Теоретичен минимум: Законите на механиката са валидни в инерциални отправни системи. Отправни системи, движещи се ускорително спрямо инерциална отправна система, се наричат *неинерциални*. За да са валидни законите на динамиката и за неинерциалните отправни системи, освен силите, обусловени от взаимодействията между телата, е необходимо въвеждането на особен вид сили – *инерчни сили*. С отчитане на инерчните сили вторият принцип на механиката става валиден за **произволна отправна система**. При това инерчните сили $\vec{F}_i$ трябва да бъдат такава, че заедно със силите, обусловени от взаимодействията между телата, да създават на тялото ускорение $\vec{a}'$, каквото то реално притежава в неинерциалната отправна система

(1) $\quad m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_i$.

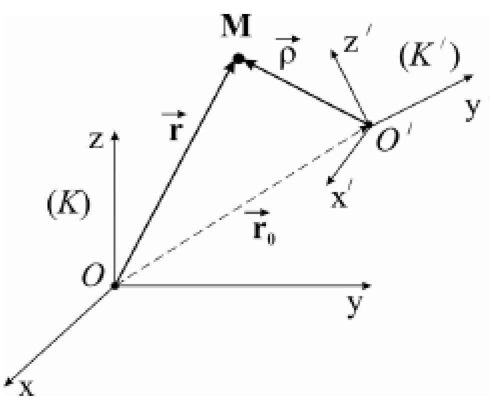
Тъй като $\vec{F} = m\vec{a}$, където $\vec{a}$ е ускорението на тялото в инерциална отправна система, то ускорението $\vec{a}^{/}$ в неинерциална система ще бъде

(2) $\quad m\vec{a}' = m\vec{a} + \vec{F}_i$

Инерчните сили са обусловени от ускорителното движение (*постъпателно или въртеливо*) на неинерциална система и затова могат да бъдат разгледани следните случаи на такива сили:

а) инерчна сила при ускорително постъпателно движение на отправната система;

б) инерчна сила, действаща на тяло, което се намира в покой или се движи спрямо въртяща се неинерциална отправна система.



✸ Задача 2.1

Да се определят законите за трансформация на координатите, скоростите и ускоренията при движение спрямо НИОС. Да се получи най-общ израз (*представяне*) за инерчните сили, действащи върху тяло в НИОС.

Решение: Ако с $\vec{r}$ и $\vec{\rho}$ обозначим радиус-векторите на материална точка М спрямо координатните системи (K) и $(K^{/})$ съответно, то уравнението (*трансформационен закон*), което ги свързва, има вида

(1) $\quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho}$.

За определянето на трансформационния закон за скоростта на т. М е необходимо да се диференцира по времето трансформационния закон (1) за координатите

(2) $$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}.$$

При това следва да се има предвид, че тъй като (K) е ИОС, то нейните единични вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ са константни, следователно

(3) $$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}) = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k} = \vec{V}_a\,,$$

където с $\vec{V}_a$ е означена т.нар. **абсолютна скорост**.

Координатната система $(K^{/})$ обаче е неинерциална, което означава, че тя участва в постъпателно-въртеливо (*в общия случай*) движение относно (K), следователно нейните единични вектори $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ са (*в общия случай*) запазващи големината си, но не и посоката си вектори, поради което те се изменят с времето. Ето защо при определянето на производната на радиус-вектора $\vec{\rho}(\xi_x\,\vec{e}_x + \xi_y\,\vec{e}_y + \xi_z\,\vec{e}_z)$ следва да диференцираме не само координатите ξ_x, ξ_y, ξ_z, но и самите променящи се с времето единични вектори $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, т.е.

(4) $$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d}{dt}(\xi_x\,\vec{e}_x + \xi_y\,\vec{e}_y + \xi_z\,\vec{e}_z) = (\dot{\xi}_x\,\vec{e}_x + \dot{\xi}_y\,\vec{e}_y + \dot{\xi}_z\,\vec{e}_z) + (\xi_x\,\dot{\vec{e}}_x + \xi_y\,\dot{\vec{e}}_y + \xi_z\,\dot{\vec{e}}_z)\,.$$

Величината

(5) $$\vec{V}_r = \dot{\xi}_x\,\vec{e}_x + \dot{\xi}_y\,\vec{e}_y + \dot{\xi}_z\,\vec{e}_z\,,$$

стояща в дясната страна на (4), изразява скоростта на материалната точка спрямо НИКС $(K^{/})$, и се нарича **релативна скорост**.

За намиране участващите в (4) производни по времето на единичните вектори на НИОС $(K^{/})$ използваме факта, че ако осите на тази КС се въртят с ъглова скорост $\vec{\omega}$ в пространството по отношение на тези в КС (K), то производните на единичните й вектори се дават с лесно доказуемите съотношения

(6) $$\dot{\vec{e}}_x = \vec{\omega}\times\vec{e}_x\,, \qquad \dot{\vec{e}}_y = \vec{\omega}\times\vec{e}_y \qquad \text{и} \qquad \dot{\vec{e}}_z = \vec{\omega}\times\vec{e}_z\,,$$

откъдето следва, че

(7) $$\begin{aligned} &\xi_x\,\dot{\vec{e}}_x + \xi_y\,\dot{\vec{e}}_y + \xi_z\,\dot{\vec{e}}_z = \xi_x\,(\vec{\omega}\times\vec{e}_x) + \xi_y\,(\vec{\omega}\times\vec{e}_y) + \xi_z\,(\vec{\omega}\times\vec{e}_z) = \\ &= \vec{\omega}\times(\xi_x\,\vec{e}_x + \xi_y\,\vec{e}_y + \xi_z\,\vec{e}_z) \equiv \vec{\omega}\times\vec{\rho}\,. \end{aligned}$$

С отчитането на (5) и (7) в (4) получаваме

(8) $$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = (\dot{\xi}_x\,\vec{e}_x + \dot{\xi}_y\,\vec{e}_y + \dot{\xi}_z\,\vec{e}_z) + (\xi_x\,\dot{\vec{e}}_x + \xi_y\,\dot{\vec{e}}_y + \xi_z\,\dot{\vec{e}}_z) = \vec{V}_r + \vec{\omega}\times\vec{\rho}\,.$$

След заместването на производните (3) и (8) в (2), за закона за скоростта получаваме

(9) $$\vec{V}_a = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \vec{V}_r + \vec{\omega}\times\vec{\rho} = \vec{V}_r + \left(\frac{d\vec{r}_0}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{\rho}\right) \equiv \vec{V}_r + \vec{V}_e\,, \text{ т.е.}$$

(10) $$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

където с

(11) $$\vec{V}_e = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{\rho}$$

е означена т.нар. **относителна скорост**. Както лесно се съобразява посредством члена $\frac{d\vec{r}_0}{dt}$ се описва скоростта на чисто постъпателното движение на $(K^{/})$ спрямо (K), докато членът $(\vec{\omega}\times\vec{\rho})$ отчита скоростта на чисто въртеливото движение.

За да намерим трансформационния закон за ускоренията, диференцираме законът за скоростите (10)

(12) $$\frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d\vec{V}_r}{dt} + \frac{d\vec{V}_e}{dt}.$$

Величината

(13) $$\vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}}$$

се нарича **абсолютно ускорение**, т.е. ускорение спрямо ИОС (K).

Производната на релативната скорост $\vec{V}_r = \dot{\xi}_x\,\vec{e}_x + \dot{\xi}_y\,\vec{e}_y + \dot{\xi}_z\,\vec{e}_z$ е

(14) $$\begin{aligned}\frac{d\vec{V}_r}{dt} &= \frac{d}{dt}(\dot{\xi}_x\,\vec{e}_x + \dot{\xi}_y\,\vec{e}_y + \dot{\xi}_z\,\vec{e}_z) = (\ddot{\xi}_x\,\vec{e}_x + \ddot{\xi}_y\,\vec{e}_y + \ddot{\xi}_z\,\vec{e}_z) + (\dot{\xi}_x\,\dot{\vec{e}}_x + \dot{\xi}_y\,\dot{\vec{e}}_y + \dot{\xi}_z\,\dot{\vec{e}}_z) = \\ &= \vec{a}_r + \{\dot{\xi}_x\,(\vec{\omega}\times\vec{e}_x) + \dot{\xi}_y\,(\vec{\omega}\times\vec{e}_x) + \dot{\xi}_z\,(\vec{\omega}\times\vec{e}_x)\} = \vec{a}_r + \vec{\omega}\times(\dot{\xi}_x\,\vec{e}_x + \dot{\xi}_y\,\vec{e}_x + \dot{\xi}_z\,\vec{e}_x) = \\ &= \vec{a}_r + \vec{\omega}\times\vec{V}_r\,,\end{aligned}$$

където с

(15) $$\vec{a}_r = \ddot{\xi}_x\,\vec{e}_x + \ddot{\xi}_y\,\vec{e}_y + \ddot{\xi}_z\,\vec{e}_z \equiv \ddot{\vec{\rho}}\,(K^{/})$$

е обозначено **релативното ускорение**, т.е. ускорението спрямо НИОС $(K^{/})$.

Следва да определим и производната

(16) $$\frac{d\vec{V}_e}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}_0}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{\rho}\right) = \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{\rho}) = \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{\rho}}{dt}.$$

Ако в най-последния член в (16) заместим производната $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$ с нейното представяне, получено вече в (8), ще имаме

(17) $$\frac{d\vec{V}_e}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times(\vec{V}_r + \vec{\omega}\times\vec{\rho}) = \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + \vec{\omega}\times\vec{V}_r + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{\rho}.$$

Накрая заместваме намерените дотук производни (13, (14) и (17) в (12), и получаваме

(18) $$\begin{aligned}\vec{a}_a &= \vec{a}_r + \vec{\omega}\times\vec{V}_r + \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + \vec{\omega}\times\vec{V}_r + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{\rho} = \\ &= \vec{a}_r + \left(\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{\rho}\right) + 2\vec{\omega}\times\vec{V}_r = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c\,,\end{aligned}$$

където с

(19) $$\vec{a}_e = \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{\rho}$$

е обозначено **относителното ускорение** на $(K^{/})$ спрямо (K), а с

(20) $$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\times\vec{V}_r$$

е обозначено т.нар. **кориолисово ускорение**, каквото притежава всяко тяло, движещо се с някаква (*различна от нула*) скорост $\vec{V}_r$ спрямо въртяща се с ъглова скорост $\vec{\omega}$ НИОС.

И така в най-общия случай законът за ускорението добива вида

(21) $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$.

С помощта на (21) може да бъде получено и основното уравнение на динамиката за неинерциални отправни системи. За целта нека представим (21) във вида

(22) $\vec{a}_r = \vec{a}_a - \vec{a}_e - \vec{a}_c$,

след което нека умножим двете страни на полученото равенство с масата m

(23) $m\vec{a}_r = m\vec{a}_a - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$.

Записано в този вид, това равенство изразява силата $m\vec{a}_r$, действаща върху тялото M в НИОС $(K^{/})$ чрез три други сили:

☞ силата $m\vec{a}_a$, представляваща векторната сума $\vec{F}$ от всички „**реални**" сили, действащи върху тялото M;

☞ силата $\vec{F}_c = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\omega}\times\vec{V}_r$, наречена сила на Кориолис;

☞ силата $\vec{F}_e = -m\,\vec{a}_e = -m\dfrac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} - m(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{\rho}) - m(\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{\rho})$, наречена преносна (*относителна*) инерчна сила.

С дефинирането и въвеждането на тези сили основното уравнение на динамиката за НИОС добива вида

(24) $\vec{F}_r = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c \equiv \vec{F} + \sum \vec{F}_{in}$,

където инерчните сили могат да бъдат:

✓ кориолисова сила $\vec{F}_c = -2m\vec{\omega}\times\vec{V}_r$, дължаща се на движението на тела спрямо въртящи се НИОС;

✓ инерчна сила $-m\dfrac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} \equiv -m\ddot{\vec{r}}_0 = -m\vec{a}_0$, дължаща се на „чисто" постъпателно ускорително движение на $(K^{/})$ относно (K) с линейно ускорение $\vec{a}_0$;

✓ инерчна сила $-m(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{\rho})$, дължаща се на „чисто" въртеливо ускорително движение на $(K^{/})$ относно (K) с ъглово ускорение $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$; и

✓ центробежна сила $\vec{F}_{цб} = -m(\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{\rho})$, действаща дори на тела, неподвижни спрямо въртяща се НИОС. С помощта на формула за двойно векторно произведение тази сила може да бъде представена във вида

(25) $\vec{F}_{цб} = -m(\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{\rho}) = -m[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho})] = -m[(\vec{\omega}.\vec{\rho})\vec{\omega} - (\vec{\omega}.\vec{\omega})\vec{\rho}]$.

Понеже $\vec{\omega}\perp\vec{\rho}$, то $\vec{\omega}.\vec{\rho}\equiv 0$, откъдето следва, че

(26) $\vec{F}_{цб} = -m[-(\vec{\omega}.\vec{\omega})\vec{\rho}] = m\omega^2\vec{\rho}$.

Очевидно центробежната инерчна сила, въпреки привидното сходство в аналитичното ѝ представяне с центростремителната сила $\vec{F}_{цс} = -m\omega^2\vec{\rho}$, се различава коренно от нея както по посока, така и по своята физическа природа: докато „реалните" сили са сили на **ВЗАИМОдействие** между **ДВЕ** тела, то инерчните сили са сили, **действащи върху едно единствено тяло** (*т.е. липсва второ тяло, което да му действа*).

Тема 4А: Движение в централно-симетрично поле.

А) Формули на Бине

Теоретичен минимум: При движение в поле с централна симетрия големината на момента на импулса

(Ф.1) $$M = \left|\vec{M}\right| = mr^2.\dot{\varphi}$$

е запазваща се величина. Това може лесно да се аргументира, като се използва, че по определение моментът на импулса е вектор $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$, чиято производна по времето е

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = m\{\dot{\vec{r}} \times \vec{v} + \vec{r} \times \dot{\vec{v}}\} = m\{\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}\} \equiv m\vec{r} \times \vec{a} =$$
$$= \vec{r} \times (m\vec{a}) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_{\vec{F}},$$

където $\vec{M}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}$ е **моментът** на централната сила. Но този момент е тъждествено равен на нула, понеже по определение централната сила лежи върху и е насочена по посока на радиус-вектора $\vec{r}$, т.е. $\vec{F} = F\,\vec{r}_0 = F\dfrac{\vec{r}}{\left|\vec{r}\right|}$, следователно

$$\vec{M}_{\vec{F}} = \vec{r} \times F\frac{\vec{r}}{\left|\vec{r}\right|} = \frac{F}{\left|\vec{r}\right|}(\vec{r} \times \vec{r}) \equiv 0.$$

Щом $\dfrac{d\vec{M}}{dt} = \vec{M}_{\vec{F}}$ и $\vec{M}_{\vec{F}} = 0$, то очевидно $\dfrac{d\vec{M}}{dt} = 0$, т.е. $\vec{M} = const$, к.т.д.

Скоростта на движение на материална точка се изразява посредством съотношението /доказано в Приложение 1 като формула (П.8)/

(Ф.2) $$v^2 = \frac{M^2}{m^2}\left[\left(\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right].$$

Формули на Бине (*доказани в приложение 1*)

(Ф.3) $$M^2\left\{\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2}\right\} = 2m(E - U(r)).$$

(Ф.4) $$F_r = -\frac{M^2}{mr^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right].$$

Тези формули позволяват по зададени момент на импулса *M*, пълна енергия *E*, потенциал $U(r)$ или централна сила $F_r = \vec{F}.\vec{e}_r$, където $\vec{F} = -grad\,U(r)$, да се определи уравнението на траекторията на движение (плоска крива).

Понеже $F_r = m.a_r$, то големината на радиалното ускорение a_r, съгласно (Ф.4), е

(Ф.5) $$a_r = -\frac{M^2}{m^2r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right].$$

При движение в централно поле **площната скорост**

(Ф.6) $$\sigma = \frac{1}{2}r^2.\dot{\varphi}$$

е запазваща се величина, тъй като (*с точност до константа*) тя се изразява чрез съхраняващия се във времето интеграл на движение (Ф.1), т.е. момента на импулса M. Връзката между двете величини се дава с равенството

(Ф.7) $$M = 2m\,\sigma\,.$$

С отчитане на (Ф.7) формулата за скоростта (Ф.2) и за ускорението (Ф.5) добиват вида

(Ф.8) $$v^2 = 4\sigma^2\left[\left(\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right],$$

(Ф.9) $$a_r = -\frac{4\sigma^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right].$$

Б) Интегрални представяния на уравнението на движението и уравнението на траекторията

Теоретичен минимум: В полярни координати радиус-векторът на материална точка е

(Ф.1) $$\vec{r} = r.\vec{e}_r\,,$$

а скоростта й е

(Ф.2) $$\vec{v} = \dot{r}.\vec{e}_r + r.\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}.\vec{e}_r + r.\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\,,$$

Моментът на импулса на материалната точка се дава с

(Ф.3) $$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{p} = (r.\vec{e}_r)\times m(\dot{r}.\vec{e}_r + r.\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi) = r.\dot{r}\,m(\vec{e}_r\times\vec{e}_r) + r^2.\dot{\varphi}m(\vec{e}_r\times\vec{e}_\varphi) =$$
$$= r^2.\dot{\varphi}m(\vec{e}_r\times\vec{e}_\varphi) = mr^2.\dot{\varphi}\,\vec{e}_z\,,$$

а големината на момента на импулса е

(Ф.4) $$M = \left|\vec{M}\right| = mr^2.\dot{\varphi}\,.$$

При движение в централно-симетрично поле е в сила **законът за запазване на енергията**

(Ф.5) $$E = T + U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = const\,,$$

който може да се представи още във вида

(Ф.6) $$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 + U(r)\,,$$

или с отчитането на (Ф.4), т.е. на

(Ф.7) $$\frac{d\varphi}{dt} \equiv \dot{\varphi} = \frac{M}{mr^2}\,,$$

ще имаме

(Ф.8) $$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\left(\frac{M}{mr^2}\right)^2 + U(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)\,.$$

Ако се въведе т.нар. **ефективна потенциална енергия**

(Ф.9) $$U_{еф}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}\,,$$

то изразът (Ф.5) за пълната механична енергия добива вида

(Ф.10) $$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{eff}(r)\,.$$

Величината $\dfrac{M^2}{2mr^2}$, фигурираща в израза (Ф.9) за ефективния потенциал $U_{еф}(r)$, е прието да се нарича **центробежен потенциал**. Тя дава тази част от енергията на частицата, която е свързана с нейното въртене около силовия център.

Очевидно уравнението за пълната енергия (Ф.8) може да се представи във следния удобен за интегриране вид

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}\left[E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}\right],$$

или още

(Ф.11) $$\dot{r} \equiv \frac{dr}{d\,t} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}\right]},\ \text{т.е.}$$

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}\right]}},$$

откъдето

(Ф.12) $$dt = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dr}{\sqrt{E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}}}\ .$$

Интегрирайки, получаваме **уравнението на движение** $\boxed{r = r(t)}$:

(Ф.13) $$\boxed{t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dr}{\sqrt{E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}}} + t_0}.$$

А за да получим **уравнението на траекторията** $\boxed{r = r(\varphi)}$, трябва да елиминираме времето. За целта използваме, че съгласно (Ф.4) $\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{M}{mr^2}$, т.е. $d\varphi = \dfrac{M}{mr^2}dt$. Следователно ако умножим двете страни на (Ф.12) с $\dfrac{M}{mr^2}$, ще получим

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2}dt = \frac{M}{m}\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dr}{r^2.\sqrt{E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}}} = \frac{M}{\sqrt{2m}}\frac{dr}{r^2.\sqrt{E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}}},\ \text{т.е.}$$

(Ф.14) $$d\varphi = \frac{M}{\sqrt{2m}}\frac{dr}{r^2.\sqrt{E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}}},$$

интегрирането на което дава търсеното **уравнение на траекторията**

(Ф.15) $$\boxed{\varphi = \frac{M}{\sqrt{2m}}\int\frac{dr}{r^2.\sqrt{E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}}} + \varphi_0}.$$

—

✸ **Задача 4Б.1**

(*Кеплерова задача*) това е задача за движение на материална точка в **централно поле** с потенциал (**кулонов потенциал**)

(1) $U(r) = -\dfrac{\alpha}{r}$,

където $\alpha > 0$ съответства на сила на привличане (**гравитация**, напр.), а $\alpha < 0$ съответства на сила на отблъскване.

***Допълнение**: силата, „съответстваща" на кулонов потенциал, е

$$\vec{F} = -grad U(r) = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{\alpha}{r}\right) grad\ r = \alpha\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{r}_0,$$

която при $\alpha > 0$ очевидно е централна сила на привличане, защото е насочена по направление $(-\vec{r}_0)$ към силовия център, а големината ѝ е $F_r = \dfrac{\alpha}{r^2}$, т.е. нютонова гравитационна сила.

Решение: Нека намерим уравнението на траекторията при движение в такова поле. За целта използваме (Ф.15)

$$\varphi = \frac{M}{\sqrt{2m}}\int \frac{dr}{r^2.\sqrt{E - U(r) - \dfrac{M^2}{2mr^2}}} + \varphi_0 = \frac{M}{\sqrt{2m}}\int \frac{dr}{r^2.\sqrt{E - \left(-\dfrac{\alpha}{r}\right) - \dfrac{M^2}{2mr^2}}} + \varphi_0 =$$

$$= M\int \frac{1}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{2mE + 2m\alpha\dfrac{1}{r} - M^2\dfrac{1}{r^2}}} + \varphi_0 .$$

Нека положим $u = \dfrac{1}{r}$, следователно $dr = -\dfrac{1}{u^2}du \equiv -u^{-2}\,du$. Така горният интеграл добива вида

$$\varphi = -M\int \frac{du}{\sqrt{2mE + 2m\alpha u - M^2u^2}} + \varphi_0 = -M\int \frac{du}{\sqrt{-M^2u^2 + 2m\alpha u + 2mE}} + \varphi_0$$

Изразът под радикала в знаменателя представлява квадратен тричлен $au^2 + bu + c$, където $a = -M^2$, $b = 2m\alpha$ и $c = 2mE$. Затова нека направим второ полагане: $u = x - \dfrac{b}{2a} = x - \dfrac{2m\alpha}{2.(-M^2)} = x + \dfrac{m\alpha}{M^2}$, като очевидно $du = dx$. Така функцията под радикала ще се представи във вида

$$-M^2u^2 + 2m\alpha u + 2mE = -M^2\left(x + \frac{m\alpha}{M^2}\right)^2 + 2m\alpha\left(x + \frac{m\alpha}{M^2}\right) + 2mE =$$

$$= -M^2x^2 - M^2.2x.\frac{m\alpha}{M^2} - M^2\left(\frac{m\alpha}{M^2}\right)^2 + 2m\alpha x + 2m\alpha.\frac{m\alpha}{M^2} + 2mE =$$

$$= -M^2x^2 - 2m\alpha x - M^2.\frac{m^2\alpha^2}{M^4} + 2m\alpha x + 2\frac{m^2\alpha^2}{M^2} + 2mE =$$

$$= -M^2x^2 - \frac{m^2\alpha^2}{M^2} + 2\frac{m^2\alpha^2}{M^2} + 2mE = -M^2x^2 + \frac{m^2\alpha^2}{M^2} + 2mE =$$

$$= \frac{1}{M^2}[-M^4x^2 + m^2\alpha^2 + 2mM^2E].$$

Подинтегралната функция при това полагане ще добие вида

$$\frac{1}{\sqrt{-M^2u^2 + 2m\alpha u + 2mE}} = \frac{1}{\frac{1}{M}\sqrt{-M^4x^2 + m^2\alpha^2 + 2mM^2E}} =$$

$$\equiv \frac{M}{\sqrt{(m^2\alpha^2 + 2mM^2E) - M^4x^2}}.$$

Ако означим $(m^2\alpha^2 + 2mM^2E) = P^2$, след което изнесем P^2 извън радикала, то подинтегралната функция ще стане

$$\frac{1}{\sqrt{-M^2u^2 + 2m\alpha u + 2mE}} = \ldots. = \frac{M}{|P|\sqrt{1 - \frac{M^4x^2}{P^2}}} = \frac{M}{|P|\sqrt{1 - \left(\frac{M^2x}{P}\right)^2}}.$$

Заместваме я в интеграла и получаваме

$$\varphi = -M\int \frac{du}{\sqrt{2mE + 2m\alpha u - M^2u^2}} + \varphi_0 = -M\int \frac{M\ dx}{|P|\sqrt{1 - \left(\frac{M^2x}{P}\right)^2}} + \varphi_0 =$$

$$= -\int \frac{M^2\ dx}{|P|\sqrt{1 - \left(\frac{M^2x}{P}\right)^2}} + \varphi_0 = -\int \frac{d\left(\frac{M^2x}{P}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{M^2x}{P}\right)^2}} + \varphi_0.$$

И така

$$\varphi - \varphi_0 = -\int \frac{d\left(\frac{M^2x}{P}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{M^2x}{P}\right)^2}}.$$

Ако използваме табличния интеграл $-\int \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \arccos\xi$, получаваме

$$\varphi - \varphi_0 = \arccos\left(\frac{M^2x}{P}\right),$$

откъдето следва

$$\frac{M^2x}{P} = \cos(\varphi - \varphi_0),$$

или още $\frac{M^2x}{P} = \cos\varphi$, ако приемем нулеви начални условия (т.е. $\varphi_0 = 0$).

Връщаме се назад по направените полагания:

$u = x + \dfrac{m\alpha}{M^2}$, $\Rightarrow$ $x = u - \dfrac{m\alpha}{M^2}$, както и $r = \dfrac{1}{u}$, $\Rightarrow$ $u = \dfrac{1}{r}$, и следователно ще имаме $x = \dfrac{1}{r} - \dfrac{m\alpha}{M^2}$. Заместваме в намереното решение, отчитайки още, че $P^2 = (m^2\alpha^2 + 2mM^2E)$, т.е. $P = \sqrt{m^2\alpha^2 + 2mM^2E}$:

$$\frac{M^2}{\sqrt{m^2\alpha^2 + 2mM^2E}}\left(\frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{M^2}\right) = \cos\varphi,$$

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{M^2}\right) = \frac{\sqrt{m^2\alpha^2 + 2mM^2E}}{M^2}\cos\varphi,$$

$$\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{M^2} + \frac{m\alpha\sqrt{1 + \dfrac{2mM^2E}{m^2\alpha^2}}}{M^2}\cos\varphi,$$

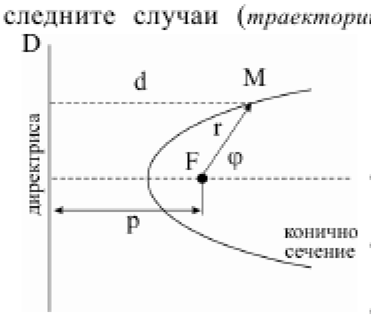
$$\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{M^2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2M^2E}{m\alpha^2}}\cos\varphi\right].$$

Ако положим $\dfrac{1}{p} = \dfrac{m\alpha}{M^2}$, т.е. $p = \dfrac{M^2}{m\alpha}$, и $\varepsilon = \sqrt{1 + \dfrac{2M^2E}{m\alpha^2}}$, то горното уравнение добива вида

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + \varepsilon.\cos\varphi), \quad \text{или още} \quad r(1 + \varepsilon.\cos\varphi) = p = const,$$

което представлява **уравнение на конично сечение**.

В зависимост от стойността на пълната енергия на частицата ще имаме следните случаи (*траектории на движение*), определящи се от **ексцентрицитета** $\varepsilon = \sqrt{1 + \dfrac{2M^2E}{m\alpha^2}}$:



- ☞ при $E > 0$, т.е. $\varepsilon > 1$ ще имаме **инфинитно** движение по **хипербола**;
- ☞ при $E = 0$, т.е. $\varepsilon = 1$ ще имаме **инфинитно** движение по **парабола**;
- ☞ при $E < 0$, т.е. $\varepsilon < 1$ ще имаме **финитно** движение по **елипса**.

На фигурата е представено конично сечение, представляващо ГМТ, за които отношението

$$\frac{r}{d} = \varepsilon = const,$$

където: p - **фокален параметър**, ε - **ексцентрицитет**.