СКОБ(К)И НА ПУАСОН

Теоретичен минимум: Скобките на Поасон са елемент от математическия апарат на теоретичната физика, с помощта на който може да се постигне много рационален и унифициран запис на:

- уравненията на движение (*в частност уравненията на Хамилтон*), както и
- условието една функция $f(q,p,t)$ на обобщените координати и обобщените импулси да е **интеграл на движението**.

Действително, ако разгледаме пълната производна по времето на една функция $f(q,p,t)$, ще имаме

(Ф.1) $$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial t}\right)\equiv\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k\right).$$

Но съгласно уравненията на Хамилтон $\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$ и $\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}$, за $i=1,2,\ldots,s$.

Замествайки производните $\dot{p}_i$ и $\dot{q}_i$ в (Ф.1), получаваме

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k}-\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)=\frac{\partial f}{\partial t}+[H,f],$$ т.е.

(Ф.2) $$\boxed{\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+[H,f]},$$

където

(Ф.3) $$\boxed{[H,f]=\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k}-\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)}$$

е скобка на Поасон за функциите H и f.

Ако в (Ф.3) заместим $f=p_i$ и отчетем, че $\frac{\partial p_i}{\partial p_k}=\delta_{ik}$, $\frac{\partial q_i}{\partial q_k}=\delta_{ik}$, но $\frac{\partial p_i}{\partial q_k}=\frac{\partial q_i}{\partial p_k}=0$, то получаваме каноничните уравнения за импулсите във вида

(*) $\dot{p}_i=[H,p_i]$.

Аналогично, ако в (Ф.3) заместим $f=q_i$, получаваме каноничните уравнения за обобщените координати във вида

(**) $\dot{q}_i=[H,q_i]$.

Записани в този си вид чрез скобки на Поасон, каноничните уравнения са по-„регулярни".

Както е известно, функциите от динамичните променливи (p и q напр.), които <u>остават постоянни във времето</u>, се наричат **интеграли на движението**. Както следва от (Ф.2) и от тази дефиниция, условието функцията $f(q,p,t)$ да е интеграл на движението, т.е. $\frac{df}{dt}=0$, се свежда до условието

(Ф.4) $$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t}+[H,f]=0}.$$

Ако $f(q,p,t)$ <u>не зависи</u> **явно** от времето (*което е напълно логично изискване за интеграл на движението*), т.е. $f=f(q,p)$, то $\frac{\partial f}{\partial t}=0$ и следователно условието (Ф.4) се свежда до условието

(Ф.5) $$\boxed{[H,f]=0},$$

т.е. нейната скобка на Поасон с функцията на Хамилтон трябва да е равна на нула.

Скобки на Поасон могат да се дефинират за кои да е две функции $f(q,p,t)$ и $g(q,p,t)$ на обобщените координати и на обобщените импулси посредством съотношението

(Ф.6) $$\boxed{[g,f]=\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial g}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k}-\frac{\partial g}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)}.$$

✸ **а) Да се намери скобката на Поасон** $\{\vec{A}.\vec{p},\vec{B}.\vec{r})\}=?$

Решение: По определение за скобка на Поасон

(1) $$\{\vec{A}.\vec{p},\vec{B}.\vec{r}\}=\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial(\vec{A}.\vec{p})}{\partial p_k}\frac{\partial(\vec{B}.\vec{r})}{\partial x_k}-\frac{\partial(\vec{A}.\vec{p})}{\partial x_k}\frac{\partial(\vec{B}.\vec{r})}{\partial p_k}\right).$$

Нека предварително определим производните, участващи в (1):

☞ $\frac{\partial(\vec{A}.\vec{p})}{\partial p_k}=\frac{\partial(A_i.p_i)}{\partial p_k}=A_i\frac{\partial p_i}{\partial p_k}=A_i\,\delta_{ik}=A_k$;

☞ $\frac{\partial(\vec{A}.\vec{p})}{\partial x_k}=\frac{\partial(A_i.p_i)}{\partial x_k}=A_i\frac{\partial p_i}{\partial x_k}=A_i.0=0$;

☞ $\frac{\partial(\vec{B}.\vec{r})}{\partial p_k}=\frac{\partial(B_i.x_i)}{\partial p_k}=B_i\frac{\partial x_i}{\partial p_k}=B_i.0=0$;

☞ $\frac{\partial(\vec{B}.\vec{r})}{\partial x_k}=\frac{\partial(B_i.x_i)}{\partial x_k}=B_i\frac{\partial x_i}{\partial x_k}=B_i.\delta_{ik}=B_k$.

Заместваме тези 4 производни в (1) и получаваме

(2) $$\{\vec{A}.\vec{p},\vec{B}.\vec{r}\}=\sum_k[(A_k).(B_k)-(0).(0)]=\sum_k A_k.B_k\equiv A_k.B_k=\vec{A}.\vec{B}.$$

✸ **в) Да се намери скобката на Поасон** $\{A.L, B.L\} = ?$

Решение: По определение за скобка на Поасон

(6) $\{\vec{A}.\vec{L}, \vec{B}.\vec{L}\} = \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial(\vec{A}.\vec{L})}{\partial p_k}\frac{\partial(\vec{B}.\vec{L})}{\partial x_k} - \frac{\partial(\vec{A}.\vec{L})}{\partial x_k}\frac{\partial(\vec{B}.\vec{L})}{\partial p_k}\right).$

В подусловие (б) от тази задача вече определихме производните:

☞ $\frac{\partial(\vec{A}.\vec{L})}{\partial p_k} = (\vec{A}\times\vec{r})_k$, и

☞ $\frac{\partial(\vec{A}.\vec{L})}{\partial x_k} = (\vec{p}\times\vec{A})_k$.

Тогава по напълно аналогичен начин

☞ $\frac{\partial(\vec{B}.\vec{L})}{\partial p_k} = (\vec{B}\times\vec{r})_k$, и

☞ $\frac{\partial(\vec{B}.\vec{L})}{\partial x_k} = (\vec{p}\times\vec{B})_k$.

Съгласно (6)

$\{\vec{A}.\vec{L}, \vec{B}.\vec{L}\} = \sum_k [(\vec{A}\times\vec{r})_k.(\vec{p}\times\vec{B})_k - (\vec{p}\times\vec{A})_k(\vec{B}\times\vec{r})_k] \equiv$

$\equiv (\vec{A}\times\vec{r})_k.(\vec{p}\times\vec{B})_k - (\vec{p}\times\vec{A})_k(\vec{B}\times\vec{r})_k$, или

(7) $\{\vec{A}.\vec{L}, \vec{B}.\vec{L}\} = (\vec{A}\times\vec{r}).(\vec{p}\times\vec{B}) - (\vec{p}\times\vec{A})(\vec{B}\times\vec{r})$

За представяне на получения резултат в по-компактна и обозрима форма може да се приложи следната формула за смесено произведение на 4 вектора

(8) $(\vec{M}\times\vec{N}).(\vec{P}\times\vec{Q}) = (\vec{M}.\vec{P})(\vec{N}.\vec{Q}) - (\vec{M}.\vec{Q})(\vec{N}.\vec{P})$.

Прилагаме (8) спрямо двете смесени произведения на вектори в (7):

$\{\vec{A}.\vec{L}, \vec{B}.\vec{L}\} = [(\vec{A}.\vec{p}).(\vec{r}.\vec{B}) - (\vec{A}.\vec{B})(\vec{r}.\vec{p})] - [(\vec{p}.\vec{B})(\vec{A}.\vec{r}) - (\vec{p}.\vec{r})(\vec{A}.\vec{B})] =$

$= (\vec{A}.\vec{p})(\vec{r}.\vec{B}) - (\vec{A}.\vec{B})(\vec{r}.\vec{p}) - (\vec{p}.\vec{B})(\vec{A}.\vec{r}) + (\vec{A}.\vec{B})(\vec{p}.\vec{r}) = (\vec{A}.\vec{p})(\vec{r}.\vec{B}) - (\vec{p}.\vec{B})(\vec{A}.\vec{r}) =$

$= -[(\vec{A}.\vec{r})(\vec{B}.\vec{p}) - (\vec{A}.\vec{p})(\vec{B}.\vec{r})]$.

Ако спрямо последния запис приложим формула (8), но в „обратна посока", ще получим

(9) $\{\vec{A}.\vec{L}, \vec{B}.\vec{L}\} = -[(\vec{A}.\vec{r})(\vec{B}.\vec{p}) - (\vec{A}.\vec{p})(\vec{B}.\vec{r})] = -(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{r}\times\vec{p})$.

И понеже $(\vec{r}\times\vec{p}) = \vec{L}$, то последния резултат окончателно добива вида

(10) $\{\vec{A}.\vec{L}, \vec{B}.\vec{L}\} = -(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{L}$, което е търсената стойност на скобката.

✸ **Задача 9.4**

Чрез пресмятане на съответната скобка на Поасон да се докаже, че при движението на една материална точка в централно-симетрично поле проекцията L_z на момента на импулса е интеграл на движение.

Решение: доказателството ще извършим, като използваме, че една функция $f(q, p)$ на обобщените координати и обобщените импулси е интеграл на движението, ако за скобката й на Поасон $[H, f]$ е изпълнено

(1) $[H, f] = 0$,

където по дефиниция

(2) $$[H, f] = \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right).$$

Следователно за да докажем, че функцията $f = L_z$ е интеграл на движението, трябва да покажем, че е в сила

(3) $$\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial L_z}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial L_z}{\partial p_k}\right) = 0.$$

За целта нека най-напред определим нужните производни. В декартови координати хамилтонианът на свободна частица е

(4) $$H = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z) = \frac{1}{2m}(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2) + U(x, y, z),$$

а моментът на импулса й е

(5) $$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = (y.p_z - z.p_y)\ \vec{i} + (z.p_x - x.p_z)\ \vec{j} + (x.p_y - y.p_x)\ \vec{k},$$

откъдето следва, че

(6) $L_z = (x.p_y - y.p_x)$.

Следва да отчетем още, че $r = |\ \vec{r}\ | = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \equiv (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$.

За пресмятане на скобката на Поасон (3) ще бъдат необходими следните производни:

А) $\dfrac{\partial H}{\partial p_k}$ за $k = x, y, z$, които са съответно:

(7а) $\dfrac{\partial H}{\partial p_x} = \dfrac{p_x}{m}$; (7б) $\dfrac{\partial H}{\partial p_y} = \dfrac{p_y}{m}$; (7с) $\dfrac{\partial H}{\partial p_z} = \dfrac{p_z}{m}$.

Б) $\dfrac{\partial H}{\partial q_k}$ за $k = x, y, z$, които са:

(8а) $$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial U(r)}{\partial x} = \frac{\partial U(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial U(r)}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2}\frac{2x}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r} = \frac{x}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r};$$

(8б) $$\frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{\partial U(r)}{\partial y} = \frac{\partial U(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial U(r)}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2}\frac{2y}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r} = \frac{y}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r};$$

(8с) $$\frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{\partial U(r)}{\partial z} = \frac{\partial U(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial U(r)}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2}\frac{2z}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r} = \frac{z}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r}.$$

В) $\dfrac{\partial L_z}{\partial p_k}$ за $k = x, y, z$, които са:

(9а) $\dfrac{\partial L_z}{\partial p_x} = -y$; (9б) $\dfrac{\partial L_z}{\partial p_y} = x$; (9с) $\dfrac{\partial L_z}{\partial p_z} = 0$.

Г) $\dfrac{\partial L_z}{\partial q_k}$ за $k = x, y, z$, които са:

(10а) $\frac{\partial L_z}{\partial x} = p_y$; (10б) $\frac{\partial L_z}{\partial y} = -p_x$; (10с) $\frac{\partial L_z}{\partial z} = 0$.

Заместваме намерените производни (7а)÷(10с) в (2) и получаваме

$$(11) \quad [H, L_z] = \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial L_z}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial L_z}{\partial p_k}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{\partial L_z}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial L_z}{\partial p_x}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial p_y}\frac{\partial L_z}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial L_z}{\partial p_y}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial p_z}\frac{\partial L_z}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial L_z}{\partial p_z}\right) =$$

$$= \left(\frac{p_x}{m}p_y - \frac{x}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r}.(-y)\right) + \left(\frac{p_y}{m}(-p_x) - \frac{y}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r}.x\right) + \left(\frac{p_z}{m}.0 - \frac{z}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r}.0\right) =$$

$$= \left(\frac{p_x p_y}{m} + \frac{x.y}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r}\right) + \left(-\frac{p_x p_y}{m} - \frac{x.y}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r}\right) = 0, \Rightarrow L_z \text{ е интеграл на движение}$$

Тема 11: Уравнение на Хамилтон-Якоби

Теоретичен минимум: ако в уравнението

$$(1) \qquad \frac{\partial S}{\partial t} + H(p_i, q_i, t) = 0,$$

обобщените импулси p_i заместим с частните производни от действието, т.е. $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$, то се получава следното диференциално уравнение за действието:

$$(2) \qquad \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, ..q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0.$$

Това **частно** диференциално уравнение от първи ред се нарича **уравнение на Хамилтон-Якоби**.

✱ Задача 11.1

Да се покаже, че уравнението на Хамилтон-Якоби за частица с маса m, движеща се в поле с потенциал $U(\vec{r})$, е нелинейно частно ДУ от първи ред.

Решение: Както е известно хамилтонианът (*в декартови координати*) за такава частица, е

$$(1) \qquad H(p, q) = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + U(\vec{r}),$$

Отчитайки, че $p_x = \frac{\partial S}{\partial x}$, $p_y = \frac{\partial S}{\partial y}$ и $p_z = \frac{\partial S}{\partial z}$, от (1) и (2) от уводната част получаваме

$$(2) \qquad \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + U(\vec{r}) = 0,$$

откъдето следва, че уравнението на Хамилтон-Якоби е действително **нелинейно частно** диференциално уравнение от **първи** ред относно действието S.

Тема 1: Координатни системи. Криволинейни координати. Декартови, цилиндрични и сферични координати

(*базисни вектори, параметри на Ламе, градиент и лапласов оператор в тези координати*)

Теоретичен минимум: Множество задачи в механиката могат да се решат по-просто, ако вместо декартови координати се използват други такива, които по-адекватно са свързани със естеството и спецификата на съответната задача. Такива координати q_1, q_2 и q_3 могат да се въведат напр. посредством съотношенията

$$(1) \qquad \left| \begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3) \\ y &= y(q_1, q_2, q_3) \\ z &= z(q_1, q_2, q_3) \end{aligned} \right.$$

Ако функциите (1) са избрани по такъв начин, че чрез тях се установява **еднозначно** и **обратимо съответствие** между декартовите координати x, y, z и величините q_1, q_2, q_3, то последните могат да бъдат разглеждани като нови координати, наречени **криволинейни координати**. Тогава радиус-векторът на произволна точка P с декартови координати x, y, z може да се представи във вида

$$(2) \qquad \vec{r} = x(q_1, q_2, q_3)\,\vec{i} + y(q_1, q_2, q_3)\,\vec{j} + z(q_1, q_2, q_3)\,\vec{k}, \text{ т.е. } \vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3).$$

Посредством производните

$$(3) \qquad \left| \begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} &= \frac{\partial x}{\partial q_1}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\vec{k} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} &= \frac{\partial x}{\partial q_2}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_2}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_2}\vec{k}, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} &= \frac{\partial x}{\partial q_3}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_3}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_3}\vec{k} \end{aligned} \right.$$

т.е. $$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} = \frac{\partial x}{\partial q_m}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_m}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_m}\vec{k},$$

се дефинират **три линейно-независими вектора**, чиито **големини** са съответно

$$(4) \qquad \left| \begin{aligned} H_1 &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} \\ H_2 &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}, \\ H_3 &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2} \end{aligned} \right.$$

или съкратено

$$\boxed{H_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}}\,, \qquad i = 1,2,3\,.$$

Величините H_1, H_2 и H_3 се наричат **параметри на Ламе**. Ако всеки един от векторите (3) разделим на съответната му големина (4), получаваме тройка единични вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, образуващи **векторен базис** в новата криволинейна координатна система

(5) $$\vec{e}_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}, \qquad \vec{e}_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}, \qquad \vec{e}_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}.$$

или в съкратен запис

$$\vec{e}_m = \frac{1}{H_m}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} = \frac{1}{H_m}\left(\frac{\partial x}{\partial q_m}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_m}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_m}\vec{k}\right).$$

Елемент от дъга ds в **декартова КС** се представя (*стандартно*) във вида

(6) $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2\,.$$

Нека вземем под внимание, че както следва от (1)

(7) $$\left|\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3}dq_3 \\ dy &= \frac{\partial x}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3}dq_3 \\ dz &= \frac{\partial x}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3}dq_3 \end{aligned}\right. \quad ,$$

и нека заместим (7) в (6), като отчетем, че при **<u>ортогонални</u>** криволинейни КС (*с каквито главно ще работим по-нататък*) е в сила т.нар. **условие за ортогоналност**. Съгласно това условие „смесени" членове от вида $dq_i dq_j$ не бива да фигурират в (6). Така получаваме, че

$$\left|\begin{aligned} dx^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 dq_1{}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 dq_2{}^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2 dq_3{}^2 \\ dy^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 dq_1{}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 dq_2{}^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2 dq_3{}^2\,, \\ dz^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 dq_1{}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 dq_2{}^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2 dq_3{}^2 \end{aligned}\right.$$

откъдето след събирането на горните равенства с отчитане на (4) и (6) следва

(8) $$ds^2 = H_1^2\, dq_1{}^2 + H_2^2\, dq_2{}^2 + H_3^2\, dq_3{}^2\,.$$

Ако (*формално*) представим ds в аналогична на (6) форма, отнасяща се обаче за „*криволинейната*" КС, ще имаме

(9) $$ds^2 = ds_1{}^2 + ds_2{}^2 + ds_3{}^2\,.$$

От сравняването на (8) и (9) се получава (*следва*), че

(10) $$ds_1 = H_1.dq_1\,, \qquad ds_2 = H_2.dq_2\,, \qquad ds_3 = H_3.dq_3\,,$$

или

(11) $$ds_i = H_i.dq_i\,,$$

откъдето следва **още едно представяне за коефициентите на Ламе**

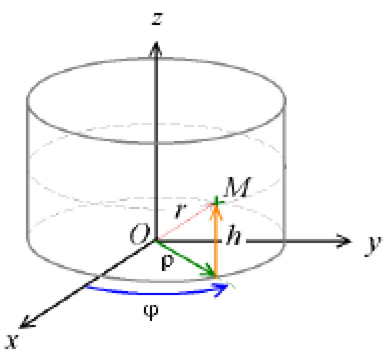
(12) $$\boxed{H_i = \frac{ds_i}{dq_i}}.$$

Елементарният обем в криволинейни координати ще бъде

(13) $$\boxed{dV = ds_1.ds_2.ds_3 = H_1.H_2.H_3\, dq_1.dq_2.dq_3}$$

☛ Нека разгледаме **две важни и широко използвани в ТМ криволинейни координатни системи**:

1. Цилиндрична координатна система



Връзката между декартови (x, y, z) и цилиндрични (ρ, φ, z) координати се дава със съотношенията

(14) $$\left| \begin{aligned} &x = \rho.\cos\varphi \\ &y = \rho.\sin\varphi, \qquad \text{или още} \\ &z = z \end{aligned} \right.$$

(14') $$\boxed{\vec{r} = \rho.\cos\varphi\,\vec{i} + \rho.\sin\varphi\,\vec{j} + z\,\vec{k}}.$$

Нека в (4) и (5) положим $q_1 \to \rho$, $q_2 \to \varphi$, $q_3 \to z$:

$$\left| \begin{aligned} &H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 0} = 1 \\ &H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{(-\rho\sin\varphi)^2 + (\rho\cos\varphi)^2} = \rho \\ &H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{0 + 0 + 1} = 1 \end{aligned} \right.$$

Така за параметрите на Ламе H_1, H_2, H_3 получаваме

(15) $$\left| \begin{aligned} &H_1 = 1 \\ &H_2 = \rho \\ &H_3 = 1 \end{aligned} \right.$$

За базисните вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, след диференциране на $\vec{r} = \rho.\cos\varphi\,\vec{i} + \rho.\sin\varphi\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ по $q_1 \equiv \rho$, $q_2 \equiv \varphi$, $q_3 \equiv z$ и с отчитане на (5) и (15) се получава:

(16) $$\left| \begin{aligned} &\vec{e}_1 \equiv \vec{e}_\rho = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \equiv \frac{1}{1}\frac{\partial}{\partial \rho}[\rho.\cos\varphi\,\vec{i} + \rho.\sin\varphi\,\vec{j} + z\,\vec{k}] = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j} \\ &\vec{e}_2 \equiv \vec{e}_\varphi = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}[\rho.\cos\varphi\,\vec{i} + \rho.\sin\varphi\,\vec{j} + z\,\vec{k}] = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} \\ &\vec{e}_3 \equiv \vec{e}_z = \frac{1}{H_3}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \equiv \frac{1}{1}\frac{\partial}{\partial z}[\rho.\cos\varphi\,\vec{i} + \rho.\sin\varphi\,\vec{j} + z\,\vec{k}] = \vec{k} \end{aligned} \right.$$

От (16) непосредствено се вижда, че базисните вектори $\vec{e}_\rho$ и $\vec{e}_\varphi$ на цилиндричната координатна система са променливи (*по посока*) вектори, но третият базисен вектор $\vec{k} = const$.

От (14) и (16) се получава следното представянето за радиус-вектора на точка M в цилиндрични координати:

(17) $\boxed{\vec{r} = \rho.\vec{e}_\rho + z\,\vec{k}}$.

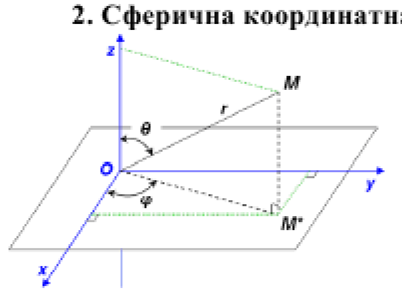
******Допълнение***:* от (16) се вижда още, че матрицата на трансформация на координатите (*от декартови в цилиндрични*) има вида

$$M = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

като очевидно $\det M = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$.

Забележка: **<u>Полярната координатна система</u>** може да се разглежда като **частен случай** на цилиндрична координатна система, за която $z = 0$.

2. Сферична координатна система



Връзката между декартови (x, y, z) и сферични (r, θ, φ) координати се дава със съотношенията

$$(18)\quad \left|\begin{array}{l} x = r.\sin\theta.\cos\varphi \\ y = r.\sin\theta.\sin\varphi\,, \\ z = r.\cos\theta \end{array}\right.$$

като очевидно

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,, \text{ и } tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

С помощта на (18) радиус-векторът на точка М в сферични координати може да се представи във вида

(19) $\vec{r} = r.\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + r.\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + r.\cos\theta\,\vec{k}$.

Ако в (4) положим $q_1 \to r,\ q_2 \to \theta,\ q_3 \to \varphi$, то параметрите на Ламе H_1, H_2, H_3 ще бъдат

☞ $$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(\sin\theta\cos\varphi)^2 + (\sin\theta\sin\varphi)^2 + (\cos\theta)^2} = \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = 1;$$

☞ $$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{r^2(\cos\theta\cos\varphi)^2 + r^2(\cos\theta\sin\varphi)^2 + r^2(-\sin\theta)^2} = \sqrt{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \sqrt{r^2} = r;$$

☞ $H_3=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}=$

$=\sqrt{r^2[\sin\theta.(-\sin\varphi)]^2+r^2(\sin\theta\cos\varphi)^2+0}=\sqrt{r^2\sin^2\theta}=r.\sin\theta$,

т.е.

$$(20)\quad \left| \begin{array}{l} H_1=1 \\ H_2=r \\ H_3=r.\sin\theta \end{array} \right. .$$

В декартови координати радиус-векторът се представя във вида $\vec{r}=r.\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i}+r.\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j}+r.\cos\theta\,\vec{k}$, но в сферични координати базисните вектори $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$, пресметнати по общата формула $\vec{e}_i=\frac{1}{H_i}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}$ ще са

$$(21)\quad \left| \begin{array}{l} \vec{e}_1\equiv\vec{e}_r=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}=\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i}+\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j}+\cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{e}_2\equiv\vec{e}_\theta=\frac{1}{H_2}\frac{\partial\vec{r}}{\partial \theta}=\cos\theta\cos\varphi\,\vec{i}+\cos\theta\sin\varphi\,\vec{j}-\sin\theta\,\vec{k} \\ \vec{e}_3\equiv\vec{e}_\varphi=\frac{1}{H_3}\frac{\partial\vec{r}}{\partial \varphi}=-\sin\varphi\,\vec{i}+\cos\varphi\,\vec{j} \end{array} \right.$$

От (21) непосредствено се вижда, че и трите базисни вектора $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ и $\vec{e}_\varphi$ на сферичната координатна система са **променливи** (*по посока*) **вектори**.

Лесно се установява (*да се покаже!*) още, че тези три единични вектора са **взаимно ортогонални**, т.е. напр. $\vec{e}_r.\vec{e}_\theta=0$, $\vec{e}_r.\vec{e}_\varphi=0$, $\vec{e}_\theta.\vec{e}_\varphi=0$, и т.н.

От (19) и (21) непосредствено следва представяне за **радиус-вектора** на точка M в сферични координати:

(22) $\boxed{\vec{r}=r.\vec{e}_r}$.

****Допълнение***: от (21) се вижда още, че матрицата на трансформация на координатите (*от декартови в сферични*) има вида

$$M=\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix},$$

като очевидно $\det M=1$.

Диференциални оператори в криволинейни координати:

Нека представим в криволинейни координати основните **диференциални оператори**: $grad\ \varphi$, $div\ \vec{A}$, $rot\ \vec{A}$ и $\Delta\varphi$.

А) Градиент: ако $\vec{A}=grad\ \varphi$, то съставящата $A_{q\,i}$ на градиента в криволинейни координати ще бъде

(23) $A_{q\,i}=\frac{\partial\varphi}{\partial s_i}=\ldots$ заместваме $ds_i=H_i.dq_i$ от (11) $\ldots=\frac{\partial\varphi}{H_i\partial q_i}$,

като по повтарящия се индекс i се подразбира сумиране, следователно

(24) $$grad\ \varphi = \frac{1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\vec{e}_3 .$$

Б) Дивергенция:

Доказва се, че

(25) $$div\ \vec{A} = \frac{1}{H_1.H_2.H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2.H_3A_{q\,1}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_1.H_3A_{q\,2}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1.H_2A_{q\,3})\right].$$

В) Ротация:

Доказва се, че

(26) $$rot\ \vec{A} = \frac{1}{H_1.H_2.H_3}\begin{vmatrix} H_1\vec{e}_1 & H_2\vec{e}_2 & H_3\vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1A_{q\,1} & H_2A_{q\,2} & H_3A_{q\,3} \end{vmatrix}$$

Г) Оператор на Лаплас (*от <u>скаларно</u> поле*)**:**

(27) $$\Delta\varphi = div\ grad\ \varphi = div\ \{grad\ \varphi\} \equiv div\ \vec{A},$$

където

(28) $$\vec{A} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\vec{e}_3, \quad \text{т.е.} \quad A_{q\,i} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i},$$

следователно

(29) $$\Delta\varphi = div\ \vec{A} = \frac{1}{H_1.H_2.H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2.H_3A_{q\,1}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_1.H_3A_{q\,2}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1.H_2A_{q\,3})\right] =$$
$$= \frac{1}{H_1.H_2.H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(\frac{H_2.H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(\frac{H_1.H_3}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(\frac{H_1.H_2}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3})\right].$$

И така

(30) $$\boxed{\Delta\varphi = \frac{1}{H_1.H_2.H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(\frac{H_2.H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(\frac{H_1.H_3}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(\frac{H_1.H_2}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3})\right]}.$$

✸ Задача 1.1

Да се определят законите за скоростта и ускорението в цилиндрични координати. Чрез получените формули да се изрази (*в цилиндрични координати*) кинетичната енергия T на материална точка с маса m.

Решение: за определяне закона за скоростта в цилиндрични координати е достатъчно да се диференцира по времето радиус-вектора $\vec{r} = \rho.\vec{e}_\rho + z\vec{k}$:

(1) $$\vec{v} = \dot{\vec{r}} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}.\vec{e}_\rho + \rho.\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z}\vec{k} + z\dot{\vec{k}} \equiv \dot{\rho}.\vec{e}_\rho + \rho.\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z}\vec{k} .$$

Понеже съгласно (16) от теоретичната част

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \frac{d}{dt}[\cos\varphi\ \vec{i} + \sin\varphi\ \vec{j}] = -\sin\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{i} + \cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\vec{j} \equiv \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi ,$$

то за скоростта в цилиндрични координати получаваме

(2) $\vec{v} = \dot{\rho}.\vec{e}_\rho + \rho.\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z}\,\vec{k} = \dot{\rho}.\vec{e}_\rho + \rho.\dot{\varphi}\;\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{k}$,

или по компоненти

(3) $\vec{v} = v_\rho \vec{e}_\rho + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z$, където

(4) $v_\rho = \dot{\rho}, \qquad v_\varphi = \rho.\dot{\varphi}, \qquad v_z = \dot{z}$.

Очевидно **кинетичната енергия** T на материална точка с маса m може да бъде представена в цилиндрични координати посредством равенството

(5) $\boxed{T = \frac{m}{2}(v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2) = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)}$,

а големината на скоростта е

(6) $v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}$.

Чрез диференциране по времето на закона за скоростта (3) може да бъде получен и законът за ускорението в цилиндрични координати

(7) $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[v_\rho \vec{e}_\rho + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z] = \dot{v}_\rho \vec{e}_\rho + v_\rho \dot{\vec{e}}_\rho + \dot{v}_\varphi \vec{e}_\varphi + v_\varphi \dot{\vec{e}}_\varphi + \dot{v}_z \vec{e}_z + v_z \dot{\vec{e}}_z =$

$= \dot{v}_\rho \vec{e}_\rho + v_\rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{v}_\varphi \vec{e}_\varphi + v_\varphi(-\dot{\varphi}\vec{e}_\rho) + \dot{v}_z \vec{e}_z = (\dot{v}_\rho - v_\varphi \dot{\varphi})\vec{e}_\rho + (v_\rho \dot{\varphi} + \dot{v}_\varphi)\vec{e}_\varphi + \dot{v}_z \vec{e}_z$,

където е отчетено, че съгласно (16) от уводната част:

(8) $\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi , \qquad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho \qquad$ и $\qquad \dot{\vec{e}}_z = 0$.

Така получаваме

(9) $\vec{a} = a_\rho \vec{e}_\rho + a_\varphi \vec{e}_\varphi + a_z \vec{e}_z$,

където отчитайки, че $v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho.\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}$, ще имаме още

($10^А$) $a_\rho = \dot{v}_\rho - v_\varphi \dot{\varphi}$, т.е. $a_\rho = \ddot{\rho} - (\rho\dot{\varphi})\dot{\varphi} = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2$.

($10^Б$) $a_\varphi = v_\rho \dot{\varphi} + \dot{v}_\varphi$, т.е. $a_\varphi = \dot{\rho}\dot{\varphi} + \frac{d}{dt}(\rho\dot{\varphi}) = \dot{\rho}\dot{\varphi} + \dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} = 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}$

($10^В$) $a_z = \dot{v}_z$, т.е. $a_z = \ddot{z}$

Окончателно

(10) $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z$.

**Допълнение*: лесно може да се установи (*провери*), че

(11) $a_\varphi = 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} \equiv \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi})$.

Ако се вземе под внимание, че при движение в една равнина (*напр. движение в централно-симетрично поле*) елементарната площ в полярни координати (*т.е. при* $z = 0$), описана за време dt е

(12) $dS = \frac{1}{2}\rho(\rho.d\varphi) \equiv \frac{1}{2}\rho(\rho.\frac{d\varphi}{dt})dt = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}\,dt$,

то площната скорост (*площта, описвана от радиус-вектора на движещия се обект за единица време*) ще бъде

(13) $\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}$.

С отчитане на (13) формулата (11) за φ-тата (*ъгловата*) компонента на ускорението ще добие вида

(14) $$a_\varphi = \frac{2}{\rho}\frac{d\sigma}{dt}.$$

*Допълнение: лесно се установява (*да се покаже*), че

(15) $$\left|\begin{array}{l} \vec{i} = \cos\varphi\ \vec{e}_\rho - \sin\varphi\ \vec{e}_\varphi \\ \vec{j} = \sin\varphi\ \vec{e}_\rho + \cos\varphi\ \vec{e}_\varphi \\ \vec{k} = \vec{e} \end{array}\right..$$

✸ Задача 1.2

Да се определят законите за скоростта и ускорението в сферични координати. Чрез получените формули да се изрази (*в сферични координати*) кинетичната енергия T на материална точка с маса m.

Решение: за определяне закона за скоростта в сферични координати е достатъчно да се диференцира по времето радиус-вектора $\vec{r} = r.\vec{e}_r$

(1) $$\vec{v} = \dot{\vec{r}} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}.\vec{e}_r + r.\dot{\vec{e}}_r.$$

Тук следва да отчетем, че тъй като в сферични координати единичните вектори са

(2) $$\left|\begin{array}{l} \vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\ \vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\ \vec{j} + \cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\ \vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\ \vec{j} - \sin\theta\,\vec{k} \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\ \vec{i} + \cos\varphi\ \vec{j} \end{array}\right.,$$

то

$$\dot{\vec{e}}_r = (\cos\theta\dot{\theta})\cos\varphi\ \vec{i} + \sin\theta(-\sin\varphi\dot{\varphi})\ \vec{i} + (\cos\theta\dot{\theta})\sin\varphi\ \vec{i} + \sin\theta(\cos\varphi\dot{\varphi})\ \vec{i} + (-\sin\theta\dot{\theta})\vec{k} =$$

$$= \dot{\theta}[\cos\theta\cos\varphi\ \vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\ \vec{j} - \sin\theta\vec{k}] + \sin\theta[-\sin\varphi\ \vec{i} + \cos\varphi\ \vec{j}]\dot{\varphi}, \text{ т.е.}$$

(3[А]) $$\boxed{\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\phi\,\vec{e}_\varphi}.$$

Аналогично

$$\dot{\vec{e}}_\theta = (-\sin\theta\dot{\theta})\cos\varphi\ \vec{i} + \cos\theta(-\sin\varphi\dot{\varphi})\vec{i} + (-\sin\theta\dot{\theta})\sin\varphi\ \vec{j} + \cos\theta(\cos\varphi\dot{\varphi})\ \vec{j} - (\cos\theta\dot{\theta})\vec{k} =$$

$$= -\dot{\theta}[\sin\theta\cos\varphi\ \vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\ \vec{j} + \cos\theta\vec{k}] + \cos\theta[-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\ \vec{j}]\dot{\varphi}, \text{ т.е.}$$

(3[Б]) $$\boxed{\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{e}_r + \cos\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi}.$$

Накрая

(*) $$\dot{\vec{e}}_\varphi = -(\cos\varphi\,\phi)\vec{i} + (-\sin\varphi\,\phi)\ \vec{j} \equiv -[\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\ \vec{j}]\phi.$$

Забелязваме, че ако умножим първото от равенствата (2) с $\sin\theta$, а второто с $\cos\theta$, след което ги съберем, ще получим

$$\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta = \sin^2\theta\cos\varphi\ \vec{i} + \sin^2\theta\sin\varphi\ \vec{j} + \sin\theta\cos\theta\vec{k} +$$

$$+ \cos^2\theta\cos\varphi\ \vec{i} + \cos^2\theta\sin\varphi\ \vec{j} - \sin\theta\cos\theta\vec{k} = \cos\varphi\ \vec{i} + \sin\varphi\ \vec{j}.$$

Замествайки така намереното представяне за $\cos\varphi\ \vec{i} + \sin\varphi\ \vec{j}$ в (*), получаваме

(3[В]) $$\dot{\vec{e}}_\varphi = -[\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\ \vec{j}]\dot{\varphi} = -[\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta]\dot{\varphi}.$$

С отчитането на (3[А]) в (1) за скоростта в сферични координати получаваме

(4) $\vec{v} = \dot{r}.\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\,\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$,

или по компоненти

(5) $\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta + v_\varphi\vec{e}_\varphi$, където

(6) $v_r = \dot{r}, \qquad v_\theta = r.\dot{\theta}, \qquad v_\varphi = r.\sin\theta\,\dot{\varphi}$

Кинетичната енергия T на материална точка с маса m може да бъде представена в сферични координати посредством равенството

(7) $\boxed{T = \frac{m}{2}(v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta.\dot{\varphi}^2)}$,

а големината на скоростта е

(8) $v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta.\dot{\varphi}^2}$.

Чрез диференциране по времето на закона за скоростта (4) може да бъде получен и законът за **ускорението** в сферични координати

(9) $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}.\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\,\sin\theta\,\vec{e}_\varphi) =$

$= \ddot{r}.\vec{e}_r + \dot{r}.\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\vec{e}}_\theta + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\cos\theta\,\dot{\theta}\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\dot{\vec{e}}_\varphi$.

След коректно заместване в (9) на намерените вече в ($3^А$, $3^Б$, $3^В$) производни на единичните вектори, се получава

$\vec{a} = \ddot{r}.\vec{e}_r + \dot{r}\,(\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{e}_r + \cos\theta\,\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi +$

$+ r\ddot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\cos\theta\,\dot{\theta}\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta\,(-\sin\theta\,\vec{e}_r - \cos\theta\,\vec{e}_\theta)\dot{\varphi} =$

$= \{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\}\vec{e}_r + \{r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}\dot{\varphi}\,\sin\theta\cos\theta\}\vec{e}_\theta +$

$+ \{\dot{r}\,\dot{\varphi}\sin\theta + \dot{r}\,\dot{\varphi}\sin\theta + \dot{r}\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{r}\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta\}\vec{e}_\varphi$.

След направените приведения и групирания се обособяват следните представяния за компонентите на вектора на ускорението в сферични координати:

($10^А$) $\vec{a}_r = \{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\}\vec{e}_r$,

т.е $\boxed{a_r = \ddot{r} - r[\dot{\theta}^2 - \dot{\varphi}^2\sin^2\theta]}$;

($10^Б$) $\vec{a}_\theta = \{r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}\dot{\varphi}\,\sin\theta\cos\theta\}\vec{e}_\theta$,

т.е $\boxed{a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta}$;

($10^В$) $\vec{a}_\varphi = \{2\dot{r}\,\dot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta\}\vec{e}_\varphi$,

т.е $\boxed{a_\varphi = 2\dot{r}\,\dot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta}$.

*Допълнение: лесно може да се покаже (*докаже*), че

$$(11)\qquad \left|\begin{aligned} &\vec{i} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_r + \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_\theta - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi \\ &\vec{j} = \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_r + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_\theta + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi \\ &\vec{k} = -\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta \end{aligned}\right. .$$