Тема 8: Функция на Хамилтон. Уравнения на Хамилтон

Теоретичен минимум: при метода на Хамилтон за описанието на една механична система като напълно равноправни независими променливи участват както s-те на брой **обобщени координати** $q_i(t)$, така и s-те на брой **обобщени импулси**

(Ф.1) $$p_i(t) = \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{за} \quad i = 1,2,\ldots,s .$$

Прието е **обобщените координати** q_i и **обобщените импулси** p_i да се наричат **канонични променливи**. С тяхното въвеждане се дефинира **функцията на Хамилтон**

(Ф.2) $$H(p,q,t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - L(q,\dot{q},t) .$$

Функцията на Хамилтон може да се изрази още и чрез **пълната механична енергия** на системата

(Ф.3) $H(p,q,t) = T + U \equiv E$.

Тъй като функцията на Лагранж $L = L(q,\dot{q})$, то нейният пълен диференциал по тези променливи може да бъде представен във вида

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i .$$

Ако в горното уравнение вземем под внимание, че по дефиниция за обобщени импулси $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, съгласно уравненията на Лагранж $\dfrac{\partial L}{\partial q_i} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \dot{p}_i$, то за пълния диференциал на лагранжиана получаваме

(Ф.4) $dL = \sum_i \dot{p}_i\, dq_i + \sum_i p_i\, d\dot{q}_i$.

Ако отчетем връзката (Ф.2) между функциите на Лагранж и Хамилтон, то за пълния диференциал на последната ще е в сила

$$dH = d\left(\sum_{i=1}^{s} p_i\, \dot{q}_i\right) - dL = \sum_i dp_i\, \dot{q}_i + \sum_i p_i\, d\dot{q}_i - \sum_i \dot{p}_i\, dq_i - \sum_i p_i\, d\dot{q}_i, \text{ т.е.}$$

(Ф.5) $dH = -\sum_i \dot{p}_i\, dq_i + \sum_i \dot{q}_i\, dp_i$.

Ако вземем под внимание, че пълният диференциал на функцията на Хамилтон може да се представи още във вида

(Ф.6) $dH = \sum_i \dfrac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \dfrac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$,

то от сравняването на (Ф.5) и (Ф.6) получаваме **уравненията на Хамилтон** (*канонични уравнения*):

(Ф.7) $\dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}$, за $i = 1,2,\ldots.,s$, и

(Ф.8) $\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$, за $i = 1,2,\ldots.,s$.

Функция на Хамилтон за частица с маса m, движеща се в поле $U = U(\vec{r})$:

а.) в **декартови координати**

(Ф.0) $H = \dfrac{1}{2m}(p_x^{\,2} + p_y^{\,2} + p_z^{\,2}) + U(x,y,z)$.

б.) в **цилиндрични координати**

(Ф.10) $H = \dfrac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + U(r,\varphi,z)$.

в.) в **сферични координати**

(Ф.11) $H = \dfrac{1}{2m}(p_r^{\,2} + \dfrac{p_\theta^{\,2}}{r^2} + \dfrac{p_\varphi^{\,2}}{r^2 \sin^2\theta}.) + U(r,\theta,\varphi)$.

✸ **Задача 8.1 (**Стр. 45/зад. 249[А, Б, В])

Да се определи хамилтоновата функция на материална точка с маса m, движеща се в потенциално поле $U(\vec{r})$, ако обобщените координати на същата са:

а) декартовите й координати x, y, z;

б) цилиндричните й координати r, φ, z, и

в) сферичните й координати r, θ, φ.

Решение:

а) най-напред определяме кинетичната и потенциалната енергии

(1) $$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2); \qquad U = U(x, y, z).$$

Тогава функцията на Лагранж ще бъде

(2) $$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z).$$

По дефиниция обобщените импулси се изразяват посредством функцията на Лагранж

(3) $$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, .., s$$

В случая те са съответно

(4) $$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}; \qquad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}; \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

Функцията на Хамилтон е

(5) $$H = T + U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z).$$

Ако производните на обобщените координати изразим от (4) посредством обобщените импулси, след което ги заместим в (5), ще получим

(6) $$H = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{p_x}{m}\right)^2 + \left(\frac{p_y}{m}\right)^2 + \left(\frac{p_z}{m}\right)^2\right] + U(x, y, z) = \frac{1}{2m}(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2) + U(x, y, z).$$

Уравненията на Хамилтон (*канонични уравнения*) са

(7) $$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \text{за } i = 1, 2, \ldots, s, \text{ и}$$

(8) $$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \text{за } i = 1, 2, \ldots, s.$$

В конкретния случай $s = 3$ и каноничните уравнения са 3+3 ОДУ от първи ред:

(9.1) $$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x;$$

(9.2) $$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y} = F_y;$$

(9.3) $$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial U}{\partial z} = F_z; \text{ и}$$

(9.4) $$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m};$$

(9.5) $\dot{y} = \dfrac{\partial H}{\partial p_y} = \dfrac{p_y}{m}$;

(9.6) $\dot{z} = \dfrac{\partial H}{\partial p_z} = \dfrac{p_z}{m}$.

б) Връзката между декартови (x, y, z) и цилиндрични (r, φ, z) координати се дава със съотношенията

(10) $$\left| \begin{array}{l} x = r.\cos\varphi \\ y = r.\sin\varphi, \\ z = z \end{array} \right.$$ или още

(11) $\vec{r} = r.\cos\varphi\,\vec{i} + r.\sin\varphi\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.

От (10) непосредствено определяме

(12) $$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = \dot{r}.\cos\varphi - r.\sin\varphi.\dot{\varphi} \\ \dot{y} = \dot{r}.\sin\varphi + r.\cos\varphi.\dot{\varphi} \\ \dot{z} = \dot{z} \end{array} \right.$$

Следователно кинетичната енергия ще бъде

(13) $$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}\{(\dot{r}.\cos\varphi - r.\sin\varphi.\dot{\varphi})^2 + (\dot{r}.\sin\varphi + r.\cos\varphi.\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2\} =$$

$$= \frac{m}{2}\{\dot{r}^2.\cos^2\varphi - 2r\dot{r}.\sin\varphi\cos\varphi.\dot{\varphi} + r^2.\sin^2\varphi.\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2.\sin^2\varphi + 2r\dot{r}.\sin\varphi\cos\varphi.\dot{\varphi} + r^2.\cos^2\varphi.\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\} =$$

$$= \frac{m}{2}\{\dot{r}^2 + r^2.\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\}$$

Тогава функцията на Лагранж ще бъде

(14) $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = T - U = \dfrac{m}{2}\{\dot{r}^2 + r^2.\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\} - U(r, \varphi, z)$.

По дефиниция обобщените импулси се изразяват посредством функцията на Лагранж

(15) $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1,..,s$

В случая те са съответно

(16) $p_r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$; $\qquad p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$; $\qquad p_z = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$.

Функцията на Хамилтон е

(17) $H = T + U = \dfrac{m}{2}\{\dot{r}^2 + r^2.\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\} + U(r, \varphi, z)$.

Ако производните на обобщените координати изразим от (16) посредством обобщените импулси, след което ги заместим в (17), ще получим

(18) $$H = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{p_r}{m}\right)^2 + r^2.\left(\frac{p_\varphi}{mr^2}\right)^2 + \dot{z}^2\right] + U(r, \varphi, z) = \frac{1}{2m}\left[p_r^{\;2} + \frac{p_\varphi^{\;2}}{r^2} + \dot{z}^2\right] + mgz.$$

Накрая определяме и каноничните уравнения:

(19.1) $\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{p_\varphi^{\ 2}}{2m}\left(\frac{-2}{r^3}\right) - \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{p_\varphi^{\ 2}}{mr^3} + F_r$

(19.2) $\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}$;

(19.3) $\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial U}{\partial z} = F_z$; и

(19.4) $\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$;

(19.5) $\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$;

(19.6) $\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}$.

в) най-напред определяме кинетичната и потенциалната енергии

Връзката между декартови (x, y, z) и сферични (r, θ, φ) координати се дава със съотношенията

$$(20)\quad \left| \begin{array}{l} x = r.\sin\theta.\cos\varphi \\ y = r.\sin\theta.\sin\varphi \\ z = r.\cos\theta \end{array} \right.$$

В сила е следното представяне за радиус-вектора на точка в сферични координати:

(21) $\vec{r} = r.\vec{e}_r$.

От (20) получаваме непосредствено

$$(21)\quad \left| \begin{array}{l} \dot{x} = \dot{r}.\sin\theta.\cos\varphi + r.\cos\theta.\dot{\theta}\cos\varphi - r.\sin\theta.\sin\varphi\dot{\varphi} \\ \dot{y} = \dot{r}.\sin\theta.\sin\varphi + r.\cos\theta.\dot{\theta}\sin\varphi + r.\sin\theta.\cos\varphi\dot{\varphi} \\ \dot{z} = \dot{r}.\cos\theta - r.\sin\theta.\dot{\theta} \end{array} \right.$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}\{(\dot{r}.\sin\theta.\cos\varphi + r.\cos\theta.\dot{\theta}\cos\varphi - r.\sin\theta.\sin\varphi\dot{\varphi})^2 +$$
$$+ (\dot{r}.\sin\theta.\sin\varphi + r.\cos\theta.\dot{\theta}\sin\varphi + r.\sin\theta.\cos\varphi\dot{\varphi})^2 + (\dot{r}.\cos\theta - r.\sin\theta.\dot{\theta})^2\} =$$

$$= \frac{m}{2}\{\dot{r}^2.\sin^2\theta.\cos^2\varphi + r^2.\cos^2\theta.\dot{\theta}^2\cos^2\varphi + r^2.\sin^2\theta.\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2 + 2r\dot{r}.\sin\theta.\cos^2\varphi\cos\theta.\dot{\theta} -$$
$$- 2r\dot{r}.\sin^2\theta.\cos\varphi.\sin\varphi\dot{\varphi} - 2r^2.\cos\theta.\dot{\theta}\cos\varphi.\sin\theta.\sin\varphi\dot{\varphi} + \dot{r}^2.\sin^2\theta.\sin^2\varphi +$$
$$+ r^2.\cos^2\theta.\dot{\theta}^2\sin^2\varphi + r^2.\sin^2\theta.\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2 + 2r\dot{r}.\sin\theta.\sin^2\varphi.\cos\theta.\dot{\theta} +$$
$$+ 2r\dot{r}.\sin^2\theta.\sin\varphi.\cos\varphi\dot{\varphi} + 2r^2.\cos\theta.\dot{\theta}\sin\varphi.\sin\theta.\cos\varphi\dot{\varphi} + \dot{r}^2.\cos^2\theta + r^2.\sin^2\theta.\dot{\theta}^2 -$$
$$- 2r\dot{r}.\cos\theta.\sin\theta.\dot{\theta}\} =$$

$$= \frac{m}{2}\{(\dot{r}^2.\sin^2\theta.\cos^2\varphi + \dot{r}^2.\sin^2\theta.\sin^2\varphi) + (r^2.\cos^2\theta.\dot{\theta}^2\cos^2\varphi + r^2.\cos^2\theta.\dot{\theta}^2\sin^2\varphi) +$$

$$+(r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2+r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2)+(2r\dot{r}\sin\theta\cos^2\varphi\cos\theta.\dot{\theta}+2r\dot{r}\sin\theta\sin^2\varphi.\cos\theta.\dot{\theta})+$$
$$+\dot{r}^2.\cos^2\theta+r^2.\sin^2\theta.\dot{\theta}^2-2r\dot{r}.\cos\theta.\sin\theta.\dot{\theta}\}=$$

$$=\frac{m}{2}\{\dot{r}^2.\sin^2\theta+r^2.\cos^2\theta.\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2+$$
$$+2r\dot{r}\sin\theta\cos\theta.\dot{\theta}+\dot{r}^2.\cos^2\theta+r^2.\sin^2\theta.\dot{\theta}^2-2r\dot{r}.\cos\theta.\sin\theta.\dot{\theta}\}=$$
$$=\frac{m}{2}\{\dot{r}^2.\sin^2\theta+r^2.\cos^2\theta.\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2+\dot{r}^2.\cos^2\theta+r^2.\sin^2\theta.\dot{\theta}^2\}=$$
$$=\frac{m}{2}\{\dot{r}^2+r^2.\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\}.$$

И така кинетичната енергия в сферични координати се изразява с

$$(22)\quad T=\frac{m}{2}\{\dot{r}^2+r^2.\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\}$$

$$(23)\quad U=U(r,\theta,\varphi).$$

Тогава функцията на Лагранж ще бъде

$$(24)\quad L(\vec{r},\dot{\vec{r}})=T-U=\frac{m}{2}\{\dot{r}^2+r^2.\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\}-U(r,\theta,\varphi).$$

Обобщените импулси се изразяват посредством функцията на Лагранж

$$(25)\quad p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},\qquad i=1,..,s$$

В случая те са съответно

$$(26)\quad p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r};\qquad p_\theta=\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta};\quad p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}.$$

Функцията на Хамилтон е

$$(27)\quad H=T+U=\frac{m}{2}\{\dot{r}^2+r^2.\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\}+U(r,\theta,\varphi).$$

Ако производните на обобщените координати изразим от (26) посредством обобщените импулси, след което ги заместим в (27), ще получим

$$(28)\quad H=\frac{m}{2}\left[\left(\frac{p_r}{m}\right)^2+r^2.\left(\frac{p_\theta}{mr^2}\right)^2+r^2\sin^2\theta\left(\frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}\right)^2\right]+U(r,\theta,\varphi)=$$
$$=\frac{1}{2m}\left[p_r^{\ 2}+\frac{p_\theta^{\ 2}}{r^2}+\frac{p_\varphi^{\ 2}}{r^2\sin^2\theta}\right]+U(r,\theta,\varphi)$$

Уравненията на Хамилтон (*канонични уравнения*) са

$$(29)\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\qquad \text{за } i=1,2,\dots,s\text{, и}$$

$$(30)\quad \dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad \text{за } i=1,2,\dots,s.$$

В конкретния случай $s=3$ и каноничните уравнения са 3+3 ОДУ от първи ред:

$$(31.1)\qquad \dot{p}_r=-\frac{\partial H}{\partial r}=-\frac{1}{2m}\left(\frac{-2}{r^3}\right)\left(p_\theta^{\ 2}+\frac{p_\varphi^{\ 2}}{\sin^2\theta}\right)-\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{1}{mr^3}\left(p_\theta^{\ 2}+\frac{p_\varphi^{\ 2}}{\sin^2\theta}\right)-\frac{\partial U}{\partial r};$$

(31.2) $$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{p_\varphi^{\ 2}}{2mr^2}\left[\frac{-2}{\sin^3\theta}\cos\theta\right] - \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{p_\varphi^{\ 2}\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta} - \frac{\partial U}{\partial \theta};$$

(31.3) $$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{\partial U}{\partial z};$$ и

(31.4) $$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m};$$

(31.5) $$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2};$$

(31.6) $$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}.$$

✸ **Задача 8.2 (**Стр. 45/зад. 250**)**

(*Намиране на функция на Хамилтон по зададена функция на Лагранж*) Да се намери функцията на Хамилтон на анхармоничен осцилатор, функцията на Лагранж за който е

(1) $$L(x,\dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2} - \alpha x^3 + \beta . x . \dot{x}^2 .$$

Решение: Обобщеният импулс (*по дефиниция*) е

(2) $$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (1 + 2\beta . x)\,\dot{x},$$

откъдето можем да изразим $\dot{x}$ посредством обобщения импулс и да заместим в (1). Подобна операция е оправдана от гледна точка на това, че функцията на Хамилтон, която е функция на обобщената координата x и обобщения импулс p, може да се изрази посредством лагранжиана (1), когото следователно трябва да „изчистим" от присъствието на $\dot{x}$.

От (2) изразяваме $\dot{x}$:

(3) $$\dot{x} = \frac{p}{(1+2\beta . x)} .$$

Така лагранжианът (1) добива вида

(4) $$L = \frac{(1+2\beta . x)\dot{x}^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2} - \alpha x^3 = \frac{p^2}{2(1+2\beta . x)} - \frac{\omega^2 x^2}{2} - \alpha x^3 .$$

По определение функцията на Хамилтон е свързана с функцията на Лагранж посредством съотношението (Ф.2)

$$H(p,q,t) = \sum_{i=1}^{s} p_i\,\dot{q}_i - L(q,\dot{q},t),$$

или в конкретния случай ($i = 1$)

(5) $$H(p,x) = p . \dot{x} - L(x,\dot{x}) .$$

След заместване на (3) и (4) в (5) и елементарни преобразувания получаваме

$$H(p,x) = p . \dot{x} - L(x,\dot{x}) = p . \frac{p}{(1+2\beta . x)} - \frac{p^2}{2(1+2\beta . x)} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \alpha x^3 =$$

$$= \frac{p^2}{(1+2\beta . x)} - \frac{p^2}{2(1+2\beta . x)} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \alpha x^3 = \frac{p^2}{2(1+2\beta . x)} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \alpha x^3 .$$

И така търсеният хамилтониан е

$$(6)\qquad H(p,x)=\frac{p^2}{2(1+2\beta.x)}+\frac{\omega^2x^2}{2}+\alpha x^3 .$$

✸ **Задача 8.3 (**Стр. 45/Зад. 251**)**

(*Намиране на функция на Лагранж по зададена функция на Хамилтон*)

Да се намери функцията на Лагранж на материална точка с маса m, чиято хамилтонова функция е

$$(1)\qquad H(r,p)=\frac{p^2}{2m}-(p.A),$$

където $\vec{p}$ - импулс, а $\vec{A}$ - константен вектор.

Решение: Съгласно едното от каноничните уравнения на Хамилтон

$$(2)\qquad \dot{q}\equiv\dot{r}=\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{m}-A\text{, откъдето }(3)\qquad p=m(\dot{r}+A).$$

Следователно

$$(3)\qquad H(r,p)=\frac{p^2}{2m}-p.A=\frac{m^2(\dot{r}+A)^2}{2m}-m(\dot{r}+A).A=\frac{m(\dot{r}+A)^2}{2}-m(\dot{r}+A).A .$$

По дефиниция

$$(3)\qquad H(p,q,t)=\sum_{i=1}^{s}p_i\,\dot{q}_i-L(q,\dot{q},t)\text{, т.е.}\quad(4)\qquad H(p,r)=p.\dot{r}-L(r,\dot{r}),$$

откъдето

$$(5)\qquad L(r,\dot{r})=p.\dot{r}-H(p,r)=m(\dot{r}+A).\dot{r}-\frac{m(\dot{r}+A)^2}{2}+m(\dot{r}+A).A=$$

$$=m(\dot{r}+A).\dot{r}+m(\dot{r}+A).A-\frac{m(\dot{r}+A)^2}{2}=m(\dot{r}+A)(\dot{r}+A)-\frac{m(\dot{r}+A)^2}{2}=$$

$$=m(\dot{r}+A)^2-\frac{m(\dot{r}+A)^2}{2}=\frac{m(\dot{r}+A)^2}{2}.$$

И така

$$(6)\qquad L(r,\dot{r})=\frac{m(\dot{r}+A)^2}{2}.$$

✸ **Задача 8.4 (**Стр. 45/зад. 254**)**

Да се намерят каноничните уравнения на Хамилтон за сферично математическо махало с маса m, ако обобщените координати на махалото са сферичните му координати θ и φ.

Решение: при радиус R на сферичната повърхност, по която се движи махалото, неговите декартови координати са свързани с обобщените (сферични) координати със съотношенията

$$(1)\qquad \left|\begin{aligned}x&=R.\sin\theta\cos\varphi\\ y&=R.\sin\theta\sin\varphi\\ z&=R.\cos\theta\end{aligned}\right.\qquad\text{при }R=const.$$

Следователно кинетичната енергия на махалото е

(2) $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$.

Като се има предвид следният резултат от решената вече зад. 249[B]

(3) $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = R^2\dot{\theta}^2 + R^2 \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2$,

то (2) може да се представи във вида

(4) $T = \frac{m}{2}R^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)$.

Потенциалната енергия на махалото е

(5) $U = mgz = mgR\cos\theta$.

Хамилтонианът (независещ явно от времето) на сферичното махало е

(6) $H(\theta,\varphi,\dot{\theta},\dot{\varphi}) = T(p_\varphi) + U(\varphi) = \frac{m}{2}R^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2) + mgR\cos\theta$.

Обобщените импулси се определят както следва

(7) $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$, т.е.

(8) $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta}$, откъдето следва (8[A]) $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}$;

(9) $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$, откъдето следва (9[A]) $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2\sin^2\theta}$.

С въвеждането на обобщените импулси могат да бъдат записани каноничните уравнения (уравнения на Хамилтон):

(10) $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, ($i = 1,2$), като по условие $q_1 = \theta$, $q_2 = \varphi$;

(11) $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, ($i = 1,2$).

Нека запишем тези 2+2 ОДУ в явен вид. Преди това е необходимо да представим хамилтониана (6) в каноничен вид, в който той да бъде представен само и единствено чрез канонични променливи (обобщени координати и обобщени импулси). За целта заместваме (8[A]) и (9[A]) в (6)

$$H(\theta,\varphi,p_\theta,p\varphi) = \frac{m}{2}R^2(\left(\frac{p_\theta}{mR^2}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{p_\varphi}{mR^2\sin^2\theta}\right)^2) + mgl\cos\theta, \quad \text{т.е.}$$

(12) $H(\theta,\varphi,p_\theta,p\varphi) = \frac{1}{2mR^2}({p_\theta}^2 + \frac{{p_\varphi}^2}{\sin^2\theta}) + mgR\cos\theta$.

Сега вече каноничните уравнения (10) и (11) могат да бъдат получени в явен вид. От (10) при $i = 1$ ще имаме

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{1}{2mR^2}({p_\varphi}^2\frac{(-2)\cos\theta}{\sin^3\theta}) - mgR(-\sin\theta) =$$

$$= \frac{{p_\varphi}^2}{2mR^2}\frac{2\cos\theta}{\sin^3\theta}\frac{\sin\theta}{\sin\theta} + mgR\sin\theta = \frac{{p_\varphi}^2}{2mR^2}\frac{\sin 2\theta}{\sin^4\theta} + mgR\sin\theta, \quad \text{т.е.}$$

(13[A]) $\dot{p}_\theta = \frac{{p_\varphi}^2}{2mR^2}\frac{\sin 2\theta}{\sin^4\theta} + mgR\sin\theta$.

От (10) при $i = 2$ ще имаме

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \text{, т.е.}$$

(13^Б) $\dot{p}_\varphi = 0$.

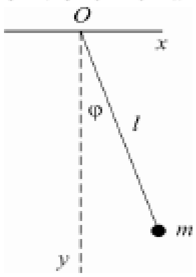
Другите две канонични уравнения следват от (11):

(14^А) $$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{\partial}{\partial p_\theta}\left(\frac{1}{2mR^2}(p_\theta{}^2 + \frac{p_\varphi{}^2}{\sin^2\theta}) + mgR\cos\theta\right) = \frac{p_\theta}{mR^2};$$

(14^Б) $$\phi = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{\partial}{\partial p_\varphi}\left(\frac{1}{2mR^2}(p_\theta{}^2 + \frac{p_\varphi{}^2}{\sin^2\theta}) + mgR\cos\theta\right) = \frac{p_\varphi}{mR^2\sin^2\theta}.$$

✸ **Задача 8.5 (**Стр. 45/зад. 255**)**

Като се напишат каноничните уравнения на Хамилтон за равнинно математическо махало с дължина ℓ при обобщена координата ъгълът φ на отклонение на махалото от вертикалата, да се получи от тях уравнението



$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

Решение: В качеството на обобщена координата избираме ъгъл φ. Връзката между декартови и обобщена координати се дава с:

(1) $x = l.\sin\varphi$

(2) $y = l.\cos\varphi$

Кинетичната енергия на махалото е

(3) $$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2,$$

а потенциалната му енергия е

(4) $U = -mgy = -mgl\cos\varphi$.

Функцията на Лагранж за махалото е

(5) $$L(\varphi,\dot{\varphi}) = T(\dot{\varphi}) - U(\varphi) = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi.$$

Тогава обобщеният му импулс е

(6) $$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\phi,$$

функцията на Хамилтон е

(7) $$H(\varphi, p_\varphi) = T + U = \frac{m}{2}l^2\left(\frac{p_\varphi}{ml^2}\right)^2 - mgl\cos\varphi = \frac{p^2{}_\varphi}{2ml^2} - mgl\cos\varphi,$$

а уравненията на Хамилтон са

(8) $$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$ и (9) $$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1\dots s$$

или (при $i \equiv \varphi$)

(10) $$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -[-mgl(-\sin\varphi)] = -mgl\sin\varphi \text{, и}$$

(11) $\quad \dot{\phi} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{ml^2}$.

Търсеното в задачата диференциално уравнение $\ddot{\varphi} + \dfrac{g}{l}\sin\varphi = 0$ може да бъде получено от първото от двете уравнения на Хамилтон, т.е. от (10). Действително от (10), с отчитането на (6), следва

(12) $\quad \dfrac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}) = -mgl\sin\varphi$,

откъдето след диференциране и разделяне на двете страни на равенството с (ml^2) получаваме точно уравнението

(13) $\quad \ddot{\phi} + \dfrac{g}{l}\sin\varphi = 0$.

✸ **Задача 8.6 (**Стр. 45/зад. 256**)**

Да се интегрира системата от канонични уравнения за механична система с хамилтонова функция

(1) $\quad H = \alpha\sqrt{1+\beta^2 p^2} + \gamma.q, \quad \gamma \neq 0$.

Решение: първото от двете канонични уравнения е

(2) $\quad \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = -\gamma$, т.е.

(3) $\quad dp = -\gamma.dt$,

което се интегрира елементарно

(4) $\quad p = -\gamma.t + C_2$,

където C_2 - интеграционна константа. Второто канонично уравнение е

(5) $\quad \dot{q} = -\dfrac{\partial H}{\partial p} = \alpha.\dfrac{1}{2}\dfrac{\beta^2 2p}{\sqrt{1+\beta^2 p^2}} = \dfrac{\alpha\beta^2 p}{\sqrt{1+\beta^2 p^2}} = \dfrac{\alpha\beta^2(C_2-\gamma.t)}{\sqrt{1+\beta^2(C_2-\gamma.t)^2}}$,

или още

(6) $\quad dq = \dfrac{\alpha\beta^2(C_2-\gamma.t)\,dt}{\sqrt{1+\beta^2(C_2-\gamma.t)^2}}$.

Ако вземем под внимание факта, че

(7) $\quad d(C_2-\gamma.t)^2 = 2(C_2-\gamma.t)(-\gamma)\,dt = -2\gamma(C_2-\gamma.t)\,dt$,

то очевидно

(8) $\quad (C_2-\gamma.t)\,dt = -\dfrac{1}{2\gamma}d(C_2-\gamma.t)^2$.

Заместваме (8) в числителя на (6) и получаваме

$$dq = -\frac{1}{2\gamma}\frac{\alpha\beta^2\, d(C_2-\gamma.t)^2}{\sqrt{1+\beta^2(C_2-\gamma.t)^2}} = -\frac{\alpha}{2\gamma}\frac{d\left[\beta^2(C_2-\gamma.t)^2\right]}{\sqrt{1+\beta^2(C_2-\gamma.t)^2}} =$$

$$= -\frac{\alpha}{2\gamma}[1+\beta^2(C_2-\gamma.t)^2]^{-\frac{1}{2}}d\left[1+\beta^2(C_2-\gamma.t)^2\right]$$, т.е.

(9) $\quad dq = -\dfrac{\alpha}{2\gamma}[1+\beta^2(C_2-\gamma.t)^2]^{-\frac{1}{2}}d\left[1+\beta^2(C_2-\gamma.t)^2\right]$.

Интегрираме (9)

$$q = -\frac{\alpha}{2\gamma}\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}[1+\beta^2(C_2-\gamma.t)^2]^{+\frac{1}{2}} + C_1 = C_1 - \frac{\alpha}{\gamma}\sqrt{1+\beta^2(C_2-\gamma.t)^2}\ .$$

И така, решенията на каноничните уравнения са:

$$(10)\quad q(t) = C_1 - \frac{\alpha}{\gamma}\sqrt{1+\beta^2(C_2-\gamma.t)^2}\ ; \qquad (11)\quad p(t) = C_2 - \gamma.t\ .$$