int\frac{x}{x^3-1}dx = \int\left(\frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)dx = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}.J_1(x), \text{ т.е.}$$

(6) $\quad J(x)=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}.J_1(x)$

където за интеграла $\boxed{J_1(x)=\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx}$ прилагаме субституцията на Хорнер: $\boxed{x=t-\frac{1}{2}}$, и следователно подинтегралната му функция става

$$\frac{x-1}{x^2+x+1}=\frac{t-\frac{1}{2}-1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(t-\frac{1}{2}\right)+1}=\frac{t-\frac{3}{2}}{t^2-t+\frac{1}{4}+t-\frac{1}{2}+1}=\frac{t-\frac{3}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}=\frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}-\frac{3}{2}\frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}.$$

Така за интеграла $J_1(x)$ получаваме

$$J_1(x)=\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx=\int\left[\frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}-\frac{3}{2}\frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\right]dt=\int\frac{t\,dt}{t^2+\frac{3}{4}}-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt^2}{t^2+\frac{3}{4}}-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}}-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+\frac{3}{4}\right|-\frac{3}{2}\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}.arctg\frac{t}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}+C=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+\frac{3}{4}\right|-\frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}.arctg\frac{2.t}{\sqrt{3}}+C.$$

И така

$$J_1(x)=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+\frac{3}{4}\right|-\frac{3}{\sqrt{3}}.arctg\frac{2.t}{\sqrt{3}}+C\equiv\frac{1}{2}\ln\left|t^2+\frac{3}{4}\right|-\sqrt{3}.arctg\frac{2.t}{\sqrt{3}}+C$$

Възстановяваме променливата „x” от полагането: $\boxed{t=x+\frac{1}{2}}$, откъдето

$$J_1(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right|-\sqrt{3}.arctg\frac{2.\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}+C,\text{ т.е.}$$

(7) $\quad J_1(x)=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|-\sqrt{3}.arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

Накрая заместваме $J_1(x)$ от (7) в (6) и получаваме окончателно

$$J(x)=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}.J_1(x)=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}.\left[\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|-\sqrt{3}.arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{\sqrt{3}}{3}.arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C'.$$

✍ **За дом. работа: зад. 1.** $J = \int \frac{32x}{(2x-1)(4x^2-16x+15)} dx = ?$.

Решение: най-напред представяме подинтегралната функция като сбор от дробно-рационални функции от I вид.

Преди това нека разложим квадратния тричлен $4x^2 - 16x + 15$ в знаменателя на прости (линейни) множители. Дискриминантата му е

$D = 16^2 - 4.4.15 = 16^2 - 16.15 = 16.(16-15) \equiv 16 = 4^2$,

следователно корените му са $x_{1,2} = \frac{16 \pm 4}{2.4}$, т.е. $x_1 = \frac{16+4}{8} = \frac{5}{2}$ и $x_2 = \frac{16-4}{8} = \frac{3}{2}$.

По този начин квадратният тричлен може да се представя във вида

$a.x^2 + b.x + c = a.(x - x_1)(x - x_2)$, или в нашия случай

$$4x^2 - 16x + 15 = 4.\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 4.\frac{2x-5}{2}.\frac{2x-3}{2} = (2x-5).(2x-3).$$

Сега вече можем да представим подинтегралната функция като сбор от дробно-рационални функции от I вид

$$\frac{32x}{(2x-1)(2x-5)(2x-3)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{2x-5} + \frac{C}{2x-3} =$$

$$= \frac{A(2x-5)(2x-3) + B(2x-1)(2x-3) + C(2x-1)(2x-5)}{(2x-1)(4x^2-16x+15)} =$$

$$= \frac{4A.x^2 - 6A.x - 10A.x + 15A + 4Bx^2 - 6Bx - 2Bx + 3B + 4Cx^2 - 10.Cx - 2.Cx + 5C}{(2x-1)(4x^2-16x+15)} =$$

$$= \frac{4(A+B+C).x^2 - (16A + 8B + 12C).x + (15A + 3B + 5C)}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}.$$

И така

$$\frac{0.x^2 + 32x + 0}{(2x-1)(4x^2-16x+15)} = \frac{4(A+B+C).x^2 - (16A + 8B + 12C).x + (15A + 3B + 5C)}{(2x-1)(4x^2-16x+15)},$$

откъдето следва системата от уравнения за A, B и C, която решаваме чрез събиране

$$\left|\begin{array}{l} A + B + C = 0 \\ -(16A + 8B + 12C) = 32 \\ 15A + 3B + 5C = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} A + B + C = 0 \\ 4A + 2B + 3C = -8 \\ 15A + 3B + 5C = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{r} (-2)\times \\ \\ (-2/3)\times \end{array}\left|\begin{array}{l} A + B + C = 0 \\ 4A + 2B + 3C = -8 \\ 15A + 3B + 5C = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} -2A - 2B - 2C = 0 \\ 4A + 2B + 3C = -8 \\ -10A - 2B - (10/3)C = 0 \end{array}\right.$$

Събираме почленно второто с първото, и второто с третото уравнение, с което елиминираме B, и получаваме следната система от 2 уравнения:

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} 2A + C = -8 \\ -6A - (10/3)\,C + (9/3)C = -8 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 2A + C = -8 \\ -6A - (1/3)\,C = -8 \end{array} \right| \times 3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} 2A + C = -8 \\ -18A - C = -24 \end{array} \right.$$

Събираме почленно и тези две уравнения, с което елиминираме и С, и получаваме $-16A = -32$, откъдето следва $A = 2$. Връщайки се назад, изразяваме последователно:

☞ **C**: от уравнението $2A + C = -8$, т.е. $C = -8 - 2A$, $\Rightarrow$ $C = -12$, и

☞ **B**: от уравнението $A + B + C = 0$, т.е. $B = -A - C$, $\Rightarrow$ $B = 10$.

Така получаваме представянето

$$\frac{32x}{(2x-1)(2x-5)(2x-3)} = \frac{2}{2x-1} + \frac{10}{2x-5} - \frac{12}{2x-3},$$

с което заместваме в интеграла и получаваме

$$J = \int \left[\frac{2}{2x-1} + \frac{10}{2x-5} - \frac{12}{2x-3} \right] dx + C = 2\int \frac{dx}{2x-1} + 10\int \frac{dx}{2x-5} - 12\int \frac{dx}{2x-3} + C =$$

$$= 2\frac{1}{2}\int \frac{d(2x-1)}{2x-1} + 10\frac{1}{2}\int \frac{d(2x-5)}{2x-5} - 12\frac{1}{2}\int \frac{d(2x-3)}{2x-3} + C =$$

$$= \ln|\,2x-1\,| + 5.\ln|\,2x-5\,| - 6.\ln|\,2x-3\,| + C$$

Отг.: $J = \ln|\,2x-1\,| + 5.\ln|\,2x-5\,| - 6.\ln|\,2x-3\,| + C$ **.**

✍ **За дом. работа: зад. 2.** $J = \int \frac{7x-4}{3x^2+2x+5} dx = ?$

Решение:

Квадратният тричлен в знаменателя $3x^2 + 2x + 5 = x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \equiv x^2 + px + q$ няма реални корени, понеже дискриминантата му $D = 2^2 - 4.3.5$ е отрицателна. Очевидно интегралът от тази дробно-линейна функция е от II вид, следователно трябва да приложим субституцията на Хорнер $x = t - \frac{p}{2}$ $\equiv t - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right) = t - \frac{1}{3}$, като очевидно $dx = d\,t$. При тази субституция подинтегралната функция ще се представи така:

$$\frac{7x-4}{3x^2+2x+5} = \frac{7\left(t-\frac{1}{3}\right)-4}{3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(t-\frac{1}{3}\right)+5} = \frac{7.t - \frac{7}{3} - 4}{3t^2 - 3.2.t.\frac{1}{3} + 3.\frac{1}{9} + 2.t - \frac{2}{3} + 5} =$$

$$=\frac{7.t-\frac{7}{3}-\frac{12}{3}}{3t^2+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+5}=\frac{7.t-\frac{19}{3}}{3t^2+-\frac{1}{3}+\frac{15}{3}}=\frac{7.t-\frac{19}{3}}{3t^2+\frac{14}{3}}.$$

Заместваме това представяне в интеграла, и получаваме

$$J=\int\frac{7x-4}{3x^2+2x+5}dx=\int\frac{7.t-\frac{19}{3}}{3t^2+\frac{14}{3}}\,dt=7.\int\frac{t\,dt}{3t^2+\frac{14}{3}}-\frac{19}{3}\int\frac{dt}{3t^2+\frac{14}{3}}=$$

$$=7.\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2)}{3t^2+\frac{14}{3}}-\frac{19}{3}\int\frac{dt}{\frac{14}{3}\left(\frac{9}{14}t^2+1\right)}=\frac{7}{2}.\frac{1}{3}\int\frac{d\left(3t^2+\frac{14}{3}\right)}{\left(3t^2+\frac{14}{3}\right)}-\frac{19}{3}.\int\frac{\frac{1}{\sqrt{14}.}\frac{3}{\sqrt{14}}dt}{\left(\frac{3}{\sqrt{14}}t\right)^2+1}=$$

$$=\frac{7}{6}.\ln\left|3t^2+\frac{14}{3}\right|-\frac{19}{3\sqrt{14}}.\int\frac{d\left(\frac{3t}{\sqrt{14}}\right)}{\left(\frac{3t}{\sqrt{14}}\right)^2+1}=\frac{7}{6}.\ln\left(3t^2+\frac{14}{3}\right)-\frac{19}{3\sqrt{14}}.arctg\left(\frac{3t}{\sqrt{14}}\right).$$

Остава да възстановим старата интеграционна променлива x от полагането. За целта в получения резултат заместваме $t=x+\frac{1}{3}$:

$$J=\frac{7}{6}.\ln\left(3t^2+\frac{14}{3}\right)-\frac{19}{3\sqrt{14}}.arctg\left(\frac{3t}{\sqrt{14}}\right)=\frac{7}{6}.\ln\left[3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{14}{3}\right]-\frac{19}{3\sqrt{14}}.arctg\left[\frac{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{14}}\right]=$$

$$=\frac{7}{6}.\ln\left[3x^2+3.2.\frac{1}{3}x+3.\frac{1}{9}+\frac{14}{3}\right]-\frac{19}{3\sqrt{14}}.arctg\left[\frac{3x+1}{\sqrt{14}}\right]=$$

$$=\frac{7}{6}.\ln\left[3x^2+2.x+5\right]-\frac{19}{3\sqrt{14}}.arctg\left[\frac{3x+1}{\sqrt{14}}\right],$$

където е използван табличният интеграл $\boxed{\int\frac{d\xi}{1+\xi^2}=arctg\,\xi}$.

И така: $J=\frac{7}{6}.\ln\left[3x^2+2.x+5\right]-\frac{19}{3\sqrt{14}}.arctg\left[\frac{3x+1}{\sqrt{14}}\right]$

Въпрос 4. Определен интеграл. Дефиниция и свойства. Лице на криволинеен трапец

1. Дефиниция:

Дадена е функцията $f(x)$, $x\in[a,b]$. Разглеждаме **разбиване** τ на интервала $[a,b]$ с делящи точки $x_0=a<x_1<x_2<.....<x_i<.....<x_n=b$.

По този начин интервалът $[a,b]$ се представя във вида $[a,b]=[x_0,x_1]\cup[x_1,x_2]\cup...\cup[x_{i-1},x_i]\cup...[x_{n-1},x_n]$, като дължините на всеки от интервалите са: $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, …., $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, ….. , $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$.

Диаметър на разбиването ще наричаме най-големият измежду интервалите, т.е. $\delta_\tau = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i$. Избираме точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i=1,2,....,n$.

Под **Риманова интегрална сума** $\sigma(f,\tau,\xi_i)$ ще разбираме величината

$$\sigma(f,\tau,\xi_i) = f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+..+f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})+..+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1}) =$$
$$= f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + .. + f(\xi_i)\Delta x_i + .. + f(\xi_n)\Delta x_n,$$

където $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \equiv f(\xi_i)\Delta x_i$ представлява лицето на i-тия правоъгълник, имащ за страни стойността на функцията $f(\xi_i)$ в точка ξ_i от този интервал, и дължината $(x_i - x_{i-1}) \equiv \Delta x_i$ на същия този интервал.

Тази сбор от произведения, при крайно разбиване, може да бъде представен чрез сумата

$$\boxed{\sigma_\tau(f,\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i},$$

която, при геометрична интерпретация, дава сбора от лицата на гореуказаните правоъгълници.

<u>**Определение:**</u> Казваме, че функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a,b]$, ако съществува границата, към която клони сумата $\sigma_\tau(f,\xi_i)$, когато диаметъра на разбиването δ_τ клони към нула, т.е. ако съществува $\lim\limits_{\delta_\tau\to 0} \sigma_\tau(f,\xi_i)$.

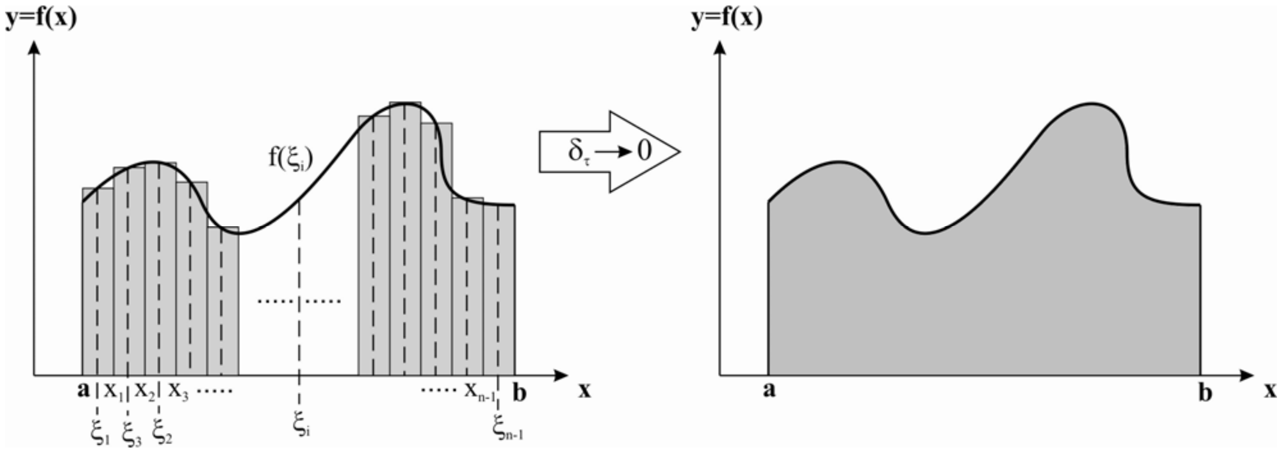
Големината на $\sigma_\tau(f,\xi_i)$ при $\delta_\tau \to 0$, (**ако съществува**), се нарича **определен интеграл**, и се бележи

$$J = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Следователно $\boxed{J = \lim\limits_{\delta_\tau\to 0} \sigma_\tau(f,\xi_i)}$.

2. Геометричен смисъл

Чрез определения интеграл се изразява **лицето на криволинеен трапец с вертикални основи** $f(\xi_i)$ ($f(x)\ge 0$).



Както вече видяхме сумата $\sigma_\tau(f,\xi_i)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ представлява **сума от лица на правоъгълници**. Тази сума, при малки дължини на интервалите Δx_i, е приблизително равна на лицето S_{Tp} на криволинейния трапец, имащ за основи $f(a)$ и $f(b)$, и е заключен между абсцисната ос и графиката на функцията $f(x)$, като клони към него (**интуитивно**) при $\delta_\tau \to 0$, т.е. $S_{Tp}=\lim\limits_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau(f,\xi_i)$.

Но от друга страна, както вече видяхме, $\lim\limits_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau(f,\xi_i)=\int_a^b f(x)\,dx$.

От последните две равенства следва, че $S_{Tp}=\int_a^b f(x)\,dx$.

3. Свойства на определения интеграл

☞ **Първо свойство:** $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$.

Доказателство:

$$\sigma_\tau(f+g,\xi_i)=[f(\xi_1)+g(\xi_1)]\Delta x_1+[f(\xi_2)+g(\xi_2)]\Delta x_2+..+[f(\xi_n)+g(\xi_n)]\Delta x_n=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i=\sigma_\tau(f,\xi_i)+\sigma_\tau(g,\xi_i),$$

следователно

(1) $\lim\limits_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau(f+g,\xi_i)=\lim\limits_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau(f,\xi_i)+\lim\limits_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau(g,\xi_i)$.

Но: $\lim\limits_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau(f+g,\xi_i)=\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx$;

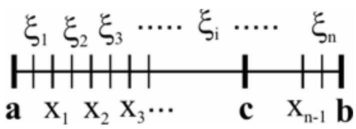
$\lim\limits_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau(f,\xi_i)=\int_a^b f(x)\,dx$; и

$\lim\limits_{\delta_\tau\to 0}\sigma_\tau(g,\xi_i)=\int_a^b g(x)\,dx$,

откъдето след заместване в (1) получаваме търсеното доказателство.

☞ **Второ свойство:**

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$



☞ **Трето свойство:** ако $a<c<b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

☞ **Четвърто свойство:** ако за $\forall x\in[a,b]$ е изпълнено $m\le f(x)\le M$, то

$$\boxed{m.(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M.(b-a)}.$$

Доказателство: очевидно за $\forall i \quad m \le f(\xi_i) \le M$. Нека умножим двете страни на последното равенство със $(x_i - x_{i-1})$, при което получаваме

$m.(x_i - x_{i-1}) \le f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \le M.(x_i - x_{i-1})$, $i = 1, 2, ..., n$.

Нека тези неравенства (за $\forall i$) съберем почленно

$\sum_{i=1}^{n} m.(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M.(x_i - x_{i-1})$, или още

$m.\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le M.\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$.

Но $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \Delta x \equiv (b-a)$, и още по дефиниция за $\sigma_\tau(f, \xi_i)$ следва, че

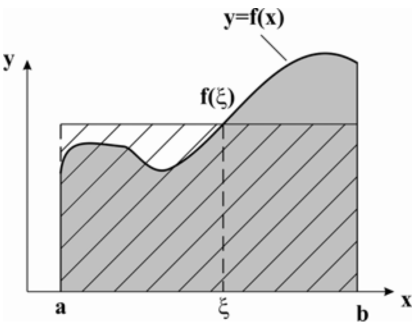
$m.(b-a) \le \sigma_\tau(f, \xi_i) \le M.(b-a)$.

Ако в последното неравенство (двойно) извършим граничен преход $\Delta x \to 0$, и отчетем <u>второ свойство</u>, ще получим

$\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} m.(b-a) \le \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \sigma_\tau(f, \xi_i) \le \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} M.(b-a)$, откъдето следва

$\boxed{m.(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M.(b-a)}$, к.т.д.

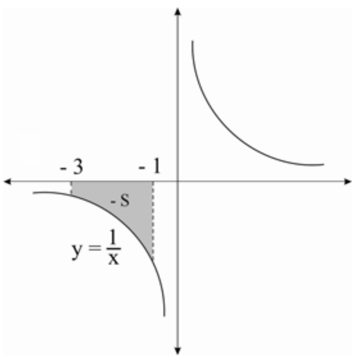
☞ **Пето свойство:** ако $f(x)$ е **непрекъсната** в $[a,b]$, то $\exists$ т. $\xi \in [a,b]$, че



$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)}$ - **теорема за средната стойност**

Доказателството на пето свойство почива на четвърто свойство и на геометричната интерпретация на определен интеграл.

Според тази геометрична интерпретация стойността на определения интеграл, даваща се с лицето на оцветения в сиво криволинеен трапец, е равна на лицето на защрихования правоъгълник, имащ страни $f(\xi)$ и $(b-a)$ съответно.



☞ **Примери и задачи, свързани с геометричната интерпретация на интеграл**:

Пример:

$$\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Bigg|_{-3}^{-1} = \ln|-1| - \ln|-3| = \ln 1 - \ln 3 = -\ln 3,$$

понеже $\ln 1 = 0$.

Функцията $\dfrac{1}{x}$ е непрекъсната за $\forall x \ne 0$.

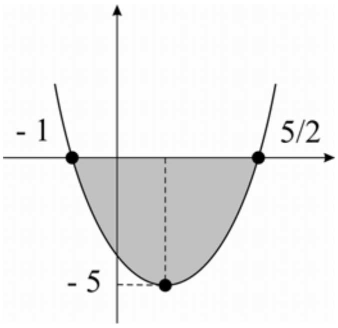
✍ **Задача 1:** Намерете лицето на фигурата, заградена от оста Ох и параболата $y = 2x^2 - 3x - 5$.

Решение: Корените на квадратния тричлен $y = 2x^2 - 3x - 5$ са:

$$x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{4}, \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{3+7}{4} = \frac{5}{2}, \quad x_2 = \frac{3-7}{4} = -1.$$

Върхът на параболата има абсциса $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-3)}{2.2} = \frac{3}{4}$, и ордината

$$y_0 = y(x_0) = 2{x_0}^2 - 3x_0 - 5 = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\frac{3}{4} - 5 = \frac{18}{16} - \frac{9}{4} - 5 = \frac{18}{16} - \frac{36}{16} - \frac{80}{16} = -\frac{98}{16} = -6{,}125$$



Лицето на защрихованата фигура е

$$S = -\int_{-1}^{5/2} (2x^2 - 3x - 5)\,dx.$$

Стойността на интеграла се взема със знак „минус„, защото в целия интервал $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$ функцията $y = 2x^2 - 3x - 5 \le 0$.

$$S = -\int_{-1}^{5/2} (2x^2 - 3x - 5)\,dx = -2\int_{-1}^{5/2} x^2\,dx + 3\int_{-1}^{5/2} x\,dx + 5\int_{-1}^{5/2} dx = -2\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{5/2} + 3\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{5/2} + 5x\Bigg|_{-1}^{5/2} =$$

$$= -\frac{2}{3}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^3 - (-1)^3\right] + \frac{3}{2}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^2 - (-1)^2\right] + 5\left[\frac{5}{2} - (-1)\right] =$$

$$= -\frac{2}{3}\left[\frac{125}{8} + 1\right] + \frac{3}{2}\left[\frac{25}{4} - 1\right] + 5\left[\frac{5}{2} + 1\right] = -\frac{2}{3}.\frac{133}{8} + \frac{3}{2}.\frac{21}{4} + 5.\frac{7}{2} = \dots \approx 14{,}5$$

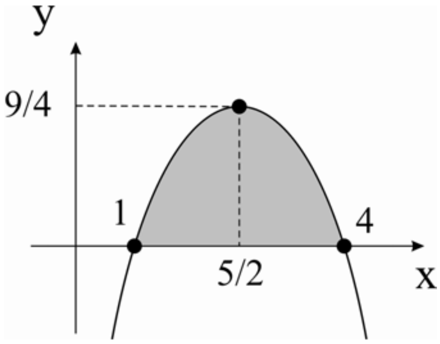
✍ **Задача за СР:** Намерете лицето на фигурата, заключена между оста Ох и параболата $y = -x^2 + 5x - 4$

Решение: Корените на квадратния тричлен $y = -x^2 + 5x - 4$ са:

$$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2.(-1)} = -\frac{-5 \pm 3}{2}, \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{-5+3}{2} = 1, \quad x_2 = -\frac{-5-3}{2} = 4.$$

Върхът на параболата има абсциса $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2.(-1)} = \frac{5}{2}$, и ордината

$$y_0 = y(x_0) = -{x_0}^2 + 5x_0 - 4 = -\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5.\frac{5}{2} - 4 = -\frac{25}{4} + \frac{25}{2} - 4 = -\frac{25}{4} + \frac{50}{4} - \frac{16}{4} = \frac{9}{4}.$$



Лицето на защрихованата фигура е

$$S=\int_1^4(-x^2+5x-4)\,dx.$$

$$S=\int_1^4(-x^2+5x-4)\,dx=-\int_1^4 x^2\,dx+5\int_1^4 x\,dx-4\int_1^4 dx=$$

$$=-\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^4+5\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^4-4x\Bigg|_1^4=$$

$$=-\left(\frac{4^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right)+5\left(\frac{4^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)-4(4-1)=-\left(\frac{64}{3}-\frac{1}{3}\right)+5\left(\frac{16}{2}-\frac{1}{2}\right)-12=$$

$$=-\frac{63}{3}+5.\frac{15}{2}-12=-21+\frac{75}{2}-12=37\frac{1}{2}-33=4\frac{1}{2}.$$

И така, лицето на фигурата, заключена между оста Ох и параболата $y=-x^2+5x-4$ е $S=4\frac{1}{2}$.

Въпрос 4. Пресмятане на определени интеграли. Формула на Нютон-Лайбниц. Интегриране по части

Формула на Нютон-Лайбниц: нека $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$, и нека $F(x)$ е една нейна примитивна в $[a,b]$, т.е. $F'(x)=f(x)$. Тогава

(1) $$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)\equiv F(x)\Bigg|_a^b.$$

Намиране на $F(x)=\int f(x)\,dx$, т.е. на $F'(x)=f(x)$.

Пример: $$\int_{\pi/3}^{\pi/6}\frac{dx}{\cos^2 x}=\int_{\pi/3}^{\pi/6}d(tg\,x)=tg\,x\Bigg|_{\pi/3}^{\pi/6}=tg\frac{\pi}{6}-tg\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}=-\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Интегриране по части:

☞ $$\boxed{\int_a^b u(x)\,dv(x)=u(x)v(x)\Bigg|_a^b-\int_a^b v(x)\,du(x)},$$

или още

☞ $$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\,dx=u(x)v(x)\Bigg|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)\,dx}.$$

Доказателство: изхождаме от формулата за диференциране

$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.

Ако положим $[u(x)v(x)]^{/} = F^{/}(x)$ и $f(x) = u^{/}(x)v(x) + u(x)v^{/}(x)$, то съгласно формулата на Нютон-Лайбниц ще следва, че

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \equiv F(x)\Big|_a^b, \text{ т.е.}$$

$$\int_a^b [u^{/}(x)v(x) + u(x)v^{/}(x)]\,dx = [u(x)v(x)]\Big|_a^b, \text{ или}$$

$$\int_a^b u^{/}(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v^{/}(x)\,dx = [u(x)v(x)]\Big|_a^b, \text{ или}$$

$$\int_a^b u(x)v^{/}(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u^{/}(x)\,dx, \text{ с което теоремата е доказана.}$$

✍ **Пример (зад.1):** $J = \int_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx = ?$

Решение: За решаването на този интеграл ще вземем под внимание следните съображения:

1) Нека положим $u(x) = \ln x$, и $v(x) = x$, което ще използваме за интегриране по части;

2) $\int_{1/e}^{e} \ldots.. dx = \int_{1/e}^{1} \ldots.. dx + \int_{1}^{e} \ldots.. dx$, което ще позволи да „разкрием” $|\ln x|$, а именно

а) $\int_{1/e}^{1} |\ln x|\,dx = \int_{1/e}^{1} (-\ln x)\,dx$, понеже при $\left[\frac{1}{e} \le x \le 1\right] \Rightarrow \ln x < 0$, т.е. $|\ln x| = -\ln x$,

и

б) $\int_{1}^{e} |\ln x|\,dx = \int_{1}^{e} (+\ln x)\,dx$, понеже при $[1 \le x \le e] \Rightarrow \ln x > 0$, т.е. $|\ln x| = +\ln x$;

3) ***Мат. справка:** $\ln e = 1$, $\ln\frac{1}{e} = \ln e^{-1} = -1.\ln e = -1$, и $\ln 1 = 0$.

С отчитането на тези 3 факта ще имаме:

$$J = \int_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx = \int_{1/e}^{1} (-\ln x)\,dx + \int_{1}^{e} (+\ln x)\,dx \equiv \int_{1}^{e} \ln x\,dx - \int_{1/e}^{1} \ln x\,dx = \ldots (\textit{по части}) =$$

$$= x.\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\,d(\ln x) - \left[x.\ln x\Big|_{1/e}^{1} - \int_{1/e}^{1} x\,d(\ln x)\right] =$$

$$= [e.\ln e - 1.\ln 1] - \int_1^e x\frac{1}{x}dx - \left[1.\ln 1 - \frac{1}{e}.\ln\frac{1}{e}\right] + \int_{1/e}^{1} x\frac{1}{x}dx =$$

$$= e - \int_1^e dx + \left[\frac{1}{e}.\ln\frac{1}{e}\right] + \int_{1/e}^{1} dx = e - (e-1) + \left[\frac{1}{e}.\ln e^{-1}\right] + \left[1 - \frac{1}{e}\right] = \frac{1}{e}(-1) - \frac{1}{e} = -\frac{2}{e}.$$

И така, $J = \int_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx = -\frac{2}{e}$.

✍ **Зад. 2.** $J = \int_1^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx = ?$

Решение: За решаване „по части” приемаме, че $u(x) = \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}$ и $v(x) = x$. Така получаваме

(1) $$J = \int_1^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx = x.\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\ \Bigg|_1^3 - \int_1^3 x\, d\left[\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right].$$

Използваме, че производната $\frac{d}{d\xi}(\arcsin\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}$, и че $dF(x) = \frac{dF(x)}{dx}.dx$, и получаваме:

$$d\left[\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right] = \frac{d}{dx}\left[\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right].dx = \frac{1}{\sqrt{1-\left[\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right]^2}}\frac{d}{dx}\left[\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right].dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}}\left(\frac{1}{2}\left[\frac{x}{1+x}\right]^{-1/2}\right)\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{1+x}\right].dx = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x-x}{1+x}}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\left[\frac{1(1+x)-x.1}{(1+x)^2}\right].dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{1+x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\frac{1}{(1+x)^2}.dx = \frac{1}{2}\frac{(1+x)}{(1+x)^2.\sqrt{x}}.dx = \frac{dx}{2(1+x)\sqrt{x}},$$

т.е. намерихме, че

(2) $$d\left[\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right] = \frac{1}{2}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

Заместваме (2) в (1) и получаваме

$$J = x.\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\ \Bigg|_1^3 - \int_1^3 x\left[\frac{1}{2}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}\right] = 3.\arcsin\sqrt{\frac{3}{1+3}} - 1.\arcsin\sqrt{\frac{1}{1+1}} - \frac{1}{2}\int_1^3\frac{x\,dx}{(1+x)\sqrt{x}} =$$

$$= 3.\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\int_1^3\frac{x}{\sqrt{x}}\frac{dx}{1+x} = 3.\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_1^3\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_1^3\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx.$$

И така

(3) $$J = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_1^3\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx \equiv \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}.J_1,$$

където интегралът $J_1 = \int_1^3\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$ ще решим отделно. За неговото решаване полагаме

(4) $x = t^2$, т.е. $dx = 2t.dt$,

при което $x = 1 \to t = 1$, а $x = 3 \to t = \sqrt{3}$. Така интегралът J_1 добива вида

(5) $$J_1 = \int_1^3\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx = \int_1^{\sqrt{3}}\frac{t}{1+t^2}2t\,dt = 2\int_1^{\sqrt{3}}\frac{t^2}{1+t^2}dt = 2\int_1^{\sqrt{3}}\frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt =$$

$$= 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+t^2}{1+t^2}\,dt - 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = 2\int_1^{\sqrt{3}} dt - 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = 2t\Big|_1^{\sqrt{3}} - 2.arctg\,t\Big|_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= 2(\sqrt{3}-1) - 2.(arctg\sqrt{3} - arctg\,1) = 2(\sqrt{3}-1) - 2.(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = 2(\sqrt{3}-1) - 2.\frac{\pi}{12}.$$

И така доказахме, че

(6) $\qquad J_1 = 2(\sqrt{3}-1) - \dfrac{\pi}{6}.$

Заместваме (6) в (3) и получаваме:

(7) $\qquad J = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{1}{2}.J_1 = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\left(2(\sqrt{3}-1) - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3\pi}{4} - (\sqrt{3}-1) + \dfrac{\pi}{12} =$

$$= \frac{3}{3}.\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{12} - \sqrt{3} + 1 = \frac{10\pi}{12} - \sqrt{3} + 1 = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} + 1.$$

Въпрос 5: Смяна на променливата при определени интеграли

Теорема (теорема за смяна на променливата)**:** Нека $f(x)$ е една непрекъсната в $[a,b]$ функция. Полагаме $x = \varphi(t)$, където $\varphi(t)$ има непрекъсната първа производна $\varphi^{/}(t)$ в интервал $[\alpha,\beta]$, и нека е изпълнено $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$. Тогава

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)].\varphi^{/}(t)\,dt,$$

където е използвано, че $dx = d[\varphi(t)] = \dfrac{d}{dt}[\varphi(t)].dt = \varphi^{/}(t).dt$.

✍ **Пример 1:** $\quad J = \displaystyle\int_1^{4/3} \frac{2x}{\sqrt{3x^2+2x-1}}\,dx = ?$

Решение: Полагаме: $x = t - \dfrac{b}{2a} = t - \dfrac{2}{2.3} = t - \dfrac{1}{3}$, като очевидно $dx = dt$.

При $x = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = \alpha - \dfrac{1}{3}$, т.е. $\alpha = \dfrac{4}{3}$.

При $x = \dfrac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{4}{3} = \beta - \dfrac{1}{3}$, т.е. $\beta = \dfrac{5}{3}$.

След смяната на променливите интегралът добива вида

$$J = \int_{4/3}^{5/3} \frac{2.\left(t - \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(t - \frac{1}{3}\right) - 1}}\,dt = \int_{4/3}^{5/3} \frac{2t - \frac{2}{3}}{\sqrt{3t^2 - 3.2.\frac{1}{3}.t + 3.\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2t - \frac{2}{3} - 1}}\,dt =$$

$$=\int_{4/3}^{5/3}\frac{2t-\frac{2}{3}}{\sqrt{3t^2+\frac{1}{3}-\frac{5}{3}}}dt=\int_{4/3}^{5/3}\frac{2t-\frac{2}{3}}{\sqrt{3t^2-\frac{4}{3}}}dt=2\int_{4/3}^{5/3}\frac{t\,dt}{\sqrt{3t^2-\frac{4}{3}}}-\frac{2}{3}\int_{4/3}^{5/3}\frac{dt}{\sqrt{3t^2-\frac{4}{3}}}=$$

$$=2.\frac{1}{2}\int_{4/3}^{5/3}\frac{d(t^2)}{\sqrt{3t^2-\frac{4}{3}}}-\frac{2}{3}\int_{4/3}^{5/3}\frac{dt}{\sqrt{3\left(t^2-\frac{4}{9}\right)}}=\frac{1}{3}\int_{4/3}^{5/3}\frac{d(3t^2-\frac{4}{3})}{\sqrt{3t^2-\frac{4}{3}}}-\frac{2}{3}\int_{4/3}^{5/3}\frac{dt}{\sqrt{3}\sqrt{t^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\int_{4/3}^{5/3}\left(3t^2-\frac{4}{3}\right)^{-1/2}d(3t^2-\frac{4}{3})-\frac{2}{3\sqrt{3}}\int_{4/3}^{5/3}\frac{dt}{\sqrt{t^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}}=$$

…… тук ще използваме, че $\boxed{\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm a^2}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2\pm a^2}\right|}$ ……

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{(-1/2)+1}\left(3t^2-\frac{4}{3}\right)^{1/2}\Bigg|_{4/3}^{5/3}-\frac{2}{3\sqrt{3}}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right|\Bigg|_{4/3}^{5/3}=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{3\left(\frac{5}{3}\right)^2-\frac{4}{3}}-\sqrt{3\left(\frac{4}{3}\right)^2-\frac{4}{3}}\right)-\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\ln\left|\frac{5}{3}+\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right|-\ln\left|\frac{4}{3}+\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right|\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{3\frac{25}{9}-\frac{4}{3}}-\sqrt{3\frac{16}{9}-\frac{4}{3}}\right)-\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\ln\left|\frac{5}{3}+\sqrt{\frac{25}{9}-\frac{4}{9}}\right|-\ln\left|\frac{4}{3}+\sqrt{\frac{16}{9}-\frac{4}{9}}\right|\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{25}{3}-\frac{4}{3}}-\sqrt{\frac{16}{3}-\frac{4}{3}}\right)-\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\ln\left|\frac{5}{3}+\sqrt{\frac{21}{9}}\right|-\ln\left|\frac{4}{3}+\sqrt{\frac{12}{9}}\right|\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{21}{3}}-\sqrt{\frac{12}{3}}\right)-\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\ln\left|\frac{5}{3}+\sqrt{\frac{7}{3}}\right|-\ln\left|\frac{4}{3}+\sqrt{\frac{4}{3}}\right|\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{7}-\sqrt{4}\right)-\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\ln\left|\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right|-\ln\left|\frac{4}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right|\right)=$$

$$=\frac{2\sqrt{7}-4}{3}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\ln\left|\frac{4}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right|-\frac{2}{3\sqrt{3}}\ln\left|\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right|.$$

✍ **Зад. 2:** $J=\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\;dx=?$

Решение: Полагаме: $1-x=t^3$, т.е. $x=1-t^3 \;\Rightarrow\; dx=-3t^2dt$

- при $x=1 \;\to\; 1-1=\alpha^3 \;\Rightarrow\; \alpha=0$.
- при $x=9 \;\to\; 1-9=\beta^3 \;\Rightarrow\; \beta=-2$.

Така след смяната на променливите интегралът добива вида

(1) $$J=\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\;dx=\int_0^2(1-t^3)\sqrt[3]{t^3}\;(-3t^2dt)=-3\int_0^2(1-t^3)\,t.t^2dt=$$

$$=-3\int_0^2 t^3(1-t^3)\,dt=-3\int_0^2 t^3\,dt+3\int_0^2 t^6\,dt=-3\frac{t^4}{4}\Bigg|_0^2+3\frac{t^7}{7}\Bigg|_0^2=$$

$$=-\frac{3}{4}(2^4-0^4)+\frac{3}{7}(2^7-0^7)=-\frac{3}{4}.16+\frac{3}{7}2^7=-12+\frac{3.128}{7}=\frac{384}{7}-\frac{84}{7}=\frac{300}{7}=42\frac{6}{7}.$$

✍ **Пример 2:** $\int_{-2}^{2}\sqrt{\frac{2-x}{3+x}}\,dx=?$

Решение: полагаме $\boxed{\frac{2-x}{3+x}=t^2}$.

Следователно $2-x=t^2(3+x)$, т.е. $x(t^2+1)=2-3t^2$, откъдето $\boxed{x=\frac{2-3t^2}{t^2+1}}$.

$$dx=\frac{-6t(t^2+1)-(2-3t^2).2t}{(t^2+1)^2}dt=\frac{-6t^3-6t-4t+6t^3}{(t^2+1)^2}dt=\frac{-10t}{(t^2+1)^2}dt.$$

- при $x=-2 \to \frac{2-(-2)}{3+(-2)}=\alpha^2 \;\Rightarrow\; \alpha=2$.
- при $x=2 \;\to\; \frac{2-2}{3+2}=\beta^2 \;\Rightarrow\; \beta=0$.

Така след смяната на променливите интегралът добива вида

(1) $$J=\int_{-2}^{2}\sqrt{\frac{2-x}{3+x}}\,dx=\int_2^0\sqrt{t^2}\;\frac{-10t}{(t^2+1)^2}\,dt=-10\int_2^0 t\,\frac{t}{(t^2+1)^2}\,dt=$$

$$=-10\frac{1}{2}\int_2^0 t(t^2+1)^{-2}\,d(t^2+1)=5\int_0^2 t(t^2+1)^{-2}\,d(t^2+1),$$

където е използвано, че $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$.

За да се подготвим за интегриране по части, е нужно да внесем $(t^2+1)^{-2}$ под знака на диференциала. А това става, като внесем в (под) диференциала примитивната функция $F(t)=\int(t^2+1)^{-2}\,dt=\frac{(t^2+1)^{-1}}{-1}$. Така за интеграла J получаваме по-нататък

$$J=5\int_0^2 t\,d\,\frac{(t^2+1)^{-1}}{-1}=-5\int_0^2 t\,d(t^2+1)^{-1}=\text{.... (по части)....}=$$

$$= -5t(t^2+1)^{-1} \Big|_0^2 + 5\int_0^2 (t^2+1)^{-1}\,dt =$$

$$= -5\frac{t}{t^2+1}\Big|_0^2 + 5\int_0^2 \frac{dt}{t^2+1} = -5\left(\frac{2}{2^2+1} - \frac{0}{0^2+1}\right) + 5\int_0^2 \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= -5\frac{2}{5} + 5.arctg\, t \Big|_0^2 = -2 + 5.(arctg\,2 - arctg\,0) = -2 + 5arctg\,2\,,$$

където е използвано, че $\boxed{\int \frac{dt}{t^2+1} = arctg\ t}$, и $arctg\ 0 = 0$.

✍ **Пример 3:** $J = \int\limits_{\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}\,dx = ?$

Решение: понеже $\sqrt{3\left[1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2\right]} = \sqrt{3}\sqrt{\left[1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2\right]}$, то удачно е да положим $\boxed{x = \sqrt{3}.\sin t}$.

При това полагане подкоренната величина ще стане

$$\sqrt{3-x^2} = ... = \sqrt{3}\sqrt{\left[1-\left(\frac{\sqrt{3}.\sin t}{\sqrt{3}}\right)^2\right]} = \sqrt{3}\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{3}\sqrt{\cos^2 t} = \sqrt{3}.\cos t\,.$$

Тогава $dx = \sqrt{3}.\cos t\ dt$, като:

- при $x = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \rightarrow\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.\sin\alpha$, т.е. $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\Rightarrow\ \alpha = \frac{\pi}{6}$;
- при $x = \sqrt{3} \ \rightarrow\ \sqrt{3} = \sqrt{3}.\sin\alpha$, т.е. $\sin\alpha = 1$, $\Rightarrow\ \alpha = \frac{\pi}{2}$.

Така след смяната на променливите интегралът добива вида

$$J = \int\limits_{\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}\,dx = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sqrt{3}.\cos t.(\sqrt{3}.\cos t\,dt) = 3\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = 3\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= 3\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{3}{2}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} dt + \frac{3}{2}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos 2t\,dt = \frac{3}{2}t\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} + \frac{3}{2}.\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos 2t\,d(2t) =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{3}{4}.\sin 2t\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{3}{2}\left(\frac{3\pi-\pi}{6}\right) + \frac{3}{4}.\left(\sin 2\frac{\pi}{2} - \sin 2\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{\pi}{3} + \frac{3}{4}.\left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}.\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

✍ **За Д.Р.:** $J = \int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+x+1}\,dx = ?$

Решение: квадратния тричлен в знаменателя има отрицателна дискриминанта, и следователно не може да се разложи на прости множители. Това означава, че подинтегралната функция е дробно-линейна функция от II вид, и затова прилагаме субституцията на Хорнер: $x = t - \dfrac{b}{2a} = t - \dfrac{1}{2.1} = t - \dfrac{1}{2}$, като очевидно $dx = dt$. Така подинтегралната функция добива вида

$$\frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right) + 1} = \frac{1}{2}\frac{2t - 1}{t^2 - 2t\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + t - \frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{2}\frac{2t - 1}{t^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{2}\frac{2t - 1}{t^2 + \frac{3}{4}}$$

Заместваме в интеграла и получаваме

$$J = \int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{2t - 1}{t^2 + \frac{3}{4}} dx = \int_{-1}^{1} \frac{t\,dt}{t^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{d\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)}{t^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}t^2 + 1\right)} = \frac{1}{2}.\ln\left(t^2 + \frac{3}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{1} - \frac{1}{2}.\frac{3}{4}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\left[\left(\frac{\sqrt{3}.\,t}{2}\right)^2 + 1\right]} =$$

$$= \ln\sqrt{t^2 + \frac{3}{4}}\,\Bigg|_{-1}^{1} - \frac{\sqrt{3}}{4}\int_{-1}^{1} \frac{d\left(\frac{\sqrt{3}\;t}{2}\right)}{\left[\left(\frac{\sqrt{3}\;t}{2}\right)^2 + 1\right]} =$$

$$= \left(\ln\sqrt{1^2 + \frac{3}{4}} - \ln\sqrt{(-1)^2 + \frac{3}{4}}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}.arctg\left(\frac{\sqrt{3}\;t}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \left(\ln\sqrt{\frac{7}{4}} - \ln\sqrt{\frac{7}{4}}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}.\left[arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.(+1)\right) - arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.(-1)\right)\right] =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4}.\left[arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = -\frac{\sqrt{3}}{4}.2.arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

При преобразованията е използвано, че $\boxed{\int \frac{dt}{t^2 + 1} = arctg\ t}$, както и че $arctg\ (-\xi) = -arctg\ \xi$, понеже $arctg$ е нечетна функция.

И така $\boxed{J = -\frac{\sqrt{3}}{2}arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$.

Въпрос 6: Несобствени интеграли (от I и II род)

Нека е дадена функция $f(x)$, дефинирана и непрекъсната в $[a,b]$.

1. **Определение:** под несобствен интеграл $J=\int_a^b f(x)\,dx$ се разбира границата (ако тя съществува)

$$J=\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\substack{\beta\to b\\ \beta<b}}\int_a^\beta f(x)\,dx .$$

При това:

а) ако J съществува, то интегралът е сходящ, а

б) ако J не съществува, то интегралът е разходящ.

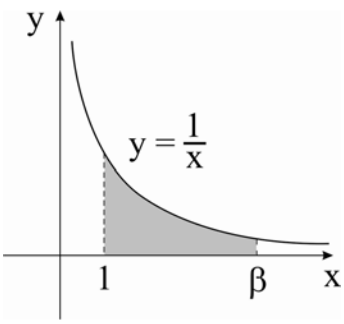
Несобственият интеграл е:

☞ от I род, когато $b=\infty$,

☞ от II род, когато $b<\infty$.

✍ **Пример 1:** (несобствен интеграл от I род) $J=\int_1^\infty \frac{dx}{x}=?$

Решение: $J=\int_1^\infty \frac{dx}{x}=\lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta \frac{dx}{x}=\lim_{\beta\to\infty}\ln|x|\,\Big|_1^\beta=\lim_{\beta\to\infty}(\ln\beta-\ln 1)=\lim_{\beta\to\infty}\ln\beta=\infty .$



Следователно този несобствен интеграл **не съществува** (интегралът е разходящ).

$(\lim_{x\to +0}\frac{1}{x}=\infty \quad\Rightarrow\quad S=\infty)$

✍ **Пример 2:** (несобствен интеграл от I род) $J=\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}=?$

Решение:

$$J=\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}=\lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta \frac{dx}{x^2}=\lim_{\beta\to\infty}\frac{x^{-2+1}}{(-2+1)}\Big|_1^\beta=-\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{x}\Big|_1^\beta=-\lim_{\beta\to\infty}(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{1})=-(0-1)=1,$$

понеже $\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\beta}=0$. В този случай интегралът е сходящ, понеже подинтегралната функция $f(x)=\frac{1}{x^2}$ много бързо клони към нула при $x\to\infty$.

✍ **Пример 3:** (несобствен интеграл от II род) $J=\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}=?$, като очевидно $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2-x}}$ и $f(2)=\infty$.

Решение:

$$J=\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}=\lim_{\substack{\beta\to 2\\ \beta<2}}\int\limits_1^\beta \frac{dx}{\sqrt{2-x}}=\lim_{\substack{\beta\to 2\\ \beta<2}}\int\limits_1^\beta \frac{dx}{\sqrt{2-x}}=-\lim_{\substack{\beta\to 2\\ \beta<2}}\int\limits_1^\beta (2-x)^{-1/2}\,d(-x+2)=$$

$$=-\lim_{\substack{\beta\to 2\\ \beta<2}}\frac{1}{(-1/2+1)}(2-x)^{-\frac{1}{2}+1}\Bigg|_1^\beta=-2\lim_{\substack{\beta\to 2\\ \beta<2}}\sqrt{2-x}\,\Bigg|_1^\beta=-2\lim_{\substack{\beta\to 2\\ \beta<2}}(\sqrt{2-\beta}-\sqrt{2-1})=$$

$$=-2\left(\sqrt{2-\lim_{\substack{\beta\to 2\\ \beta<2}}\beta}-1\right)=-2.(\sqrt{2-2}-1)=-2.(0-1)=2.$$

2. Основни несобствени интеграли от I род

Това са интеграли от вида $J=\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda}$, които са:

☞ сходящи при $\lambda>1$, и

☞ разходящи при $\lambda\le 1$.

3. Пресмятане по формулата на Нютон-Лайбниц

От примери 1 и 2 се вижда, че

ако $F(x)$ е примитивната функция на подинтегралната функция $f(x)$ в интервала $[a,b]$, то интегралът

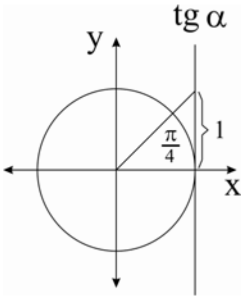
$$\boxed{J=\int\limits_a^\infty f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^\infty=F(\infty)-F(a)}.$$

Под $F(\infty)$ тук разбираме $\lim\limits_{\beta\to\infty}F(\beta)\equiv\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$.

Задачи, свързани с прилагането на формулата на Нютон-Лайбниц - пресметнете интегралите:

✍ **Пример 1:** $J=\int\limits_{\sqrt{3}}^\infty \frac{dx}{3+x^2}=?$

Решение: очевидно $f(x)=\frac{1}{(\sqrt{3})^2+x^2}$ и $f(b)=\infty$ при $b=\infty$. Примитивната й функция е $F(x)=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}$, като в дадения случай $a=\sqrt{3}$, следователно



$$J=\int\limits_{\sqrt3}^{\infty}\frac{dx}{3+x^2}=F(x)\Bigg|_{\sqrt3}^{\infty}=\frac{1}{\sqrt3}arctg\frac{x}{\sqrt3}\Bigg|_{\sqrt3}^{\infty}=\frac{1}{\sqrt3}\left(arctg\,\infty-arctg\frac{\sqrt3}{\sqrt3}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt3}(arctg\,\infty-arctg\,1)=\frac{1}{\sqrt3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt3}\frac{\pi}{4}\equiv\frac{\pi}{4\sqrt3},$$

като в горната формула е отчетено, че $arctg\,\infty=\frac{\pi}{2}$, понеже $tg\frac{\pi}{2}=\frac{\sin\pi/2}{\cos\pi/2}=\frac{1}{0}=\infty$, както и че $arctg1=\frac{\pi}{4}$, понеже $tg\frac{\pi}{4}=\frac{\sin\pi/4}{\cos\pi/4}=\frac{\sqrt2/2}{\sqrt2/2}=1$.

✍ **Пример 2:** $J=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}=?$

Решение: подинтегралната функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ има **особеност** в т. $x=-1$, понеже $f(-1)=\frac{1}{\sqrt{3+2(-1)-(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3-3}}=\infty$. За да намерим примитивната на $f(x)$, нека положим $x=t-\frac{b}{2a}$ $=t-\frac{2}{2.(-1)}=t+1$, следователно $dx=dt$, като:

- при $x=-1 \quad\to\quad -1=\alpha+1 \quad\Rightarrow\quad \alpha=-2$,
- при $x=1 \quad\to\quad 1=\beta+1 \quad\Rightarrow\quad \beta=0$.

Така след смяната на променливите интегралът добива вида

$$J=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}=\int\limits_{-2}^{0}\frac{dt}{\sqrt{3+2(t+1)-(t+1)^2}}=\int\limits_{-2}^{0}\frac{dt}{\sqrt{3+2t+2-t^2-2t-1}}=\int\limits_{-2}^{0}\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}.$$

По този начин изходният интеграл се сведе до интеграл, чиято подинтегрална функция $f(t)=\frac{1}{\sqrt{4-t^2}}$ също има особеност и тя е в т. $t=-2$, понеже $f(-2)=\frac{1}{\sqrt{4-(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{4-4}}=\infty$, **но за сметка на това нейната примитивна функция може веднага да бъде намерена**, и тя е $F(t)=\arcsin\frac{t}{\sqrt4}=\arcsin\frac{t}{2}$, където е използвано, че

$\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=arc\sin t$, и $\Rightarrow$ $\int\frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt a\sqrt{1-\left(\frac{t}{\sqrt a}\right)^2}}=\int\frac{d\left(\frac{t}{\sqrt a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{\sqrt a}\right)^2}}=\arcsin\frac{t}{\sqrt a}$.

Така за несобствения интеграл получаваме по формулата на Нютон-Лайбниц

$$J=\int_{-2}^{0}\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}=F(t)\Bigg|_{-2}^{0}=\arcsin\frac{t}{2}\Bigg|_{-2}^{0}=\arcsin\frac{0}{2}-\arcsin\frac{(-2)}{2}=0-\arcsin(-1)=$$

$=\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}$, където е използвано, че $\arcsin(-\xi)=-\arcsin\xi$, или в случая $\arcsin(-1)=-\arcsin 1$.

✍ **Пример 3:** $J=\displaystyle\int_{2}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x^2-x-2}}=?$

Решение: подинтегралната функция $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$ има особеност в т. $x=2$, понеже $f(2)=\dfrac{1}{\sqrt{2^2-2-2}}=\dfrac{1}{0}=\infty$.

Правим полагането $x=t-\dfrac{b}{2a}=t-\dfrac{(-1)}{2.1}=t+\dfrac{1}{2}$, като очевидно $dx=dt$, и

- при $x=2 \quad\rightarrow\quad 2=\alpha+\dfrac{1}{2}$, т.е. $4=2\alpha+1 \quad\Rightarrow\quad \alpha=\dfrac{3}{2}$,
- при $x=4 \quad\rightarrow\quad 4=\beta+\dfrac{1}{2}$, т.е. $8=2\beta+1 \quad\Rightarrow\quad \beta=\dfrac{7}{2}$.

Така след смяната на променливите имаме

$$J=\int_{2}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x^2-x-2}}=\int_{3/2}^{7/2}\frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\left(t+\frac{1}{2}\right)-2}}=\int_{3/2}^{7/2}\frac{dt}{\sqrt{t^2+2.\frac{1}{2}t+\left(\frac{1}{2}\right)^2-t-\frac{1}{2}-2}}=$$

$$=\int_{3/2}^{7/2}\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2}}=\int_{3/2}^{7/2}\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{1}{4}-\frac{2}{4}-\frac{8}{4}}}=\int_{3/2}^{7/2}\frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{9}{4}}}=\int_{3/2}^{7/2}\frac{dt}{\sqrt{t^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}},\ \text{т.е.}$$

$$J=\int_{3/2}^{7/2}\frac{dt}{\sqrt{t^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}}.$$

За да определим примитивната функция на последния интеграл, използваме, че

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm1}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm1}\right|,\ \text{следователно}\ \int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\int\frac{dx}{a\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2\pm1}}=$$

$$=\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2\pm1}}=\ln\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2\pm1}\right|=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{1}{a}\sqrt{x^2\pm a^2}\right|=\ln\left|\frac{1}{a}\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)\right|=$$

$$=\ln\left(\frac{1}{|a|}\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|\right).$$

В „нашия” интеграл $a=\frac{3}{2}$, и следователно

$$J=\int_{3/2}^{7/2}\frac{dt}{\sqrt{t^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}}=\ln\left(\frac{2}{3}\left|x+\sqrt{x^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}\right|\right)\Bigg|_{3/2}^{7/2}=$$

$$=\ln\left[\frac{2}{3}\left(\frac{7}{2}+\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}\right)\right]-\ln\left[\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}+\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}\right)\right]=$$

$$=\ln\left[\frac{2}{3}\left(\frac{7}{2}+\sqrt{\frac{49-9}{4}}\right)\right]-\ln\left[\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}+0\right)\right]=\ln\left[\frac{1}{3}\left(7+2\sqrt{10}\right)\right]-\ln 1=\ln\left(\frac{7+2\sqrt{10}}{3}\right)$$

✍ **Задачи от ръководството:**

❶ $$\int_{-\infty}^{0}\frac{arctg\,x}{1+x^2}dx=\lim_{\beta\to-\infty}\int_{\beta}^{0}arctg\,x\,d(arctg\,x)=\lim_{\beta\to-\infty}\frac{arctg^2\,x}{2}\Bigg|_{\beta}^{0}=$$

$$=\lim_{\beta\to-\infty}\frac{1}{2}(arctg^2\,0-arctg^2\,\beta)=0-\lim_{\beta\to-\infty}\frac{1}{2}arctg^2\,\beta=-\frac{1}{2}arctg^2(-\infty)=-\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{\pi^2}{4}=-\frac{\pi^2}{8}.$$

❷ $$\int_{1}^{e}\frac{dx}{x.\sqrt[3]{\ln(x)}}=?$$

Решение: полагаме $\ln x=t^3$, при което $e^{\ln x}\equiv x=e^{t^3}$, т.е. $x=e^{t^3}$, $\Rightarrow$ $dx=e^{t^3}.3t^2dt$, като

- при $x=1 \quad\rightarrow\quad \ln 1\equiv 0=\alpha^3, \quad\Rightarrow\quad \alpha=0,$
- при $x=e \quad\rightarrow\quad \ln e\equiv 1=\beta^3, \quad\Rightarrow\quad \beta=1.$

Така след смяна на променливите интегралът добива вида

$$\int_{1}^{e}\frac{dx}{x.\sqrt[3]{\ln(x)}}=\int_{0}^{1}\frac{e^{t^3}.3t^2dt}{e^{t^3}.\sqrt[3]{t^3}}=3\int_{0}^{1}\frac{t^2dt}{t}=3\int_{0}^{1}t\,dt=\frac{3}{2}t^2\Bigg|_{0}^{1}=\frac{3}{2}(1^2-0^2)=\frac{3}{2}$$

❸ $$J=\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x+x^3}=?$$

Решение: $$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x+x^3}=\lim_{\beta\to\infty}\int_{1}^{\beta}\frac{dx}{x(1+x^2)}=\lim_{\beta\to\infty}\int_{1}^{\beta}\frac{(1+x^2-x^2)dx}{x(1+x^2)}=$$

$$=\lim_{\beta\to\infty}\int_{1}^{\beta}\frac{(1+x^2)\,dx}{x(1+x^2)}-\lim_{\beta\to\infty}\int_{1}^{\beta}\frac{x^2\,dx}{x(1+x^2)}=\lim_{\beta\to\infty}\int_{1}^{\beta}\frac{dx}{x}-\lim_{\beta\to\infty}\int_{1}^{\beta}\frac{x\,dx}{(1+x^2)}=$$

$$=\lim_{\beta\to\infty}\ln|x|\Bigg|_1^{\beta}-\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{2}\int_1^{\beta}\frac{d(x^2+1)}{(1+x^2)}=\lim_{\beta\to\infty}(\ln\beta-\ln 1)-\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|\Bigg|_1^{\beta}=$$

$$=\lim_{\beta\to\infty}\ln\beta-\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{2}[\ln(\beta^2+1)-\ln(1+1)]=\lim_{\beta\to\infty}\left(\ln\beta-\frac{1}{2}\ln(\beta^2+1)\right)+\frac{1}{2}\ln 2=$$

$$=\lim_{\beta\to\infty}\left(\ln\beta-\ln(\beta^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)+\ln 2^{\frac{1}{2}}=\lim_{\beta\to\infty}\ln\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+1}}+\ln\sqrt{2}=$$

$$=\ln\left(\lim_{\beta\to\infty}\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+1}}\right)+\ln\sqrt{2}=\ln 1+\ln\sqrt{2}=0+\ln\sqrt{2}=\ln\sqrt{2}\,.$$

Въпрос 7: Интегриране по части в несобствени интеграли

(1) $$\int_a^{\infty}u(x)\,dv(x)=u(x)\,v(x)\Bigg|_a^{\infty}-\int_a^{\infty}v(x)\,du(x)\,,$$

където:

(2) $$u(x)\,v(x)\Bigg|_a^{\infty}=\lim_{x\to\infty}u(x)\,v(x)-u(a)\,v(a)\,,$$

ако границите съществуват.

Доказателство: знаем, че

$$\int_a^{p}u(x)\,dv(x)=u(x)\,v(x)\Bigg|_a^{p}-\int_a^{p}v(x)\,du(x)\,.$$

Оставяме $\boxed{p\to\infty}$ и извършваме граничен преход в (над) горното равенство

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^{p}u(x)\,dv(x)=\lim_{p\to\infty}u(x)\,v(x)\Bigg|_a^{p}-\lim_{p\to\infty}\int_a^{p}v(x)\,du(x)\,,$$

или още

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^{p}u(x)\,dv(x)=\lim_{p\to\infty}u(p)\,v(p)-u(a)\,v(a)-\lim_{p\to\infty}\int_a^{p}v(x)\,du(x)\,,\text{ т.е.}$$

$$\int_a^{\infty}u(x)\,dv(x)=u(\infty)\,v(\infty)-u(a)\,v(a)-\int_a^{\infty}v(x)\,du(x)\,,$$

откъдето получаваме

$$\int_a^{\infty}u(x)\,dv(x)=u(x)\,v(x)\Bigg|_a^{\infty}-\int_a^{\infty}v(x)\,du(x)\,,\text{ к.т.д.}$$

✍ **Пример 1:** $J=\int_1^{\infty}\dfrac{arctg\ x}{x^2}dx=?$

Решение:

$$J=\int_1^{\infty}\frac{arctg\ x}{x^2}dx=\int_1^{\infty}arctg\ x\,.\,x^{-2}\,dx=\int_1^{\infty}arctg\ x\ d\left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right)=-\int_1^{\infty}arctg\ x\ d\left(\frac{1}{x}\right)=$$

$$= \;\ldots\ldots\text{ по части }\ldots\ldots =$$

$$= -\left.\frac{arctg\,x}{x}\right|_1^{\infty} + \int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,d\left(arctg\,x\right) = -\left[\lim_{x\to\infty}\frac{arctg\,x}{x} - \frac{arctg\,1}{1}\right] + \int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,.\,\frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= -\left[\lim_{x\to\infty}\frac{arctg\,x}{x} - \frac{\pi}{4}\right] + \int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,.\,\frac{1}{1+x^2}\,dx\,.$$

Тук ще отчетем следните 2 неща:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{arctg\,x}{x} = 0$, понеже $\lim\limits_{x\to\infty} arctg\,x = \frac{\pi}{2}$, а $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi/2}{x} = \frac{\pi}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$;

2. Подинтегралната функция $\frac{1}{x}\frac{1}{1+x^2} \equiv \frac{1}{x(1+x^2)}$ може да се представи във вида

$$\frac{1}{x(1+x^2)} \equiv \frac{0.x^2+0.x+1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{A(1+x^2)+(Bx+C).x}{x(1+x^2)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(1+x^2)},$$

т.е.

$$\frac{0.x^2+0.x+1}{x(1+x^2)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(1+x^2)}$$

От сравняването на коефициентите от двете страни на равенството заключаваме, че

$$\left|\begin{array}{l} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} B=-1 \\ C=0 \\ A=1 \end{array}\right.,\text{ откъдето следва, че}$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}.$$

Заместваме тези два резултата и за интеграла получаваме по-нататък

$$J = -\left[\lim_{x\to\infty}\frac{arctg\,x}{x} - \frac{\pi}{4}\right] + \int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,.\,\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} + \int_1^{\infty}\left[\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right]\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \int_1^{\infty}\frac{dx}{x} - \int_1^{\infty}\frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} + \int_1^{\infty}\frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{d(x^2+1)}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} + \left.\left[\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]\right|_1^{\infty} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \left.\left[\ln x - \ln\sqrt{1+x^2}\right]\right|_1^{\infty} = \frac{\pi}{4} + \left.\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|_1^{\infty} = \frac{\pi}{4} + \lim_{x\to\infty}\left[\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right] - \ln\frac{1}{\sqrt{1+1^2}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln\left[\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right] - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} + \ln\left[\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right] - \ln\,2^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln\left[\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right] - \left(-\frac{1}{2}\right)\ln 2 = \frac{\pi}{4} + \ln 1 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

✍ **Пример 2:** $J=\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\sin 2x\,dx=?$

Решение:

$$J=\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\sin 2x\,dx=-\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\sin 2x\,d(-x)=-\int\limits_0^{\infty}\sin 2x\,d(e^{-x})=\ \dots\ \text{по части}\ \dots\ =$$

$$=-e^{-x}\sin 2x\Big|_0^{\infty}+\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\,d(\sin 2x)=-\frac{\sin 2x}{e^{x}}\Big|_0^{\infty}+2\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\cos 2x\,dx=$$

$$=-\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{e^{x}}+\frac{\sin 2.0}{e^{0}}-2\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\cos 2x\,d(-x)=-\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\sin 2x}{e^{\infty}}+\frac{\sin 0}{1}-2\int\limits_0^{\infty}\cos 2x\,d(e^{-x})=$$

$=-2\int\limits_0^{\infty}\cos 2x\,d(e^{-x})$, като тук е отчетено, че $\lim\limits_{x\to\infty}\sin 2x$ не съществува, но е величина, имаща стойност в интервала $[-1,1]$, докато $e^{\infty}\to\infty$, следователно $\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\sin 2x}{e^{\infty}}=0$. И така

$$J=-2\int\limits_0^{\infty}\cos 2x\,d(e^{-x})=\quad \dots .\quad \text{по части}\quad \dots .\quad =$$

$$=-2.e^{-x}\cos 2x\Big|_0^{\infty}+2\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\,d(\cos 2x)=-2.\frac{\cos 2x}{e^{x}}\Big|_0^{\infty}+2.(-2)\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\sin 2x\,dx=$$

$$=-2.\lim_{x\to\infty}\frac{\cos 2x}{e^{x}}+2.\frac{\cos 2x}{e^{x}}-4\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\sin 2x\,dx=-2.\frac{\cos 2\infty}{e^{\infty}}+2.\frac{\cos 2.0}{e^{0}}-4.J=2-4.J\,,$$

където е отчетено, че $\dfrac{\cos\infty}{e^{\infty}}=0$, а $\dfrac{\cos 0}{e^{0}}=\dfrac{1}{1}=1$. И така, в резултат на направените дотук преобразования на интеграла J получихме, че

$$J=2-4.J\,,\ \Rightarrow\ 5.J=2\,,\ \Rightarrow\ J=\frac{2}{5}.$$

✍ **Задача за С.Р.:** $J=\int\limits_1^{\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx=?$

Решение: $J=\int\limits_1^{\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx=\int\limits_1^{\infty}\ln(1+x^2)\,x^{-2}dx=\int\limits_1^{\infty}\ln(1+x^2)\,d\left(\dfrac{x^{-1}}{-1}\right)=$

$$=\dots\ \text{по части}\ \dots\ =-\int\limits_1^{\infty}\ln(1+x^2)\,d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\ln(1+x^2)}{x}\Big|_1^{\infty}+\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x}\,d\big(\ln(1+x^2)\big)=$$

$$=-\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}+\frac{\ln(1+1^2)}{1}+\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x}\,\frac{1}{1+x^2}\,dx=-\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}+\ln 2+\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)}$$

Ще пресметнем отделно следните два компонента от последния запис:

а) $-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}=\quad\dots$ неопределеност $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]\quad\Rightarrow\quad$ по Лопитал $\dots\ =$

$$= -\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\left[\ln(1+x^2)\right]}{\frac{d}{dx}(x)} = -\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{1} = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0 \text{, и}$$

б) за пресмятане на интеграла $\int_1^{\infty} \frac{d\,x}{x(1+x^2)}$ най-напред ще представим подинтегралната му функция като сбор от прости дробно-линейни функции

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{A.(1+x^2)+(Bx+C)x}{x(1+x^2)} = \frac{A+Ax^2+Bx^2+Cx}{x(1+x^2)} \text{, т.е.}$$

$$\frac{0.x^2+0.x+1}{x(1+x^2)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(1+x^2)} \text{, откъдето следват равенствата}$$

$$\left|\begin{array}{l} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{array}\right. \text{, следователно}$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}.$$

С отчитането на намерените представяния, за интеграла ще имаме по-нататък

$$J = -\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} + \ln 2 + \int_1^{\infty} \frac{d\,x}{x(1+x^2)} = \ln 2 + \int_1^{\infty} \frac{d\,x}{x} - \int_1^{\infty} \frac{x\,d\,x}{1+x^2} =$$

$$= \ln 2 + \int_1^{\infty} \frac{d\,x}{x} - \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{d\,(x^2+1)}{1+x^2} = \ln 2 + \left(\ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\right)\Bigg|_1^{\infty} = \quad ..\ /|x| \equiv x/\ ..\ =$$

$$= \ln 2 + \left(\ln x - \ln\sqrt{1+x^2}\right)\Bigg|_1^{\infty} = \ln 2 + \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\Bigg|_1^{\infty} =$$

$$= \ln 2 + \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+1^2}}\right) = \ln 2 + \ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \ln 2 + \ln 1 - (\ln 1 - \ln\sqrt{2}) = \ln 2 + \ln\sqrt{2} = \ln 2 + \ln 2^{\frac{1}{2}} = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{3}{2}\ln 2.$$