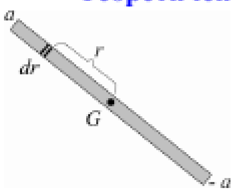
Тема 7: Идеално твърдо тяло

Теоретичен минимум: в задачи, свързани с движение на идеално твърдо тяло



за намирането на функцията на Лагранж и уравненията на Лагранж, описващи движението на тялото, е необходимо да се определят кинетичната и потенциалната енергии съответно:

$$(1) \qquad T = T_{Пост} + T_{Върт},$$

където

$$(2) \qquad T_{Пост} = \frac{1}{2} m V_G^2 = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_G^{\,2}$$

е кинетична енергия на постъпателно движение на твърдо тяло, имащо радиус-вектор на своя център на масите $\vec{r}_G$, а

$$(3) \qquad T_{Върт} = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \equiv \frac{1}{2} \sum_i m_i V_i^2$$

е кинетичната енергия на въртеливото движение на същото това тяло.

Ако конкретизираме разглежданията само за един често срещащ се частен случай – права хомогенна еднородна пръчка с маса m и дължина $2a$ (*виж чертежа*), то в граничния случай $i \to \infty$ очевидно $\sum_i \to \int_{-a}^{a}$, като при това $m_i \to \underbrace{\left(\frac{m}{2a}\right)}_{\text{маса на единица дължина}} .dr = m_0\, dr$ и още $V_i \to \dot{GP}$, където P е произволна точка от тялото, отстояща на разстояние $\vec{r}$ от центъра на масите G. Замествайки в (3) получаваме

$$(4) \qquad T_{Върт} = \frac{1}{2} \int_{-a}^{a} \left(\frac{m}{2a}\right) . \dot{GP}^2\, dr = 2 \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2a}\right) \int_0^a \dot{GP}^2\, dr = \left(\frac{m}{2a}\right) \int_0^a \dot{GP}^2\, dr = m_0 \int_0^a \dot{GP}^2\, dr,$$

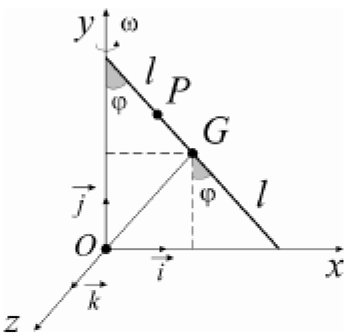
където очевидно $\overrightarrow{GP}$ трябва предварително да бъде изразен в сферични (r, θ, φ) или други подходящи координати.

След заместване на (2) и (4) в (1), за кинетичната енергия на идеално твърдото тяло се получава представянето

(5) $\quad T=\dfrac{1}{2}m\,\dot{\vec{r}}_G^{\,2}+\dfrac{m}{2a}\int\limits_0^a \dot{GP}^2(r,\theta,\varphi)\,dr\,.$

✸ **Задача 7.1 (**Стр. 39/Зад. 221**)**

Краищата на хомогенна тежка и тънка пръчка АВ с дължина 2ℓ се хлъзгат по гладките хоризонтална и вертикална страни на правоъгълна рамка, която се върти около вертикалната си страна с постоянна ъглова скорост ω. Да се определи движението на пръчката.



Решение: в качеството на обобщена координата избираме ъгъл φ.

(1) $\quad L=T-U$

За изразяване на кинетичната енергия T използваме формула (5) от теоретичната част, а именно

(2) $\quad T=\dfrac{1}{2}m\,\dot{\vec{r}}_G^{\,2}+\dfrac{m}{2a}\int\limits_0^a \dot{GP}^2(r,\theta,\varphi)\,dr\,,$

където P е произволна точка, отстояща на разстояние r от центъра на тежестта G. Очевидно в равнината Oxy

(3) $\quad \vec{r}_G=l.\sin\varphi\,\vec{i}+l.\cos\varphi\,\vec{j}\,,$

следователно

(4) $\quad \dot{\vec{r}}_G=l.\cos\varphi\,\dot{\phi}\,\vec{i}+l.\sin\varphi\left(\dfrac{d\vec{i}}{dt}\right)-l.\sin\varphi\,\dot{\phi}\,\vec{j}\,,$

където е взето под внимание, че поради въртенето около оста $O\vec{y}$ единичният вектор $\vec{i}$ се върти около т. О (в *равнината Oxz*) с ъглова скорост $\vec{\omega}$, т.е. $\vec{i}=\vec{i}(t)$, и следователно този единичен вектор също трябва да бъде диференциран по времето. Както е известно

(5) $\quad \dfrac{d\vec{i}}{dt}=\vec{i}\times\vec{\omega}=\vec{i}\times(\omega\,\vec{j})=\omega(\underbrace{\vec{i}\times\vec{j}}_{\vec{k}})=\omega\vec{k}\,.$

С отчитането на (5) формула (4) добива вида

(6) $\quad \dot{\vec{r}}_G=l.\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{i}+l.\sin\varphi\,\omega\vec{k}-l.\sin\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{j}\,.$

Тогава

(7) $\quad \dot{\vec{r}}_G^{\,2}=l^2.\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2+l^2.\sin^2\varphi\,\omega^2+l^2.\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2=l^2\,(\dot{\varphi}^2+\omega^2\sin^2\varphi)\,,$

с което големината на скоростта на центъра на масите е представена в сферични координати, с което кинетичната енергия на постъпателно движение е

(8) $\quad T_{Пост}=\dfrac{1}{2}m\,\dot{\vec{r}}_G^{\,2}=\dfrac{1}{2}m\,l^2\,(\dot{\varphi}^2+\omega^2\sin^2\varphi)$

Провеждаме същите (*по смисъл*) разглеждания и за вектора $\overrightarrow{GP}\equiv\vec{r}$:

(9) $\quad \overrightarrow{GP}=-r\sin\varphi\;\vec{i}+r\cos\varphi\,\vec{j}\,.$

(10) $\quad \dot{GP}=-r.\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{i}-r.\sin\varphi\,\omega\vec{k}-r.\sin\varphi\,\dot{\varphi}\;\vec{j}\,.$

(11) $\quad \dot{GP}^{\,2}=r^2.\cos^2\varphi\,\dot{\phi}^2+r^2.\sin^2\varphi\,\omega^2+r^2.\sin^2\varphi\,\dot{\phi}^2=r^2\,(\dot{\phi}^2+\omega^2\sin^2\varphi)\,,$

с което кинетичната енергия на въртеливото движение се представя във вида

(12) $\quad T_{Върт} = \frac{m}{2l}\int_0^l \dot{GP}^2\, dr = \frac{m}{2l}\int_0^l r^2(\dot\varphi^2 + \omega^2 \sin^2\varphi)\, dr = \frac{m}{2l}(\dot\varphi^2 + \omega^2 \sin^2\varphi)\int_0^l r^2\, dr =$

$= \frac{m}{2l}(\dot\varphi^2 + \omega^2 \sin^2\varphi)\frac{r^3}{3}\Big|_0^l = \frac{ml^2}{6}(\dot\varphi^2 + \omega^2 \sin^2\varphi).$

С помощта на (8) и (12) определяме пълната кинетична енергия на въртящото се тяло:

$T = T_{Пост} + T_{Върт} = \frac{ml^2}{2}(\dot\varphi^2 + \omega^2 \sin^2\varphi) + \frac{ml^2}{6}(\dot\varphi^2 + \omega^2 \sin^2\varphi)$, т.е.

(13) $\quad T = \frac{2}{3}ml^2(\dot\varphi^2 + \omega^2 \sin^2\varphi).$

За да определим лагранжиана на системата (тялото), остава да изразим и неговата потенциална енергия (*потенциална енергия на пръчката относно нейния център на масите* G)

(14) $\quad U = mg\, y_G = mgl\cos\varphi.$

Лагранжианът е

(15) $\quad L(\varphi,\dot\varphi) = T(\dot\varphi) - U(\varphi) = \frac{2}{3}ml^2(\dot\varphi^2 + \omega^2 \sin^2\varphi) - mgl\cos\varphi.$

Уравнението на Лагранж от втори род е

(16) $\quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = 0$

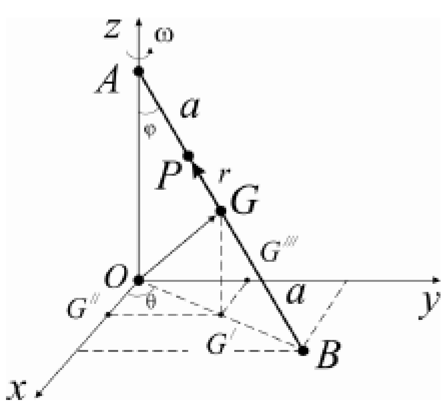
$$\left|\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{2}{3}ml^2\omega^2 2\sin\varphi\cos\varphi - mgl(-\sin\varphi) \\ &\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \frac{2}{3}ml^2 2\dot\varphi = \frac{4}{3}ml^2\dot\varphi \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \frac{4}{3}ml^2\ddot\varphi \end{aligned}\right. .$$

След заместване на така намерените производни в (16), получаваме

(17) $\quad \frac{4}{3}ml^2\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi + mgl\sin\varphi - \frac{4}{3}ml^2\ddot\varphi = 0 \qquad \Big| .\times\frac{-3}{4ml^2}$

(18) $\quad \ddot\varphi - \omega^2\sin\varphi\cos\varphi = \frac{3}{4l}g\sin\varphi.$

Това е ОДУ от втори ред за намирането на неизвестната функция $\varphi = \varphi(t)$.



✸ Задача 7.2 (Стр. 37/Зад. 211**)**

Да се определи движението на тежка, тънка и хомогенна пръчка АВ с дължина $2a$ и маса m, единият край В на която се движи по постоянна хоризонтална равнина Оху, а другият ѝ край А – по постоянна вертикална ос Oz.

Решение: търси се уравнението на движение на пръчката АВ (*нейния център на* *масите*). В качеството на обобщени координати избираме ъглите θ и φ.

(1) $L = T - U$

(2) $T = T_{Пост} + T_{Върт}$.

Нека изразим $\vec{r}_G \equiv \overline{OG}$ и $\vec{r} \equiv \overline{GP}$ посредством обобщените координати:

(3) $\vec{r}_G = a\sin\varphi\cos\theta\,\vec{i} + a\sin\varphi\sin\theta\,\vec{j} + a\cos\varphi\,\vec{k}$,

следователно

(4) $$\dot{\vec{r}}_G = a\cos\varphi\dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{i} + a\sin\varphi(-\sin\theta)\dot{\theta}\,\vec{i} + a\cos\varphi\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{j} + a\sin\varphi\cos\theta\dot{\theta}\,\vec{j} +$$
$$+ a(-\sin\varphi)\dot{\varphi}\,\vec{k} = a(\cos\varphi\dot{\varphi}\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta\dot{\theta})\,\vec{i} +$$
$$+ a(\cos\varphi\dot{\varphi}\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta\dot{\theta})\,\vec{j} - a\sin\varphi\dot{\varphi}\,\vec{k}$$

$$\dot{\vec{r}}_G^{\,2} = a^2(\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2\cos^2\theta - 2\cos\varphi\cos\theta\sin\varphi\sin\theta\dot{\varphi}\dot{\theta} + \sin^2\varphi\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2) +$$
$$+ a^2(\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + 2\cos\varphi\sin\theta\sin\varphi\cos\theta\dot{\varphi}\dot{\theta} + \sin^2\varphi\,\cos^2\theta\dot{\theta}^2) + a^2\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2 =$$
$$= a^2(\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2\cos^2\theta + \cos^2\varphi\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \sin^2\varphi\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \sin^2\varphi\cos^2\theta\dot{\theta}^2) + a^2\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2 =$$
$$= a^2\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2 + a^2\sin^2\varphi\dot{\theta}^2 + a^2\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2 = a^2\dot{\varphi}^2 + a^2\sin^2\varphi\dot{\theta}^2 = a^2(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\dot{\theta}^2),$$ т.е.

(5) $\dot{\vec{r}}_G^{\,2} = a^2(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\dot{\theta}^2)$.

Разсъждавайки и работейки по същия начин получаваме, че

(6) $\overline{GP} = r^2(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\dot{\theta}^2)$.

Остава да заместим (5) и (6) в израза за кинетичната енергия на идеално твърдо тяло

(7) $$T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}_G^{\,2} + \frac{m}{2a}\int_0^a \dot{GP}^2\,dr = \frac{1}{2}m\,a^2(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\dot{\theta}^2) + \frac{m}{2a}\int_0^a r^2(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\dot{\theta}^2)\,dr =$$
$$= \frac{1}{2}m\,a^2(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\dot{\theta}^2) + \frac{m}{2a}(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\dot{\theta}^2)\int_0^a r^2\,dr =$$
$$= \frac{m\,a^2}{2}(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\dot{\theta}^2) + \frac{m}{2a}(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\dot{\theta}^2)\frac{a^3}{3} = \frac{2}{3}m\,a^2(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\dot{\theta}^2).$$

Потенциалната енергия на пръчката е

(8) $U = mg\,y_G = mga\cos\varphi$.

Лагранжианът е

(9) $L = T - U = \dfrac{2}{3}m\,a^2(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\dot{\theta}^2) - mga\cos\varphi$.

Уравненията на Лагранж от втори род са две – за всяка от двете обобщени координати:

А) Уравнение за θ:

(10) $\dfrac{\partial L}{\partial\theta} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = 0$.

Понеже $\dfrac{\partial L}{\partial\theta} = 0$, то очевидно θ е циклична променлива. Това означава, че съгласно (10) ще имаме $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = 0$, т.е. функцията $\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = C_1$ ще бъде интеграл на движението:

(11) $\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = \dfrac{2}{3}m\,a^2\sin^2\varphi\,2\dot{\theta} \equiv \dfrac{4}{3}m\,a^2\sin^2\varphi\dot{\theta} = C_1$.

Така достигаме до уравнението

(12) $\sin^2\varphi\,\dot{\theta} = C_1^*$,

където $C_1^* = C_1 / \frac{4}{3} m a^2$ е интеграционна константа.

Очевидно от (12) може да бъде определена производната

(13) $\dot{\theta} = \dfrac{C_1^*}{\sin^2\varphi}$.

Б) Уравнението за φ:

(14) $\dfrac{\partial L}{\partial\varphi} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = 0$

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial\varphi} = \dfrac{2}{3} m a^2 2\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\theta}^2 - mgl(-\sin\varphi) \\ \dfrac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = \dfrac{2}{3} m a^2 2\dot{\phi} = \dfrac{4}{3} m a^2\dot{\phi} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = \dfrac{4}{3} m a^2\ddot{\varphi} \end{array}\right. .$$

Тогава уравнението на Лагранж (14) добива вида

(15) $\dfrac{4}{3} m a^2 \sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\theta}^2 + mga\sin\varphi - \dfrac{4}{3} m a^2\ddot{\varphi} = 0 \qquad \Big| . \times \dfrac{-3}{4ma^2}$

(18) $\ddot{\varphi} - \sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\theta}^2 - \dfrac{3}{4}\dfrac{g}{a}\sin\varphi = 0$.

След заместване на (13) в (18) получаваме

(19) $\ddot{\varphi} - \dfrac{\cos\varphi . C_1^2}{\sin^3\varphi} - \dfrac{3}{4}\dfrac{g}{a}\sin\varphi = 0$.

Това е ОДУ от втори ред за намирането на неизвестната функция $\varphi = \varphi(t)$, след определянето на която може, с помощта на (13), да бъде определена и другата неизвестна функция $\theta = \theta(t)$.