Пловдивски университет „Паисий Хилендарски”
Факултет по математика и информатика
Катедра “Приложна математика и моделиране”

“Компютърни числени методи”
ЛЕКЦИЯ 2

Проф. д-р Снежана Гочева-Илиева, snow@uni-plovdiv.bg

Он-лайн обучение: www.fmi-plovdiv.org/evlm
www.fmi-plovdiv.org/evlm/DBbg - числени методи

Литература:

1. Бояджиев Д., Гочева С., Макрелов И., Попова Л. – Ръководство по числени методи – част 1, Издания: 2003, 2006, 2010.
2. Семерджиев Х., Боянов Б., Числени методи, ПУ.
3. Гочева-Илиева С., Въведение в система Mathematica, ЕксПрес, Габрово, 2009.

Съдържание:

2.1. Числено решаване на уравнения с едно неизвестно

Постановка на задачата: Дадено е уравнение от вида $f(x)=0$, на което търсим корените.

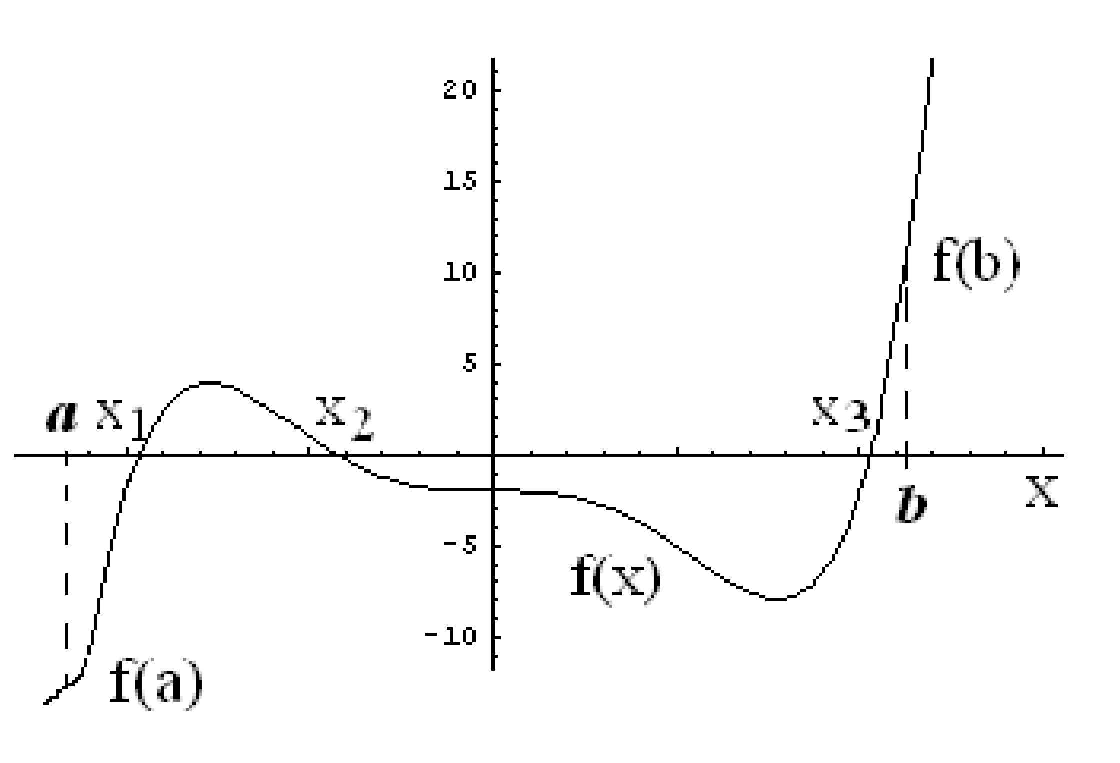
Въпроси	*Методи за решаване*
1. Съществуват ли корени, брой, вид (реални, комплексни), кратност (прости, двойни ...)?	Графични, аналитични емпирични
2. Местоположение на корените (локализация)	Графични, аналитични емпирични
3. Уточняване на корените с дадена точност	Числени методи

Целта ни е да намерим методи, които да работят за възможно по-голям клас от уравнения, т.е. функции $f(x)$. Различните методи са приложими при различни условия.

В нашия курс ще търсим предимно **реални** корени на уравнението $f(x)=0$.

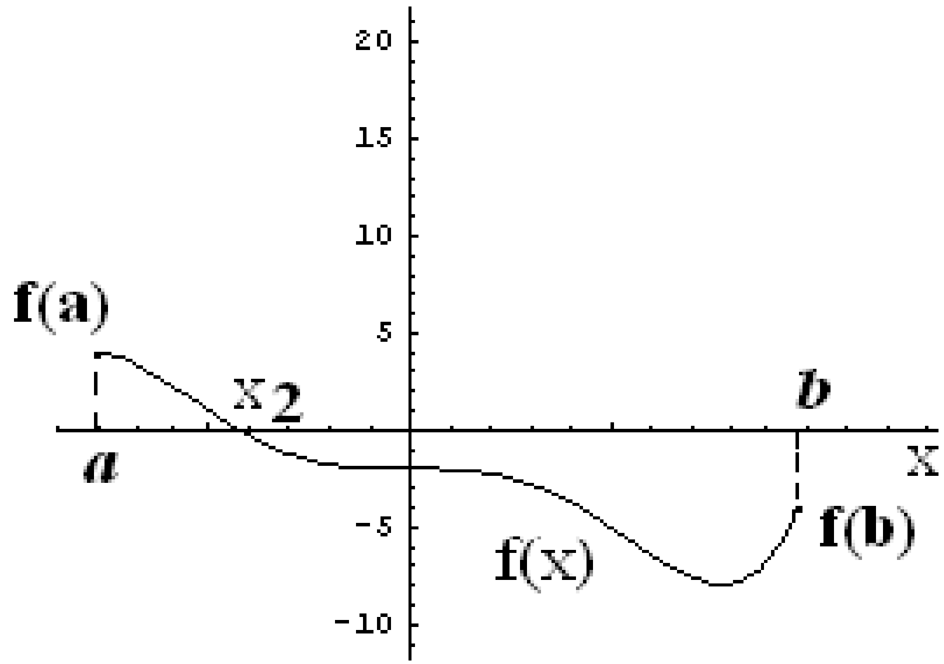
Основен факт от математическия анализ:

Нека $f(x)$ е реална функция, дефинирана и непрекъсната в някакъв краен затворен интервал [*a*,*b*]. Ако в краищата *a*, *b* функцията има различни знаци, т.е. произведението $f(a)f(b)<0$, то в интервала има поне един реален корен.	(*)



Фиг. 2.1.а

Очевидно функцията $f(x)$ е непрекъсната. Освен това тук $f(a)<0$, а $f(b)>0$, т.е. $f(a)f(b)<0$. В случая уравнението $f(x)=0$ има нечетен брой реални корени: x_1, x_2, x_3 .



Фиг. 2.1.б

От горната графика 2.1.а е намален първоначалният интервал $[a,b]$ така, че е спазено условието $f(a)f(b) < 0$ и има локализиран само един реален корен (в случая x_2).

Локализацията на корен е намирането на $[a,b]$, в който съществува (поне) един реален корен. Локализирането е по-нестандартна процедура, но можем да посочим следните начини:

- **графичен**: построяваме графиката на функцията $f(x)$ и намираме приблизителната й пресечна точка с оста Ox и интервал около нея,
- **аналитичен**: като използваме някои теореми от алгебрата, например в случая за корени на полиноми,
- **емпиричен**: с използване на априорна информация за физическия смисъл на решаваното уравнение и корените, на базата на експерименти.

Уточняването на корена представлява следното: При предварително намерен интервал $[a,b]$, съдържащ корена x^* и зададено положително число ε, наричано точност, да се намери точка $\tilde{x} \in [a,b]$, за която е в сила $\left|x^* - \tilde{x}\right| \leq \varepsilon$. Тази точка $\tilde{x}$ се приема за приближение на корена x^*.

2.2. Метод на разполовяването за уравнението $f(x)=0$

Условия за прилагане на метода:

а) $f(x)$ е реална функция, дефинирана и непрекъсната в интервал $[a,b]$,

б) $f(a)f(b)<0$, т.е. функцията има различни знаци в a и b.

Съгласно факт (*) съществува поне един реален корен $x^* \in [a,b]$: $f(x^*)=0$.

Идея на метода на разполовяването (лов на лъвове):

Разделяме интервала на два равни подинтервала и за нов интервал избираме този подинтервал, в краищата на който функцията има различни знаци, т.е. е изпълнено условието б) $f(a)f(b)<0$. След това пак разделяме на два равни подинтервала и т.н. докато поредният интервал стане по-малък от зададената грешка.

Оценка на грешката и скорост на сходимост на разполовяването

Нека означим началния интервал с $[a_0,b_0]=[a,b]$ и работим без закръгляне. При първото разделяне на подинтервали, очевидно полученият подинтервал $[a_1, b_1]$ има два пъти по-малка дължина $\varepsilon_1 = (b-a)/2$ и $a_1 \le x^* \le b_1$, при второто разполовяване аналогично $\varepsilon_2 = (b-a)/2^2$ и т.н. След n итерации $\varepsilon_n = (b-a)/2^n$ и $a_n \le x^* \le b_n$.

За оценка на грешката получаваме: $|x^* - a_n| \le |b_n - a_n| = \varepsilon_n \le \dfrac{b-a}{2^n}$. (1)

Очевидно при $n \to \infty$ дясната част на (1) клони към нула и методът е сходящ със скорост на геометрична прогресия с частно $q = \dfrac{1}{2}$.

От (1) можем предварително да определим броя стъпки за достигане на желана точност ε:

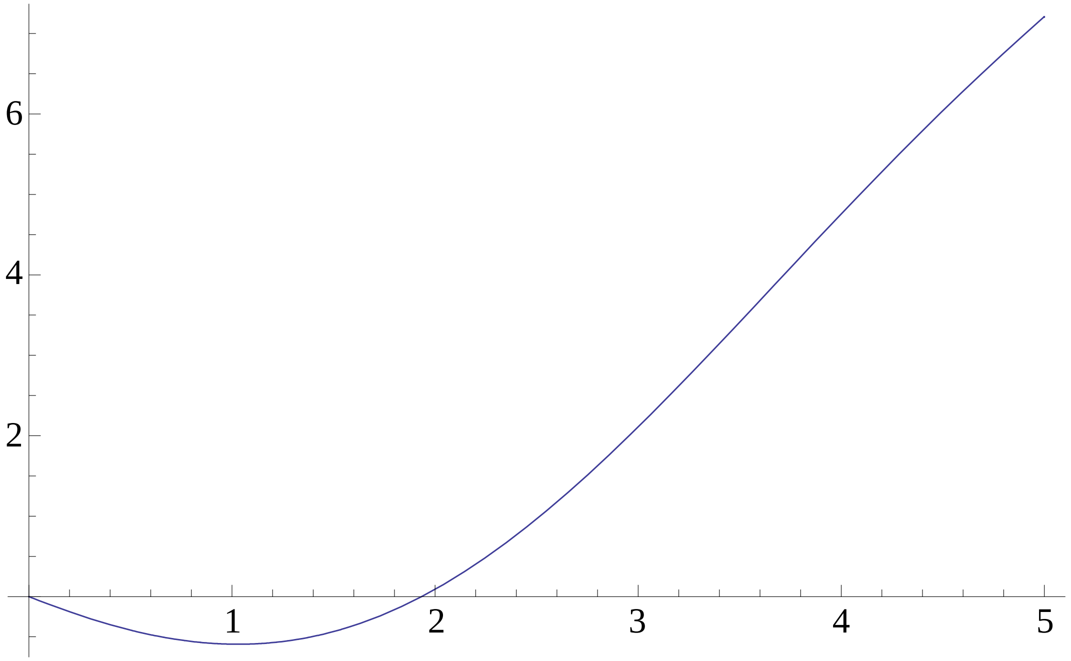
$$\frac{b-a}{2^n} \le \varepsilon \quad \Rightarrow \quad 2^n \ge \frac{b-a}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad n \ge \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}. \qquad (2)$$

Например, при дължина на начален интервал $b-a=1$ и $\varepsilon = 0.001$ получаваме n =10, т.к. $2^{10} = 1024 \approx 1000$. При $\varepsilon = 0.000001 \Rightarrow n = 100$ и т.н.

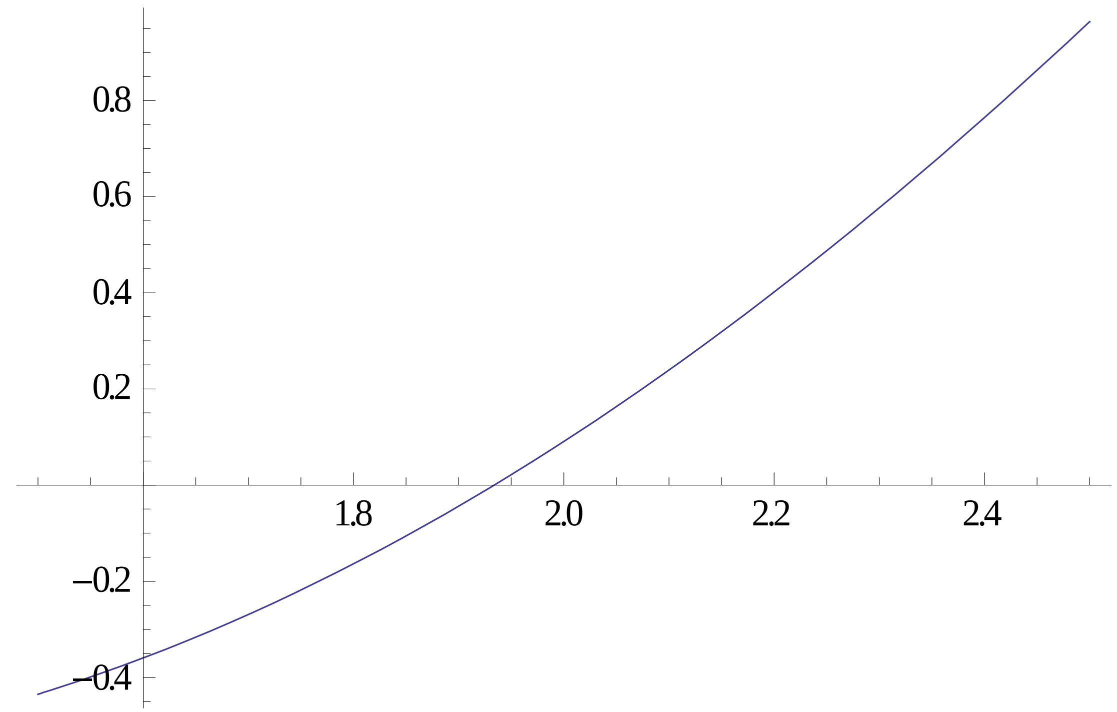
Пример. Да се реши уравнението: $x^2/4 - \sin(x) = 0$.

<u>Решение.</u> Започваме с графиката, за да локализираме корен.

```
f=x^2/4-Sin[x];
Plot[f,{x,0,5}]
```




```
Plot[f,{x,1.5,2.5}]
```



Виждаме, че функцията се анулира близо до x =2. Избираме например начален интервал $[a_0, b_0] = [1.8; 2]$**.**

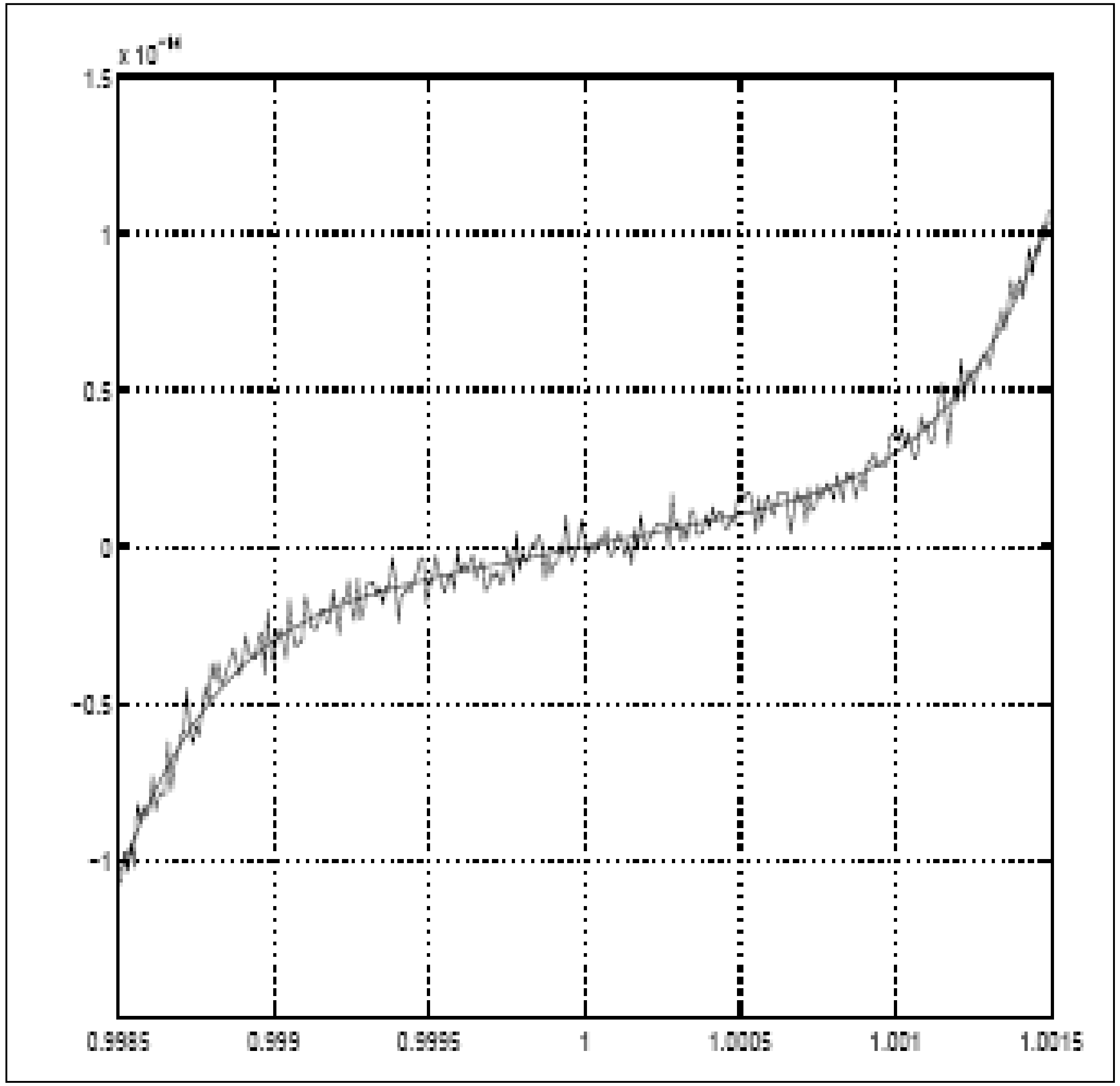
Последователно разделяме интервалите $[a_k, b_k]$ и проверяваме знака на функцията в средата m_k на последния избран интервал:

k	a_k	b_k	m_k **- среда**	$f(m_k)$
0	**1.8**	**2**	**1.9**	**<0**
1	**1.9**	**2**	**1.95**	**>0**
2	**1.9**	**1.95**	**1.925**	**<0**
3	**1.925**	**1.95**	**1.9375**	**>0**
4	**1.925**	**1.9375**	**1.93125**	**<0**
5	**1.93125**	**1.9375**	**1.934375**	**>0**

Така например след 5 итерации имаме $x^* \in [1,93125;\ 1,934375]$. Дължината на последния интервал е: (2-1.8) * 2^{-6}=0. 2 * 2^{-6} = 0. 003125. Или точността е 0. 003125. Приближената стойност на корена е: $\tilde{x} \in 1,932$.

2.3. Някои забележки по прилагане на метода на разполовяването

Трябва винаги да се отчитат и грешките от закръгляне при пресмятане стойностите на $f(x)$. Реалната графика е вярна с точността, с която закръгляме. Това е показано на съседната фигура, съдържаща графика на полином от 5-та степен с корен =1, като е закръглено с точност 10^{-14}.



Затова методът на разполовяване се използва за грубо намиране на корена, който след това се уточнява с други методи.

2.4. Метод на хордите

<u>Условия за прилагане на методите на хордите и на допирателните:</u>

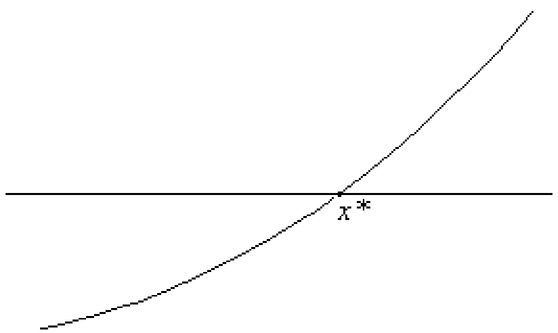
а) $f(x),\ f'(x),\ f''(x)$ **са дефинирани и непрекъснати в интервал [*a*, *b*],**

б) $f(a)f(b) < 0$ **- функцията има различни знаци в *a* и *b*,**

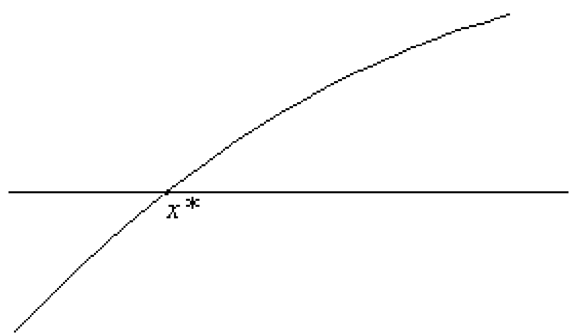
в) $f'(x),\ f''(x)$ **са с постоянни знаци в [*a*, *b*].**

Не е трудно да се съобрази, че тези условия гарантират съществуването на точно един реален корен x^* **в [*a*,*b*].**

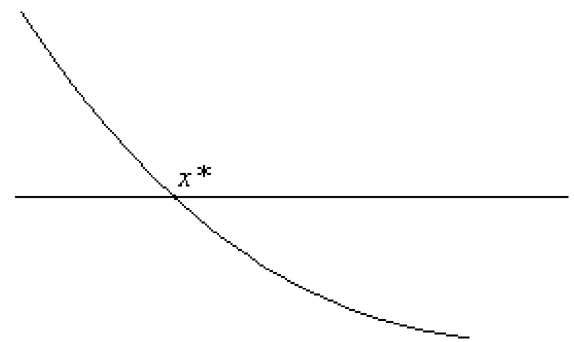
От в) производните не трябва да стават нула, т.е. имаме следните четири случая:



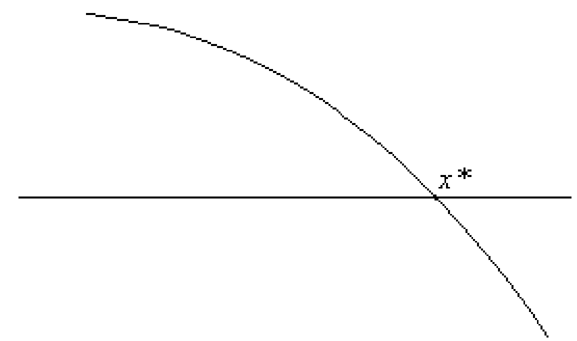
I) $f'(x) > 0,\ f''(x) > 0$



II) $f'(x) > 0,\ f''(x) < 0$

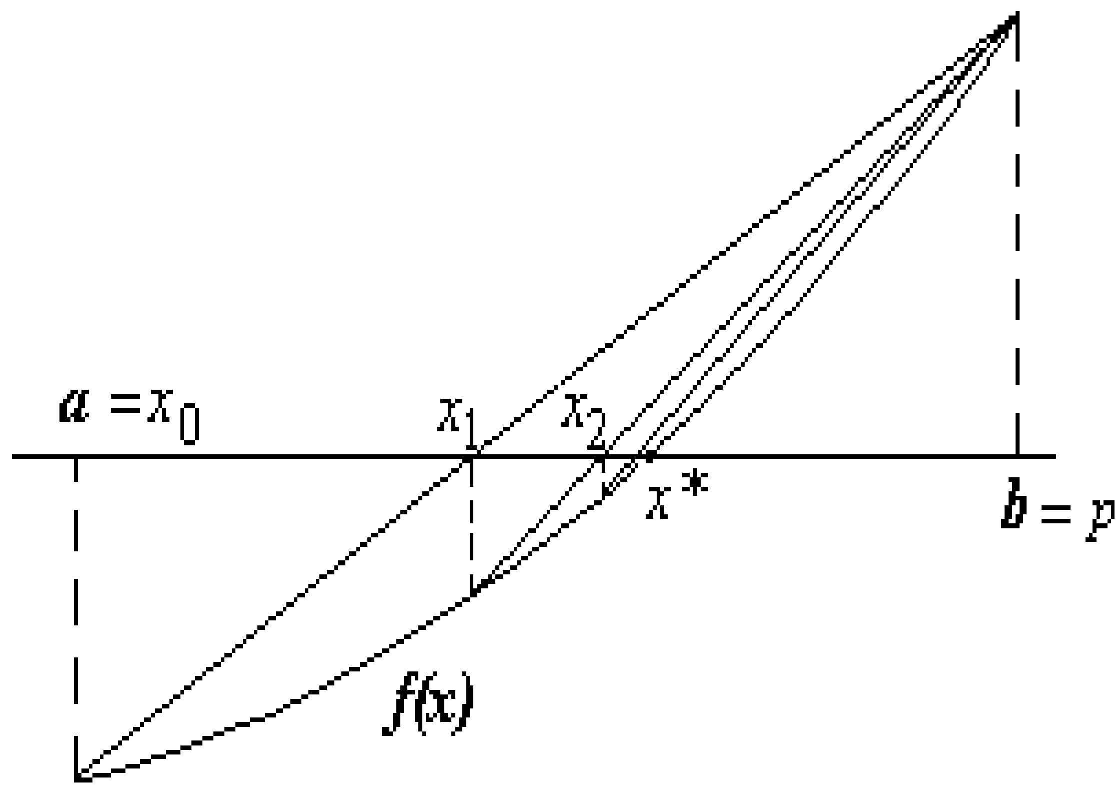


III) $f'(x) < 0,\ f''(x) > 0$



IV) $f'(x) < 0,\ f''(x) < 0$

Идея на метода на хордите (на примера от случай I): Построява се хордата през точките $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Намира се пресечната точка с Ox, която се взима за първо приближение x_1 към търсения корен x^*. След това се построява хордата през $(x_1, f(x_1))$ и $(b, f(b))$ и се намира второто приближение x_2 и т.н. Вижда се, че ако се започне с начално приближение $x_0 = a$, то се приближаваме към търсения корен x^* отляво, а десният край на хордите е неподвижен. В избрания от нас случай на чертежа – неподвижната точка е $p = b$.



Избор на начално приближение x_0 **за метода на хордите – определя се например визуално за всеки от четирите случая, а именно:**

за случаите I) и IV) - $x_0 = a$**,** $p = b$**, а за случаите II) и III)-** $x_0 = b$**,** $p = a$**.**

Еквивалентното условие е:

да се избере x_0 **в онзи край на интервала [*a, b*], за който е изпълнено** $f(x_0).f'' < 0$**, другият край става неподвижна точка** p **.**

Извод на итерационната формула на метода на хордите

Построяваме хордата през поредната точка $(x_k, f(x_k))$ **и неподвижната точка** $(p, f(p))$ **като уравнение на права през две точки:**

$$\frac{y - f(x_k)}{f(p) - f(x_k)} = \frac{x - x_k}{p - x_k}$$

. За да намерим следващото приближение x_{k+1} **като пресечна точка на хордата с** Ox**, полагаме тук** $y = 0,\ x = x_{k+1}$**.**

Получената итерационна формула на метода на хордите е:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(p)}\left(x_k - p\right); \qquad k = 0, 1, \ldots \qquad \textbf{(3)}$$

Тази формула може да се запише в по-общ вид итерационна формула

$$x_{k+1} = \varphi\left(x_k\right), \; k = 0,1,\ldots. \qquad \textbf{(**)}$$

Формула (**) по същество е явен едностъпков итерационен процес, тъй като при известна дясна част се изчислява директно лявата и се използва само предишното *k*-то приближение x_k при изчисляване на *k+1* –вото x_{k+1}.

2.5. Критерии за прекъсване на итерационния процес (достигане на точност)

Нека коренът се търси със зададена точност $\varepsilon > 0$**. Прекратяването на изчисленията по формула (7) може да стане при изпълнение на поне едно от следните условия:**

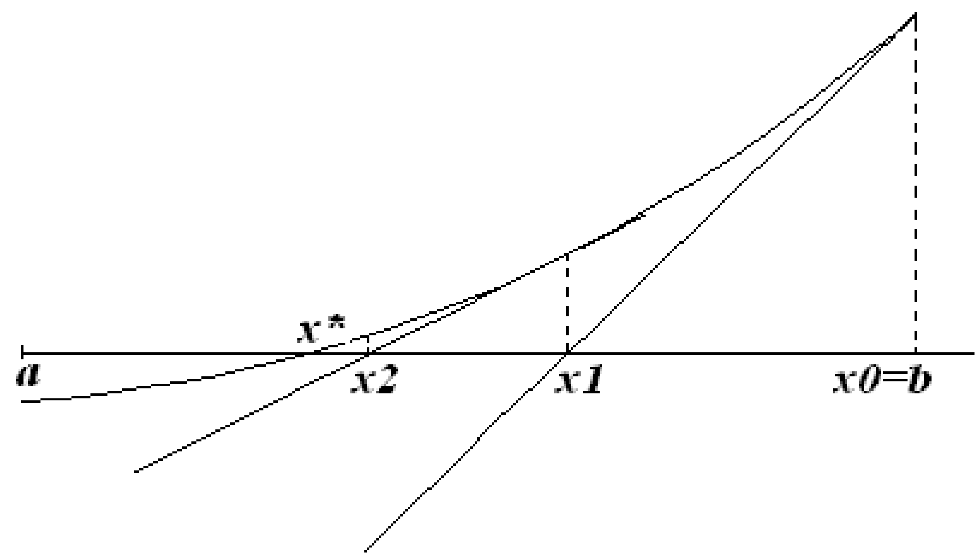
- **Когато** $\left|x_{k+1} - x_k\right| < \varepsilon$ **- по абсолютна грешка,**
- **Когато** $\dfrac{\left|x_{k+1} - x_k\right|}{\left|x_k\right|} < \varepsilon$ **- по относителна грешка,**
- **Когато** $\left|f(x_k)\right| < \varepsilon$ **- по стойност на функцията.**

Тези критерии са приложими и при другите итерационни методи за решаване на уравнения.

2.6. Метод на Нютон (метод на допирателните)

<u>Идея на метода на Нютон</u> (на примера от случай I):

От единия край на интервала ($x_0 = b$) се построява допирателната към $f(x)$ и за първо приближение x_1 към корена x^* се взима пресечната точка на допирателната с оста О*x*. На следващата стъпка (итерация) се построява допирателната към $f(x)$ в точката x_1 и се получава x_2 като пресечна точка на допирателната с оста О*x* и т.н.



Така получаваме безкрайната редица от приближения: $x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots$**.**

По-нататък с помощта на теоремата за неподвижната точка ще покажем, че:

а) редицата е сходяща и клони към корена на уравнението $f(x) = 0$**,**

б) скоростта на сходимост е квадратична.

Важен момент от метода на Нютон е изборът на началното приближение x_0. Тъй като $x_1, x_2, \dots$ трябва да остават вътре в интервала [*a*, *b*], то от геометрични съображения не трудно да се съобрази, че:

за случаите I) и IV) $x_0 = b$, а за случаите II) и III) $x_0 = a$.

Еквивалентно условие е:

да се избере x_0 в онзи край на интервала [*a*, *b*], за който е изпълнено $f(x_0).f'' > 0$.

<u>Извод на итерационната формула на Нютон</u>

Вместо да търсим уравнението на допирателната, ще получим формулата по-елегантно. Достатъчно е да приведем изходното уравнение $f(x) = 0$ в т. нар. нормален вид $x = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, или по-общо

$$x = \varphi(x). \tag{4}$$

Очевидно всяко решение на уравнението $f(x)=0$ е решение и на уравнение (4) и обратно (Защо?). От (4) замествайки вдясно началното приближение x_0 веднага изчисляваме x_1

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

От полученото x_1 определяме аналогично $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ и т.н.

Ако сме намерили x_k, следващото приближение x_{k+1} се пресмята от формулата:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \tag{5}$$

или записано като общ итерационен явен едностъпков метод (виж и метод на хордите):

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \ k = 0,1,\ldots. \tag{**}$$

Втори извод на формулата на Нютон – с уравнение на допирателната:

Уравнението на допирателната d към кривата $f(x)$ в точката $(x_0, f(x_0))$ е:

$$d: y = k.x + b, \tag{6}$$

където $k = f'(x_0) = tg(\alpha)$ е наклонът на правата d, която сключва ъгъл α с оста Ox. Тъй като искаме правата да минава през $(x_0, f(x_0))$, заместваме тази точка в общия вид (6) и получаваме $f(x_0) = k.x_0 + b$, откъдето $b = f(x_0) - k.x_0$. Така допирателната е: $d: y = f'(x_0).x + f(x_0) - f'(x_0).x_0$. В метода на Нютон следващото приближение x_1 е пресечната точка на допирателната с Ox. Намираме го като положим $y = 0,\ x = x_1$ и намираме

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{7}$$

В общия случай при известно x_k следващото приближение x_{k+1} е:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.\quad k = 0,1,\ldots \text{ (Сравни с формула (5)).} \tag{8}$$

За да изследваме сходимостта на разгледаните методи на Нютон и хордите, както и за следващи методи от този тип ще докажем по-общата теорема за неподвижната точка. Тази теорема е валидна за много по-широки класове от математически задачи и е една от централните теореми в математиката.

2.7. Някои предварителни понятия от функционалния анализ

Определение 1. Едно множество X с елементи (точки) $x, y, z, \dots$ се нарича **метрично пространство**, ако за всяка наредена двойка елементи $x, y \in X$ е съпоставено реално число $d(x, y)$ (разстояние между x, y, или метрика), такова че за всички $x, y, z \in X$:

1^0) $d(x, y) \geq 0$ и $d(x, y) = 0$ тогава и само тогава, когато $x = y$,

2^0) $d(x, y) = d(y, x)$ - симетричност,

3^0) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ (неравенство на триъгълника).

Определение 2. Казваме, че една редица от точки $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots \in X$ е **сходяща по метрика** в X, ако съществува точка $a \in X$, такава че числовата редица от разстоянията им до a е сходяща, т.е. $\lim\limits_{k \to \infty} d(x^{(k)}, a) = 0$.

Определение 3. Казваме, че една редица от точки $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots \in X$ е **фундаментална редица (или редица на Коши)**, ако съществува границата $\lim\limits_{k,m \to \infty} d(x^{(m)}, x^{(k)}) = 0$.

Определение 4. Казваме, че X е **<u>пълно метрично пространство</u>**, ако всяка фундаментална редица е сходяща в X (границата й е точка от X).

Определение 5. Нека операторът (изображението) $\varphi: X \to X$ съпоставя на всяка точка $x \in X$ нова точка $\varphi(x) \in X$.

Казваме, че е φ е **<u>свиващ оператор в *X*</u>**, ако съществува реално число q, $0 < q < 1$, такова че за всеки $x, y \in X$ е изпълнено $d\left(\varphi(x), \varphi(y)\right) \leq q.d(x, y)$.

Определение 6. Точката $x^* \in X$ се нарича **<u>неподвижна точка</u>** на свиващия оператор φ, ако съвпада с изображението си:

$$x^* = \varphi(x^*). \tag{9}$$

Т.е. неподвижната точка е решение на уравнението (9).

<u>Примери.</u> 1) Реалните числа и комплексните числа са метрични пространства с метрика $d(x, y) = |x - y|$. 2) Векторните пространства са метрични, напр. пространството на n-мерните вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ е метрично с метрика $d(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + ... + (a_n - b_n)^2}$ - евклидовото разстояние.

2.8. Теорема за неподвижната точка (н. т.)

Нека X е пълно метрично пространство и $\varphi(x)$ е свиващ оператор в X. Тогава φ притежава единствена неподвижна точка $x^* \in X$, която се получава като граница на итерационния процес:

$$x^{(k+1)} = \varphi\left(x^{(k)}\right),\ k = 0,1,\ldots, \qquad (**)$$

при $k \to \infty$ за произволен елемент $x^{(0)} \in X$, наричан начално приближение.

Доказателство: Ще покажем, че за итерационния процес (**) $\exists x^* \in X$ за което $\lim_{k\to\infty} d(x^{(k)}, x^*) = 0$ и $x^* = \varphi\left(x^*\right)$.

(а) Нека $x^{(0)} \in X$ е произволно начално приближение. Щом φ по условие преобразува X в себе си, то от (**) всяко $x^{(k)}$ също принадлежи на X. От това, че φ е свиващ оператор съществува q, $0 < q < 1$, за което:

$$d(x^{(k+1)}, x^{(k)}) = d\left(\varphi(x^{(k)}), \varphi(x^{(k-1)})\right) \le q.d(x^{(k)}, x^{(k-1)}) \le q^2.d(x^{(k-1)}, x^{(k-2)}) \le \ldots$$

$$\le q^k.d(x^{(1)}, x^{(0)}) = \alpha q^k \quad . \qquad (10)$$

Тук $\alpha = d(x^{(1)}, x^{(0)})$ е константа.

(б) Ще покажем, че (**) е фундаментална редица. Наистина, нека $m > k$. От неравенството на триъгълника в пълното метрично пространство X:

$$d(x^{(m)}, x^{(k)}) \le d(x^{(m)}, x^{(m-1)}) + d(x^{(m-1)}, x^{(m-2)}) + \ldots + d(x^{(k+1)}, x^{(k)}) \le,$$

$$\le \alpha(q^{m-1} + q^{m-2} + \ldots + q^k) \le \alpha q^k (1 + q + q^2 + \ldots) \le q^k \frac{\alpha}{1-q}, \tag{11}$$

където всяко d от първия ред на (11) е оценено с (10) и накрая е използвана формулата за сума от безкрайна геометрична прогресия с частно q, $0 < q < 1$. Като направим граничен преход в (11) при $m, k \to \infty$ имаме $d(x^{(m)}, x^{(k)}) \to 0$, т.е. редицата (**) е фундаментална. Но X е пълно метрично пространство, значи всяка фунд. редица е сходяща в X. Следователно, съществува граница на (**), означаваме я с x^*, $x^* \in X$. Или:

$$\lim_{k\to\infty} d(x^{(k)}, x^*) = 0. \tag{12}$$

Освен това след граничен преход по m от (11) получаваме

$$d(x^{(k)}, x^*) \le \frac{\alpha}{1-q} q^k . \qquad (13)$$

(в) Ще покажем, че x^* е неподвижна точка. От неравенството на триъгълника, свойствата на φ и (13) имаме

$$d(x^*, \varphi(x^*)) \le d(x^*, x^{(k+1)}) + d(x^{(k+1)}, \varphi(x^*)) = d(x^*, x^{(k+1)}) + d(\varphi(x^{(k)}), \varphi(x^*)) \le$$

$$d(x^*, x^{(k+1)}) + q.d(x^{(k)}, x^*) \le q^{k+1} \frac{\alpha}{1-q} + q.q^k \frac{\alpha}{1-q} = q^{k+1} \frac{2\alpha}{1-q} .$$

Но k е произволно, следователно след граничен преход $k \to \infty$ следва $d(x^*, \varphi(x^*)) = 0$, от което по свойство 1^0) намираме $x^* = \varphi(x^*)$.

(г) Единственост на неподвижната точка. Допускаме, че има две н.т. x^* и y^* и $x^* \ne y^*$. Тогава от $x^* = \varphi(x^*)$ и $y^* = \varphi(y^*)$

$$d(x^*, y^*) = d(\varphi(x^*), \varphi(y^*)) \le q.d(x^*, y^*) .$$

Последното е невъзможно, т.к. $0 < q < 1$. Следователно н.т. е единствена.

<u>Забележка.</u> Ние допълнително доказахме в (13), че скоростта на сходимост на итерационния процес (**) в най-лошия случай е равна на скоростта на сходимост на геометрична прогресия с частно q.

2.9. Теорема 2 за неподвижната точка (усилена формулировка)

При k=0 от (11) за всяко m имаме

$$d(x^{(m)}, x^{(0)}) \leq \frac{\alpha}{1-q},$$

т.е. всички $x^{(m)}$, $m \to \infty$ се намират в околност на $x^{(0)}$, означаваме околността с $\Omega_\alpha = \{\forall x \in X : d(x, x^{(0)}) \leq \frac{\alpha}{1-q}\}$.

От хода на доказателството на теоремата за неподвижната точка се вижда, че на практика всички резултати остават валидни в Ω_α. Следователно, във формулировката може да се уточни, че

$\varphi(x)$ е достатъчно да бъде свиващ оператор само в някаква околност Ω_α на избраното начално приближение $x^{(0)}$.

2.10. Следствие. Сходимост на итерационния процес за уравнението $f(x)=0$

Нека уравнението $f(x)=0$ е приведено по някакъв начин в нормален вид (3), т.е. $x=\varphi(x)$.

Както бе споменато по-горе, лесно се проверява, че множеството на реалните числа е метрично пространство с метрика $d(x,y)=|x-y|$ (всички свойства на метриката следват веднага от свойствата на модула).

Нека съществува производната $\varphi'(x)$ и е нека непрекъсната в околност на корена x^*. Тогава от теоремата на средните стойности

$$d(\varphi(x),\varphi(y))=|\varphi(x)-\varphi(y)|=|\varphi'(\xi)||x-y|\le \max|\varphi'(\xi)|.d(x,y).$$

Ако тук означим $q=\max|\varphi'(\xi)|$, то очевидно е вярно твърдението:

За сходимост на итерационния процес (*) съгласно теорема 2 за неподвижната точка е достатъчно в някаква околност на корена x^* да е изпълнено: $q=\max|\varphi'(\xi)|<1$. (14)

2.11. Сходимост на метода на Нютон (следствие от Теорема за н.т.)

Теорема. Нека в достатъчно малка околност на корена x^* са изпълнени условията за метода на Нютон, т.е. съществува единствен прост корен. Тогава методът (5) е сходящ при произволно начално приближение x_0 от тази област и скоростта на сходимост е квадратична.

Доказателство. Лесно се проверява, че $\varphi(x)$ от формулата на Нютон е свиващо изображение. Наистина имаме формулата: $x = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, т.е. $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Изчисляваме $\varphi'(x) = \left(x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}\right)' = 1 - \dfrac{f'.f' - f.f''}{(f')^2} = \dfrac{f.f''}{(f')^2}$.

Тук последният член съдържа $f(x)$, което е нула при $x = x^*$, т.е.

$$\varphi'(x^*) = 0. \tag{15}$$

Но $\varphi'(x)$ е непрекъсната, следователно в достатъчно малка околност на корена, $|\varphi'(x)| \approx 0$ и тогава съществува $q: 0 < q < 1$, така че да е в сила (14).

Освен това като развием в ред на Тейлър $\varphi(x_k)$ около точката x^* имаме:

$$x_{k+1} - x^* = \varphi(x_k) - \varphi(x^*) = (x_k - x^*)\varphi'(x^*) + \frac{1}{2}(x_k - x^*)^2 \varphi''(\xi),\ \xi \in (x_k, x^*).$$

Но $\varphi'(x^*) = 0$, откъдето

$$x_{k+1} - x^* = \frac{1}{2}(x_k - x^*)^2 \varphi''(\xi),$$

т.е. грешката от поредното *k+1*-во приближение е приблизително равна на квадрата на предишното *k* -то приближение. (Предполага се, че $\varphi''(x)$ не е много голяма в областта.). Това се нарича квадратична сходимост.

Например, ако за някое *k* имаме достигната точност 10^{-2}, на следващото приближение *k+1* грешката става 10^{-4}, а на *k+2*- 10^{-8} и т.н.

Поради горните качества на метода на Нютон, той е сред най-предпочитаните за решаване на уравнения. Лесно се обобщава и за случая от системи нелинейни уравнения.

Забележка. За грешката от метода на Нютон може да се докаже още, че е валидна оценката:

$$\left|x^* - x_n\right| \le \frac{M_2}{2m_1}\left|x_n - x_{n-1}\right|^2,$$

където $M_2 = \max\limits_{[a,b]}\left|f''(x)\right|$, $m_1 = \min\limits_{[a,b]}\left|f'(x)\right|$. Следователно, за достигане на зададена точност ε на n- то приближение, достатъчно е да е изпълнено

$$\frac{M_2}{2m_1}\left|x_n - x_{n-1}\right|^2 < \varepsilon.$$

2.12. Обобщение: Метод на Нютон за системи нелинейни уравнения:

Постановка на задачата:

Търсят се решенията на система от n нелинейни уравнения n неизвестни:

$$\left|\begin{array}{ll} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) & = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) & = 0 \\ \dots & \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) & = 0 \end{array}\right. .$$

Извод на метода на Нютон.

Ако въведем векторен запис, ще получим: $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$,

където $\vec{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ ... \\ f_n \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ и $\vec{0}$ е нулевият вектор.

Въвеждаме якобиана:

$$jac(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

и нека в околност на някакъв корен съществува обратната матрица

$$J(\vec{x}) = jac^{-1}(\vec{x}).$$

Тогава веднага получаваме следното обобщение на метода на Нютон:

$$\vec{x} = \vec{x} - J(\vec{x})\vec{F}(\vec{x})$$

и съответния му итерационен процес:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - J(\vec{x}^{(k)})\vec{F}(\vec{x}^{(k)}),\ k = 0, 1, 2, \dots \qquad (16)$$

За прилагане на формула (16) е необходимо да се решават следните трудни подзадачи:

- локализиране на корен,
- намиране на подходящо начално приближение $\vec{x}^{(0)}$,
- обръщане на матрицата jac на всяка итерация k.

Програмирани методи за решаване на уравнения
Примери с Mathematica:
http://www.fmi-plovdiv.org/evlm/DBbg/numanmenu/programs_list.htm

Допълнителна литература по числени методи за решаване на уравнения:

Дж. Форсайт, М. Малкълм, К. Молър, *Компютърни методи за математически пресмятания*, Наука и изкуство, С., 1986.