Тема 6: Едномерни колебания. Малки колебания при финитно движение

Теоретичен минимум: Едномерно движение е **движението на система с една степен на свобода**. За такава система, при предположение, че единствената обобщена координата е напр. декартовата координата x, уравнението на Лагранж има вида

(Ф.1) $$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x).$$

От закона за запазване на енергията при едномерно движение следва:

(Ф.2) $$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = const, \qquad \text{т.е.} \qquad \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]},$$

откъдето след интегриране се получава уравнението на движение

(Ф.3) $$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + t_0.$$

Периодът T на периодично едномерно колебание в област на финитно движение може да се определи, съгласно формула (Ф.3), като удвоеното време за движение от едната точка на обръщане (x_1) до другата точка на обръщане (x_2), т.е.

(Ф.4) $$T = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}},$$

където точките на обръщане x_1 и x_2 се определят като корени на уравнението $U(x) = E$.

Уравнение на движението на едномерен хармоничен осцилатор

(Ф.5) $$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

✸ Задача 6.1

С помощта на уравнение на движението на едномерен хармоничен осцилатор да се получат представяния за потенциалната енергия и еластичната сила, заставяща тяло да извършва едномерни колебания.

Решение: За целта извършваме следните преобразования над уравнението на движението на едномерен хармоничен осцилатор

(1) $\ddot{x}+\omega_0^2 x=0$

$\dot{v}+\omega_0^2 x=0 \qquad \Big| \quad .v.m\neq 0$

$m v\dot{v}+m v\omega_0^2 x=0$;

$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2\right)=0$, т.е.

(2) $\frac{d}{dt}\left(T+\frac{kx^2}{2}\right)=\frac{d}{dt}(T+U)=0$,

където сме положили

(3) $k=m\omega_0^2$.

Така получаваме съотношението (*интеграл на движението*)

(4) $T+\frac{kx^2}{2}\equiv T+U=E=const$

Потенциалната енергия е

(5) $U=E-T=\frac{kx^2}{2}$.

Накрая по определението за сила

(6) $F=-\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kx^2}{2}\right)=-k\,x$ - еластична сила.

✸ Задача 6.2 (Стр. 12/Зад. 61**)**

Да се намери закона за движение на материална точка в едномерното потенциално поле $U(x)=-\alpha\,x^4$, ако началната й абсциса е $x(0)=x_0$, а пълната й механична енергия е $E=0$.

Решение: съгласно ЗЗЕ

(1) $\frac{m\dot{x}^2}{2}+U=E$, т.е. (2) $\dot{x}^2=\frac{2}{m}[E-U(x)]$.

Но по условие $E=0$ и $U(x)=-\alpha\,x^4$, следователно

(2) $\dot{x}^2=\frac{2}{m}\alpha\,x^4$, т.е.

(3) $\dot{x}=\pm\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}\,x^2$ (*уравнение с разделящи се променливи*)

$x^{-2}dx=\pm\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}dt$.

След неговото интегриране получаваме

$\frac{1}{-2+1}x^{-1}=\pm\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}t+C$, или още

(4) $\quad -\dfrac{1}{x} = \pm\sqrt{\dfrac{2\alpha}{m}}t + C$.

Съгласно началните условия при $t = 0 \quad x(0) = x_0$, следователно

(5) $\quad C = -\dfrac{1}{x_0}$,

т.е. общото решение е

(6) $\quad \dfrac{1}{x} = \pm\sqrt{\dfrac{2\alpha}{m}}t + \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{\pm\sqrt{\dfrac{2\alpha}{m}}x_0 t + 1}{x_0}$, или още

(7) $\quad x(t) = \dfrac{x_0}{1 \pm \sqrt{\dfrac{2\alpha}{m}}x_0 t}$.

<u>Анализ на полученото решение</u>:

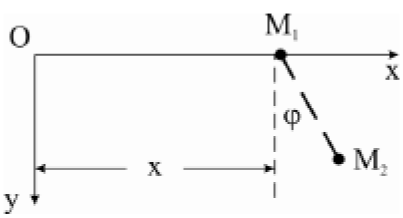
а) при $\dot{x}(0) > 0$ частицата се отдалечава до безкрайност. Действително както следва от (3) в този случай остава знака „-„. Ако възприемем този знак и в (7), то за времето t_∞ до пълно отдалечаване ще имаме $x(t_\infty) = \infty$, следователно $1 - \sqrt{\dfrac{2\alpha}{m}}x_0 t_\infty = 0$, откъдето $t_\infty = \dfrac{1}{x_0}\sqrt{\dfrac{m}{2\alpha}}$.

б) при $\dot{x}(0) < 0$ в (3) остава знака „+„ и от (7) ще имаме $\quad x(t) = \dfrac{x_0}{1 + \sqrt{\dfrac{2\alpha}{m}}x_0 t}$,

откъдето следва, че при $t \to \infty$ очевидно $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, т.е. тялото се връща към началото на КС.

✸ Задача 6.3 (Стр. 35/Зад. 201**)**

(*Естествено продължение на зад. 181 от стр. 31*) Да се определи периода на малките колебания на махалото, описано в зад. 181.



Решение: Върху системата от две тела, съставляващи математическото махало с подвижна точка на окачване, са наложени общо 4 връзки:

- две са наложени върху M_1 (движи се само по хоризонталната права Ox);

- една е наложена върху M_2 (движи се само в равнината Oxy);

- една връзка е наложена поради обстоятелството, че $|M_1M_2| = l = const$.

По този начин броя на степените на свобода s на системата от $N = 2$ тежки материални точки с наложени $k = 4$ на брой връзки е $s = 3.N - k = 3.2 - 4 = 2$. Следователно за описание движението на системата са необходими $s = 2$ независими обобщени координати. Избираме те да бъдат разстоянието $x(t) = OM_1$ и ъгълът $\varphi(t)$, който M_1M_2 сключва с вертикалата.

Изразяваме декартовите координати на двете точки посредством обобщените координати:

(1) $\left| \begin{array}{l} x_1 = x(t) \\ y_1 = 0 \end{array} \right.$ и (2) $\left| \begin{array}{l} x_2 = x(t) + l\sin\varphi \\ y_2 = l\cos\varphi \end{array} \right.$.

Изразяваме последователно кинетичните и потенциалните енергии на двете тела, а след това кинетичната и потенциалната енергии на системата:

(3) $\left| \begin{array}{l} T_1 = \dfrac{m_1}{2}(\dot{x}_1^{\,2} + \dot{y}_1^{\,2}) = \dfrac{m_1}{2}\dot{x}^2(t) \\ U_1 = m_1\, g\, y_1 = 0 \end{array} \right.$;

(4) $\left| \begin{array}{l} T_2 = \dfrac{m_2}{2}(\dot{x}_2^{\,2} + \dot{y}_2^{\,2}) = \dfrac{m_2}{2}\{[\dot{x} + l\cos\varphi.\dot{\varphi}]^2 + [-l\sin\varphi\,\dot{\varphi}]^2\} = \dfrac{m_2}{2}\{\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\} \\ U_2 = m_2\, g\, y_2 = m_2\, g\, l\cos\varphi \end{array} \right.$;

(5) $\left| \begin{array}{l} T = T_2 + T_2 = \dfrac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \dfrac{m_2}{2}l^2\dot{\varphi}^2 \\ U = U_1 + U_2 \equiv U_2 = m_2\, g\, l\cos\varphi \end{array} \right.$.

Функцията на Лагранж за тази система е

(6) $L = T - U = \dfrac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \dfrac{m_2}{2}l^2\dot{\varphi}^2 - m_2\, g\, l\cos\varphi$.

Уравненията на Лагранж са $s = 2$ на брой.

А) уравнение за обобщената координата $\varphi(t)$:

(7) $\dfrac{\partial L}{\partial\varphi} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = 0$.

За намиране на (7) в явен вид определяме производните

☞ $\dfrac{\partial L}{\partial\varphi} = m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}[-\sin\varphi] - m_2\, g\, l[-\sin\varphi] = -m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + m_2\, g\, l\sin\varphi$;

☞ $\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = m_2 l\dot{x}\cos\varphi + \dfrac{m_2}{2}l^2(2\dot{\varphi}) = m_2 l\dot{x}\cos\varphi + m_2 l^2\dot{\varphi}$;

☞ $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = m_2 l\ddot{x}\cos\varphi + m_2 l\dot{x}(-\sin\varphi\,\dot{\varphi}) + m_2 l^2\ddot{\varphi} = m_2 l\ddot{x}\cos\varphi - m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + m_2 l^2\ddot{\varphi}$.

Заместваме така намерените производни в (7)

(8) $-m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + m_2\, g\, l\sin\varphi - m_2 l\ddot{x}\cos\varphi + m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi - m_2 l^2\ddot{\varphi} = 0$

След съкращения и разделяне на ($-ml$) получаваме

(9) $l\ddot{\varphi} + \ddot{x}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0$.

Б) уравнение за обобщената координата $x(t)$:

(10) $\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}} = 0$.

За намиране на (10) в явен вид определяме производните. Понеже $L \neq L(x)$, то

☞ $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 0$, следователно $x(t)$ е циклична координата. За нея уравнението (10) добива вида

(11) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} = 0$, следователно $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = C_1$, където C_1- интеграционна константа. Последното равенство означава, че функцията $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = C_1$ е интеграл на движението. Нека го определим, намирайки производната на лагранжиана (6)

(12) $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m_1 + m_2}{2}(2\dot{x}) + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi = C_1$.

Търсеният интеграл на движението е

(13) $(m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l\cos\varphi\ \dot{\varphi} = C_1$.

Оказва се, че лявата страна на (13) е пълен диференциал, понеже

(14) $(m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l\cos\varphi\ \dot{\varphi} = \frac{d}{dt}[(m_1 + m_2)x + m_2 l\sin\varphi]$.

Замествайки (14) в (13) получаваме

(15) $d[(m_1 + m_2)x + m_2 l\sin\varphi] = C_1.dt$,

откъдето след интегриране се получава

(16) $(m_1 + m_2)x + m_2 l\sin\varphi = C_1.t + C_2$.

И така второто от уравненията на Лагранж допусна точно аналитично решение.

Нека сега разгледаме приближението на малки колебания, т.е. $\varphi \approx 0$, при което $\sin\varphi \approx \varphi$, а $\cos\varphi \approx 1$. При това приближение уравненията на движение (9) и (16) добиват съответно вида

(17) $l\ddot{\varphi} + \ddot{x}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad l\ddot{\varphi} + \ddot{x} + g\varphi = 0$, и

(18) $(m_1 + m_2)x + m_2 l\sin\varphi = C_1.t + C_2 \quad \rightarrow \quad (m_1 + m_2)x + m_2 l\varphi = C_1.t + C_2$.

Нека изразим от (18) $\ddot{x}(t)$ и заместим в (17):

$$x = \frac{(C_1.t + C_2) - m_2 l\varphi}{m_1 + m_2}, \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{C_1 - m_2 l\dot{\varphi}}{m_1 + m_2}, \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{m_2 l\ddot{\varphi}}{m_1 + m_2}.$$

Тогава (17) добива вида

(19) $l\ddot{\varphi} - \frac{m_2 l\ddot{\varphi}}{m_1 + m_2} + g\varphi = 0 \quad \Big| .(m_1 + m_2)$

$$l(m_1 + m_2)\ddot{\varphi} - m_2 l\ddot{\varphi} + g(m_1 + m_2)\varphi = 0$$

$$(lm_1 + lm_2 - lm_2)\ddot{\varphi} + g(m_1 + m_2)\varphi = 0$$

$$lm_1\ddot{\varphi} + g(m_1 + m_2)\varphi = 0$$

(20) $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\frac{m_1 + m_2}{m_1}\varphi = 0$.

Ако положим

(21) $\omega_0{}^2 = \frac{g}{l}\frac{m_1 + m_2}{m_1}$,

то (20) добива вида

(22) $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$,

което е уравнение на хармоничен осцилатор, извършващ колебания с период

(23) $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\frac{m_1}{m_1 + m_2}}$.

Решението на (20) е

(24) $\varphi(t) = C_1 \cos[\omega_0 t + C_2]$,

където C_1 и C_2 са интеграционни константи.

✸ **Задача 6.5 (**Стр. 12/Зад. 63**)**

Да се намери приближено закона на движение на материална точка в едномерно потенциално поле $U = U(x)$ в близост до точката на обръщане с абсциса $x = \alpha$ ($U(\alpha) = E$), ако потенциалната енергия е развиваема в ред на Тейлър около точката $x = \alpha$ и $U^{/}(\alpha) = -F \neq 0$.

Решение: по условие $U(x)$ е развиваема в ред на Тейлър, следователно

(1) $$U(x) = U(x)|_{x=\alpha} + (x-\alpha)U^{/}(x)|_{x=\alpha} + \ldots\ldots\ldots \approx$$

$$\approx \underbrace{U(\alpha)}_{E} + (x-\alpha)\underbrace{U^{/}(\alpha)}_{-F} = E - (x-\alpha)F\,.$$

И така

(2) $$U(x) = E - (x-\alpha)F\,.$$

В затворената система „*частица + силов център*" е в сила ЗЗЕ:

(3) $$\frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x) = E\,, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{m}{2}\dot{x}^2 + E - (x-\alpha)F = E\,,$$ т.е.

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 = (x-\alpha)F \qquad \Big|\cdot\frac{2}{m}$$

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m}(x-\alpha)F\,;$$

(4) $$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2F}{m}}(x-\alpha)^{1/2}\,,$$

$$(x-\alpha)^{-1/2}\, dx = \sqrt{\frac{2F}{m}}dt \qquad \Big| \int$$

$$\frac{1}{-1/2+1}(x-\alpha)^{1/2} = \sqrt{\frac{2F}{m}}t + C\,,$$ т.е.

(5) $$2\sqrt{x-\alpha} = \sqrt{\frac{2F}{m}}t + C\,.$$

Логично е да предположим, че при $t = 0$ точката се е намирала близо (*дори е във*) точката на обръщане, т.е. $x(0) = \alpha$. Тогава лесно се установява, че интеграционната константа $C = 0$, с което законът за движение (5) добива вида

(6) $$2\sqrt{x-\alpha} = \sqrt{\frac{2F}{m}}t\,,$$

откъдето след повдигане в квадрат получаваме

(7) $$4(x-\alpha) = \frac{2F}{m}t^2\,,$$

или още

(8) $$x = \alpha + \frac{F}{2m}t^2\,.$$