

Пример 2. Използвайки Гаусовата елиминация и обратна субституция, решете уравнения

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

Решение: Най-напред ще изпълним водещите операции с редове върху разца:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right) \begin{matrix} (-2) \\ \curvearrowright \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right) \begin{matrix} \text{смяна на редовете} \\ \left. \begin{matrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{matrix} \right\} \\ \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ (-1) \\ \curvearrowleft \\ \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \\ (-\frac{2}{3}) \\ \curvearrowleft \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & 5 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \\ (-\frac{1}{3}) \\ (\frac{3}{5}) \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \\ \text{долна триъгълна} \\ \text{(echelon) форма} \end{matrix}$$

Обратната субституция дава

$$x_4 = 3, \quad x_3 = 3 - \frac{1}{3}x_4 = 2, \quad x_2 = 6 - x_3 - x_4 = 1, \quad x_1 = 4 - x_2 - 2x_3 = -1.$$