Тема 3: Функция на Лагранж. Уравнения на Лагранж от II род

Теоретичен минимум: В много случаи на движението на една система има наложени ограничения, наречени **връзки**. Такава система се нарича несвободна. Самите ограничения могат да се изразят с **алгебрични уравнения**, свързващи радиус-векторите на точките от системата и времето, в т.нар. уравнения на връзките

$$f_\alpha(\vec{r}, t) = 0, \qquad \alpha = 1, 2, ..., \kappa,$$

където κ е **броят на връзките**.

Уравненията на (*за*) връзките могат да съдържат и скоростите на материалните точки.

Ако уравненията на връзките могат да се сведат до вид, несъдържащ скоростите, такива връзки се наричат **холономни** (*или интегрируеми*).

А ако това е невъзможно, то връзките се наричат **нехолономни** (*или неинтегрируеми*).

Връзките се разделят и на:

- **удържащи** - задават се с равенства, и
- **неудържащи** - задават се с неравенства.

Връзките се делят още на:

- **стационарни** (*или склерономни*) - уравненията на връзките **не съдържат** явна зависимост от времето, и
- **нестационарни** (*или реономни*) - уравненията на връзките **съдържат** явна зависимост от времето.

Система от N частици, на която са наложени κ на брой връзки, има $s = 3N - k$ на брой **степени на свобода**.

Система, на която **не са наложени връзки**, се нарича **свободна**. За нея броят на степените на свобода е $s = 3N$.

🕮 Важни базисни предпоставки и съображения при определяне **степените на свобода** на прости механични системи:

☞ материална точка (*тяло*), движеща се **по права** (*а в по-общ случай – по крива* L *в пространството*), притежава $s=1$ степен на свобода, т.е. наложени са й $k=2$ връзки;

☞ материална точка (*тяло*), движеща се **в равнина** (*а в по-общ случай – по повърхност* S *в пространството*), притежава $s=2$ степен на свобода, т.е. наложена й е $k=1$ връзка (*ограничението е да не напуска равнината*);

☞ материална точка (*тяло*), движеща се **свободно** в тримерното пространство, притежава $s=3$ степен на свобода, т.е. тя е обект, върху движението на който не са наложени никакви ограничения (*респективно връзки*).

За система от N частици, които (*за определеност, напр.*) не са съставна част на твърдо тяло, най-напред се определя броя на наложените връзки. Този анализ може да се проведе, като се използват изложените по-горе съображения, визиращи частиците поотделно, както и някои специфични за конкретната задача съображения, касаещи ограничения, наложени върху произволни комбинации от по 2, 3 и повече частици (*напр. ограничение, породено от изискване разстоянието между две частици да се запазва винаги постоянно, и др.*). Накрая броят на **степените на свобода** на системата от частици се изразява по общата формула $s=3N-k$.

На всяка механична система с s степени на свобода се съпоставя функция на **обобщените координати** $q_i(t)$ и нейните производни (*обобщените скорости*) $\dot{q}_i(t)$, наречена **функция на Лагранж**

(Ф.1) $$L=L(q_1(t),q_2(t),\ldots,q_s(t);\dot{q}_1(t),\dot{q}_2(t),\ldots,\dot{q}_s(t);t), \qquad i=1,2,\ldots,s$$

С помощта на функцията на Лагранж L се дефинира **величината**

(Ф.2) $$S=\int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t),\dot{q}_i(t),t)\,dt$$

наречена **действие**. Интегралът (Ф.2) представлява **функционал**, т.е. математически обект, чрез който на една или няколко функции от някаква съвкупност (*пространство*) се съпоставя определено **число**.

Уравнения на Лагранж:

(Ф.3) $$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=0 \quad \text{за} \quad i=1,2,\ldots,s.$$

Величините

(Ф.4) $$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i=1,2,\ldots,s$$

се наричат **обобщени импулси**. В рамките на лагранжевия формализъм обобщените импулси нямат статута на независими променливи.

Функция на Лагранж за частица в поле $U(r)$:

а) в **декартови координати**: $L\equiv T-U=\dfrac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-U(r)$;

б) в **цилиндрични координати**: $L=\dfrac{m}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2)-U(r)$;

в) в **сферични координати**: $L=\dfrac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta.\dot{\phi}^2)-U(r)$.

Ако частицата е **свободна**, то (*по подразбиране*) $U(x,y,z)=0$.

✸ Задача 3.1

Да се намерят уравненията на Лагранж за материална точка (*частица*), движеща се под действие на потенциал $U(x,y,z)$ (*в декартови координати*).

Решение: трите декартови координати на частицата разглеждаме като нейни **обобщени координати**. При отсъствието на връзки частицата има **3 степени на свобода**. Лагранжианът на частицата е

(1) $$L = T - U = \frac{m}{2}V^2 - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x,y,z).$$

Трите уравнения на Лагранж са съответно:

($2^А$) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \text{ т.е. } \frac{d}{dt}(m\dot{x}) + \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x};$$

($2^Б$) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \text{ т.е. } \frac{d}{dt}(m\dot{y}) + \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y};$$

($2^В$) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \text{ т.е. } \frac{d}{dt}(m\dot{z}) + \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Като се вземе под внимание, че

(3) $$\vec{F} = -gradU, \quad \text{т.е.} \quad F_x = -\frac{\partial U}{\partial x},\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \text{ и } F_z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

лесно се установява, че уравненията на Лагранж ($2^{А,Б,В}$) представляват покомпонентен запис на втория закон на Нютон $m\vec{a} = \vec{F}$.

✸ **Задача 3.3 (**Стр. 27/Зад. 164^{А}**)**

Да се интегрират уравненията на Лагранж при посочените начални условия, ако функцията на Лагранж е

$$L(\dot{q},t)=\frac{\dot{q}^2}{2}+t^2\dot{q}\,; \qquad q(0)=0\,; \quad \dot{q}(0)=1\,.$$

Решение: системата се описва с функция на Лагранж

(1) $\quad L(\dot{q},t)=\dfrac{\dot{q}^2}{2}+t^2\dot{q}\,.$

За изразяването на уравнението на Лагранж

(2) $\quad \dfrac{\partial L}{\partial q}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}=0$

в явен вид определяме последователно

($3^{А}$) $\quad \dfrac{\partial L}{\partial q}=0\,,$ $\qquad$ (*понеже* L *не зависи явно от обобщената координата* q).

($3^{Б}$) $\quad \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}=\dot{q}+t^2\,,$ $\qquad \Rightarrow \qquad$ ($3^{В}$) $\quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}=\ddot{q}+2t\,.$

След заместване на ($3^{А}$) и ($3^{В}$) в (2) получаваме

(4) $\quad \ddot{q}+2t=0\,.$

Решаваме това уравнение на Лагранж при следните начални условия

($5^{А}$) $\quad q(0)=0$ $\qquad$ и $\qquad$ ($5^{Б}$) $\quad \dot{q}(0)=1\,.$

За интегрирането на ОДУ (4) най-напред го представяме във вида

($6^{А}$) $\quad \dfrac{d}{dt}(\dot{q})=-2t\,,$ $\qquad$ или още $\qquad$ ($6^{Б}$) $\quad d(\dot{q})=-2t\,dt\,,$

решаването на което дава

(7) $\quad \dot{q}=-2\dfrac{t^2}{2}+C_1=-t^2+C_1\,.$

С прилагането на началното условие ($5^{Б}$) определяме интеграционната константа $C_1=1$. Така (7) добива вида

(8) $\quad \dot{q}=-t^2+1\,.$

Това ОДУ с разделени променливи се интегрира елементарно

(9) $\quad dq=(-t^2+1)dt \quad \Rightarrow \quad q(t)=-\dfrac{t^3}{3}+t+C_2\,.$

Тази втора интеграционна константа определяме от началното условие ($5^{А}$), съгласно което $C_2=0$.

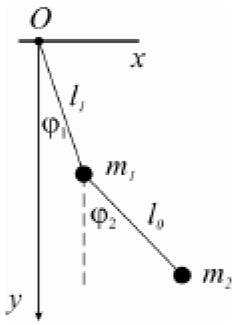
Така решението на уравнението на Лагранж, удовлетворяващо началните условия ($5^{А,Б}$) се представя във вида

(10) $\quad q(t)=t-\dfrac{t^3}{3}\,.$

✸ Задача 3.3

Да се определи функцията на Лагранж за системата, представляваща двойно математическо махало.

Решение: търси се функцията на Лагранж за системата, показана на фигурата.



Приемаме, че тази система се намира в гравитационно поле ($\vec{g}$). По дефиниция функцията на Лагранж за една материална точка се изразява чрез нейните кинетична (T) и потенциална (U) енергии посредством равенството

(1) $\quad L = T - U$.

Тази формула остава в сила и за система от материални точки, ако под T се разбира пълната кинетична енергия на системата, а под U - нейната пълна потенциална енергия. След тази уговорка можем да пристъпим към определянето на тези енергии за всяка от частиците, от които е съставено сложното махало.

а) за първата частица, имаща маса m_1, линейната скорост на движение V_1 се изразява посредством ъгловата й скорост $\omega_1 = \dot{\varphi}_1$ на въртене около т. О посредством равенството $V_1 = \omega_1 l_1 = \dot{\varphi}_1 l_1$, следователно кинетичната й енергия ще бъде равна на

(2) $$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 .$$

Потенциалната енергия на същата тази точка е

(3) $$U_1 = -m_1 g y_1 = -m_1 g l_1 \cos\varphi_1 .$$

б) декартовите координати на втората точка, имаща маса m_2, са:

(4) $$\left| \begin{aligned} x_2 &= l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 \\ y_2 &= l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 \end{aligned} \right. .$$

Тогава кинетичната й енергия е

$$T_2 = \frac{m_2}{2} V_2^2 = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2{}^2 + \dot{y}_2{}^2) = \frac{m_2}{2} [(l_1 \cos\varphi_1 \dot{\varphi}_1 + l_2 \cos\varphi_2 \dot{\varphi}_2)^2 + (-l_1 \sin\varphi_1 \dot{\varphi}_1 - l_2 \sin\varphi_2 \dot{\varphi}_2)^2] =$$

$$= \frac{m_2}{2} [l_1{}^2 \dot{\varphi}_1{}^2 + 2 l_1 l_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + l_2{}^2 \dot{\varphi}_2{}^2], \qquad \text{т.е.}$$

(5) $$T_2 = \frac{m_2}{2} [l_1{}^2 \dot{\varphi}_1{}^2 + l_2{}^2 \dot{\varphi}_2{}^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2] .$$

Потенциалната енергия на втората точка е

(6) $$U_2 = -m_2 g y_2 = -m_2 g (l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2) .$$

Чрез (2) и (5) определяме пълната кинетична енергия $T = T_1 + T_2$, а чрез (3) и (6) – пълната потенциална енергия $U = U_1 + U_2$ на системата от двете частици (*сложно махало*), което позволява да се определи лагранжианът (1) на тази система

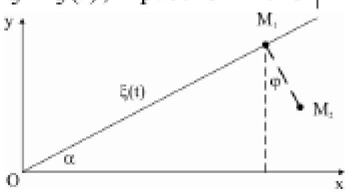
(7) $$L = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} [l_1{}^2 \dot{\varphi}_1{}^2 + l_2{}^2 \dot{\varphi}_2{}^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2] -$$
$$-[-m_1 g l_1 \cos\varphi_1 - m_2 g (l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2)] ,$$

т.е. търсеният лагранжиан е

$$\boxed{L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2{}^2 \dot{\varphi}_2{}^2 + l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2) g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2} .$$

✸ **Задача 3.7 (**Стр. 30/Зад. 179**)**

Да се определи движението на система от две тежки материално точки M_1 и M_2, принудени да се движат в постоянна вертикална равнина Oxy, като M_1 се движи по постоянна права g, сключваща ъгъл α с хоризонта, по известен закон $\xi = \xi(t)$, и разстоянието $\left|M_1M_2\right| = \ell = const$.



Решение: По условие $OM_1 \equiv \xi(t)$ е **известна функция**; $\left|M_1M_2\right| = l = const$.

За обобщена координата на махалото (т.е. т. M_2) избираме ъгъла φ.

Декартовите координати на точките M_1 и M_2 са съответно:

(1) $\left|\begin{array}{l} x_1 = \xi(t).\cos\alpha \\ y_1 = \xi(t).\sin\alpha \end{array}\right.$, и (2) $\left|\begin{array}{l} x_2 = x_1 + l\sin\varphi = \xi(t).\cos\alpha + l\sin\varphi \\ y_2 = y_1 - l\cos\varphi = \xi(t).\sin\alpha - l\cos\varphi \end{array}\right.$,

а техните производни по времето са

(3) $\left|\begin{array}{l} \dot{x}_1 = \dot{\xi}(t).\cos\alpha \\ \dot{y}_1 = \dot{\xi}(t).\sin\alpha \end{array}\right.$, и (4) $\left|\begin{array}{l} \dot{x}_2 = \dot{\xi}(t).\cos\alpha + l\cos\varphi\ \phi \\ \dot{y}_2 = \dot{\xi}(t).\sin\alpha - l(-\sin\varphi)\dot{\varphi} \end{array}\right.$.

Кинетичните енергии на двете тела са:

(5) $T_1 = \frac{m_1}{2}[\dot{x}_1{}^2 + \dot{y}_1{}^2] = \frac{m_1}{2}\dot{\xi}^2(t)$, и

(6) $$T_2 = \frac{m_1}{2}[\dot{x}_2{}^2 + \dot{y}_2{}^2] = \frac{m_2}{2}[\dot{\xi}^2(t).\cos^2\alpha + 2l\dot{\xi}(t).\cos\alpha\cos\varphi\ \phi + l^2\cos^2\varphi\ \phi^2 +$$
$$+ \dot{\xi}^2(t).\sin^2\alpha + 2l\dot{\xi}(t).\sin\alpha\sin\varphi\ \dot{\varphi} + l^2\sin^2\varphi\ \dot{\varphi}^2] =$$
$$= \frac{m_2}{2}\{\dot{\xi}^2(t) + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\xi}(t).\dot{\varphi}[\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi]\} =$$
$$= \frac{m_2}{2}\{\dot{\xi}^2(t) + +l^2\phi^2 + 2l\dot{\xi}(t).\phi\cos(\alpha-\varphi)\}.$$

Общата кинетична енергия на системата от двете тела е

(7) $$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1+m_2}{2}\dot{\xi}^2(t) + \frac{m_2}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + m_2l\dot{\xi}(t).\dot{\varphi}\cos(\alpha-\varphi),$$

а потенциалната им енергия е

(8) $$U = m_1 g.y_1 + m_2 g.y_2 = m_1 g.\xi(t).\sin\alpha + m_2 g.[\xi(t).\sin\alpha - l\cos\varphi] =$$
$$= (m_1+m_2)g.\xi(t).\sin\alpha - m_2 g l\cos\varphi.$$

Лагранжианът $L = T - U$ на системата е

$$\boxed{L = \frac{m_1+m_2}{2}\dot{\xi}^2(t) + \frac{m_2}{2}l^2\phi^2 + m_2l\dot{\xi}(t).\phi\cos(\alpha-\varphi) - (m_1+m_2)g.\xi(t).\sin\alpha + m_2 g l\cos\varphi}$$

При известен лагранжиан можем да определим уравнението на Лагранж за махалото

(9) $\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0$,

като за целта предварително определяме производните

☛ $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = m_2 l \dot{\xi}(t).\dot{\varphi}\,[-\sin(\alpha-\varphi)(-1)] + m_2\, g\, l(-\sin\varphi) = m_2 l\dot{\xi}(t).\dot{\varphi}\sin(\alpha-\varphi) - m_2\, g\, l\sin\varphi$;

☛ $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{m_2}{2} l^2\,(2.\dot{\varphi}) + m_2 l\dot{\xi}(t).\cos(\alpha-\varphi) = m_2 l^2\,\dot{\varphi} + m_2 l\dot{\xi}(t).\cos(\alpha-\varphi)$;

☛ $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2\,\ddot{\varphi} + m_2 l\ddot{\xi}(t).\cos(\alpha-\varphi) + m_2 l\dot{\xi}(t).[-\sin(\alpha-\varphi)(-1)\,\dot{\varphi}] =$

$= m_2 l^2\,\ddot{\varphi} + m_2 l\ddot{\xi}(t).\cos(\alpha-\varphi) + m_2 l\dot{\xi}(t).\sin(\alpha-\varphi)\,\dot{\varphi}$.

След заместване на тези производни в (9) за уравнението на Лагранж получаваме

(10) $m_2 l\dot{\xi}.\dot{\varphi}\sin(\alpha-\varphi) - m_2\, g\, l\sin\varphi - m_2 l^2\ddot{\varphi} - m_2 l\ddot{\xi}.\cos(\alpha-\varphi) - m_2 l\dot{\xi}.\dot{\varphi}.\sin(\alpha-\varphi) = 0$.

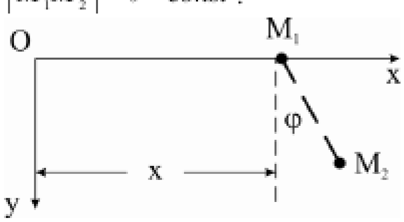
След извършване на съкращения и разделяне с ($-m_2 l$) получаваме

(11) $l\ddot{\varphi} + \ddot{\xi}.\cos(\alpha-\varphi) + g\sin\varphi = 0$.

При известна функция $\xi = \xi(t)$ горното уравнение е ОДУ от II ред за неизвестната функция $\varphi = \varphi(t)$, определянето на която позволява еднозначно да се опише (във всеки момент време t) положението на т. M_2 относно вертикалата, прекарана през точката на окачване M_1, движеща се по наклонената права по известен закон $\xi = \xi(t)$.

✸ Задача 3.8 (Стр. 31/Зад. 181**)**

Да се определи движението на математично махало M_2 с маса m_2, принудено да се движи по постоянна вертикална равнина Oxy, точката на окачване M_1 на което (с маса m_1) е принудена да се движи по постоянна хоризонтална ос Ox, като $|M_1 M_2| = \ell = const$.



Решение: Върху системата от две тела, съставляващи математическото махало с подвижна точка на окачване, са наложени общо 4 връзки:

- две са наложени върху M_1 (движи се само по хоризонталната права Ox);

- една е наложена върху M_2 (движи се само в равнината Oxy);

- една връзка е наложена поради обстоятелството, че $|M_1 M_2| = l = const$.

По този начин броя на степените на свобода s на системата от $N = 2$ тежки материални точки с наложени $k = 4$ на брой връзки е $s = 3.N - k = 3.2 - 4 = 2$. Следователно за описание движението на системата са необходими $s = 2$ независими обобщени координати. Избираме те да бъдат разстоянието $x(t) = OM_1$ и ъгълът $\varphi(t)$, който $M_1 M_2$ сключва с вертикалата.

Изразяваме декартовите координати на двете точки посредством обобщените координати:

(1) $\left| \begin{array}{l} x_1 = x(t) \\ y_1 = 0 \end{array} \right.$ и (2) $\left| \begin{array}{l} x_2 = x(t) + l\sin\varphi \\ y_2 = l\cos\varphi \end{array} \right.$.

Изразяваме последователно кинетичните и потенциалните енергии на двете тела, а след това кинетичната и потенциалната енергия на системата:

$$(3)\qquad \left| \begin{array}{l} T_1 = \dfrac{m_1}{2}(\dot{x}_1{}^2 + \dot{y}_1{}^2) = \dfrac{m_1}{2}\dot{x}^2(t) \\ U_1 = m_1\, g\, y_1 = 0 \end{array} \right. ;$$

$$(4)\qquad \left| \begin{array}{l} T_2 = \dfrac{m_2}{2}(\dot{x}_2{}^2 + \dot{y}_2{}^2) = \dfrac{m_2}{2}\{[\dot{x} + l\cos\varphi.\dot{\phi}]^2 + [-l\sin\varphi\,\dot{\phi}]^2\} = \dfrac{m_2}{2}\{\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi}\cos\varphi + l^2\dot{\phi}^2\} \\ U_2 = m_2\, g\, y_2 = m_2\, g\, l\cos\varphi \end{array} \right. ;$$

$$(5)\qquad \left| \begin{array}{l} T = T_2 + T_2 = \dfrac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \dfrac{m_2}{2}l^2\dot{\varphi}^2 \\ U = U_1 + U_2 \equiv U_2 = m_2\, g\, l\cos\varphi \end{array} \right. .$$

Функцията на Лагранж за тази система е

$$(6)\qquad L = T - U = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{m_2}{2}l^2\dot{\varphi}^2 - m_2\, g\, l\cos\varphi .$$

Уравненията на Лагранж са $s = 2$ на брой.

А) уравнение за обобщената координата $\varphi(t)$:

$$(7)\qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0 .$$

За намиране на (7) в явен вид определяме производните

☞ $\dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}[-\sin\varphi] - m_2\, g\, l[-\sin\varphi] = -m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + m_2\, g\, l\sin\varphi$;

☞ $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m_2 l\dot{x}\cos\varphi + \dfrac{m_2}{2}l^2(2\dot{\phi}) = m_2 l\dot{x}\cos\varphi + m_2 l^2\dot{\phi}$;

☞ $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m_2 l\ddot{x}\cos\varphi + m_2 l\dot{x}(-\sin\varphi\,\dot{\varphi}) + m_2 l^2\ddot{\varphi} = m_2 l\ddot{x}\cos\varphi - m_2 l\dot{x}\,\dot{\varphi}\sin\varphi + m_2 l^2\ddot{\varphi}$.

Заместваме така намерените производни в (7)

$$(8)\qquad -m_2 l\,\dot{x}\dot{\phi}\sin\varphi + m_2\, g\, l\sin\varphi - m_2 l\ddot{x}\cos\varphi + m_2 l\dot{x}\,\dot{\phi}\sin\varphi - m_2 l^2\dot{\phi} = 0$$

След съкращения и разделяне на ($-ml$) получаваме

$$(9)\qquad l\ddot{\varphi} + \ddot{x}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0 .$$

Б) уравнение за обобщената координата $x(t)$:

$$(10)\qquad \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 .$$

За намиране на (10) в явен вид определяме производните. Понеже $L \neq L(x)$, то

☞ $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 0$, следователно $x(t)$ е циклична координата. За нея уравнението (10) добива вида

(11) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} = 0$, следователно $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = C_1$, където C_1-интеграционна константа. Равенството $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = C_1$ означава, че функцията $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ е интеграл на движението. Нека го определим, намирайки производната на лагранжиана (6)

(12) $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m_1 + m_2}{2}(2\dot{x}) + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi = C_1$.

Търсеният интеграл на движението е

(13) $(m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l\cos\varphi\ \dot{\varphi} = C_1$.

Оказва се, че лявата страна на (13) е пълен диференциал, понеже

(14) $(m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l\cos\varphi\ \dot{\varphi} = \frac{d}{dt}[(m_1 + m_2)x + m_2 l\sin\varphi]$.

Замествайки (14) в (13) получаваме

(15) $d[(m_1 + m_2)x + m_2 l\sin\varphi] = C_1.dt$,

откъдето след интегриране намираме

(16) $(m_1 + m_2)x + m_2 l\sin\varphi = C_1.t + C_2$.

И така второто от уравненията на Лагранж допусна точно аналитично решение. Ако от решението (16) изразим $\ddot{x}$ и заместим в първото от уравненията, т.е. в (9), ще получим ДУ за намирането на функцията $\varphi = \varphi(t)$:

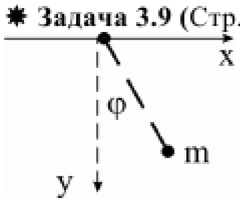
$$x = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\sin\varphi + \frac{1}{m_1 + m_2}[C_1.t + C_2];$$

$$\dot{x} = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\cos\varphi\dot{\varphi} + \frac{C_1}{m_1 + m_2}$$

$$\ddot{x} = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2}(-\sin\varphi\dot{\varphi})\dot{\varphi} - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}\cos\varphi\ddot{\varphi} = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}[\sin\varphi\dot{\varphi}^2 - \cos\varphi\ddot{\varphi}].$$

Заместването на $\ddot{x}$ в (9) действително води до ДУ от втори ред относно функцията $\varphi = \varphi(t)$.

✸ **Задача 3.9 (**Стр. 31/Зад. 182**)**



Да се определи движението на математично махало с дължина ℓ и маса m, точката на окачване на което се движи по постоянна хоризонтална ос Ox по закона $x = a\cos\omega t$, където $a > 0$ и $\omega > 0$.

Решение: декартовите координати на тялото (махалото) с маса m са

(1) $\begin{cases} x = a\cos\omega t + l\sin\varphi \\ y = l\cos\varphi \end{cases}$.

Функцията на Лагранж $L = T - U$ за махалото е

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - (-mgy) = \frac{m}{2}[(-a\omega\sin\omega t + l\cos\varphi.\dot{\varphi})^2 + (-l\sin\varphi\dot{\varphi})^2] + mgl\cos\varphi =$$

$$= \frac{m}{2}[a^2\omega^2\sin^2\omega t - 2a\omega l.\ \dot{\varphi}\sin\omega t\cos\varphi + l^2\cos^2\varphi.\dot{\varphi}^2 + l^2\sin^2\varphi\ \dot{\varphi}^2] + mgl\cos\varphi$$, или

(2) $L=\frac{m}{2}a^2\omega^2\sin^2\omega t-ma\omega l\,\dot\varphi\sin\omega t\cos\varphi+\frac{m}{2}l^2\dot\varphi^2+mgl\cos\varphi$.

Уравнението на Лагранж е

(3) $\frac{\partial L}{\partial\varphi}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=0$.

Производните, участващи в (3), са

☞ $\frac{\partial L}{\partial\varphi}=-ma\omega l\,\dot\varphi\sin\omega t(-\sin\varphi)+mgl(-\sin\varphi)=ma\omega l\,\dot\varphi\sin\omega t\sin\varphi-mgl\sin\varphi$;

☞ $\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=-ma\omega l\sin\omega t\cos\varphi+\frac{m}{2}l^2(2\dot\varphi)=-ma\omega l\sin\omega t\cos\varphi+ml^2\dot\varphi$;

☞ $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=-ma\omega l\,(\omega\cos\omega t)\cos\varphi-ma\omega l\sin\omega t(-\sin\varphi\,\dot\varphi)+ml^2\ddot\varphi=$

$=-ma\omega^2 l\cos\omega t\cos\varphi+ma\omega l\,\dot\varphi\,\sin\omega t\sin\varphi+ml^2\ddot\varphi$.

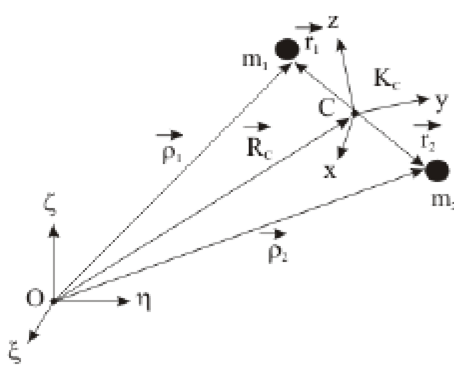
Заместваме така намерените производни в (3) и получаваме уравнението

$$ma\omega l\,\dot\varphi\sin\omega t\sin\varphi-mgl\sin\varphi+ma\omega^2 l\cos\omega t\cos\varphi-ma\omega l\,\dot\varphi\,\sin\omega t\sin\varphi-ml^2\ddot\varphi=0.$$

След съкращения и разделяне с $(-ml)$ горното уравнение добива вида

(4) $l\ddot\varphi-a\omega^2\cos\omega t\cos\varphi+g\sin\varphi=0$.

Това е уравнението на движение на махалото, а неговото решение $\varphi=\varphi(t)$ позволява да се опише движението му във всеки момент от време.



✱ **Задача 3.11** (*задача за две тела*)

Задачата за движение на **затворена** механична система, състояща се от две взаимодействащи помежду си тела (*материални точки*) се нарича **задача за две тела**. Нека масите на двете тела са съответно m_1 и m_2. Допускаме, че потенциалната енергия на взаимодействие между двете частици е функция **само** на **относителното им разстояние** $r=|\vec{r}_2-\vec{r}_1|$, т.е. $U=U(r)$. Търси се представяне за лагранжиана на системата от тези две тела.

Решение: Движението на системата може да се разглежда като резултат от наслагването на две движения: **(1)** движение на системата от две частици като единно цяло (движение на нейния център на масите C), и **(2)** движение на частиците спрямо техния общ център на масите C.

Спрямо произволно избрана **инерциална лабораторна** отправна система $K_0(O\xi\eta\zeta)$ центърът на масите C се движи праволинейно и равномерно с постоянна скорост $\vec{V}_C=const$. Интерес, следователно, представлява движението от тип (2) на частиците спрямо техния общ център на масите C, т.е. спрямо подвижна координатна система $K_C(Cxyz)$, началото на която е центъра на масите C на частиците m_1 и m_2.

Ако означим радиус-векторите на двете частици спрямо системата K_C със $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, то функцията на Лагранж за системата от две частици спрямо координатната система K_C ще бъде

(1) $$L = \frac{m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,2}}{2} - U(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|).$$

Удобно е в качеството на **нови координати** да се въведат радиус-вектора на центъра на масите $\vec{R}_C$ и радиус-вектора $\vec{r}$ на първата материална точка спрямо втората (*виж чертежа*), т.е.

(2ᵃ) $$\vec{R}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2},$$

(2ᵇ) $$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2.$$

Но спрямо системата $K_C(Cxyz)$ радиус-векторът на центъра на масите е $\boxed{\vec{R}_C = 0}$, следователно за изразяването на $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ посредством $\vec{r}$ получаваме следната **система от уравнения**

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = 0 \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{array}\right. ,$$

решенията на която са

(3) $$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \quad \text{и} \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}.$$

Замествайки $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ от (3) в представянето (1), за лагранжиана на системата получаваме

(4) $$L = \frac{m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,2}}{2} - U(r) = \frac{m_1}{2}\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \dot{\vec{r}}^{\,2} + \frac{m_2}{2}\left(-\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \dot{\vec{r}}^{\,2} - U(r) =$$

$$= \frac{m_1 m_2^{\,2}}{2(m_1 + m_2)^2}\dot{\vec{r}}^{\,2} + \frac{m_2 m_1^{\,2}}{2(m_1 + m_2)^2}\dot{\vec{r}}^{\,2} - U(r) = \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{2(m_1 + m_2)^2}\dot{\vec{r}}^{\,2} - U(r) =$$

$$= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}\dot{\vec{r}}^{\,2} - U(r) = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} - U(r),$$

където с $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ е означена т.нар. **приведена маса**.

Така получаваме

(5) $$\boxed{L = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} - U(r)}$$

Извод: функцията на Лагранж за двете тела съвпада (*формално*) с тази на **една материална точка** с маса μ, движеща се във външно поле $U(r)$ спрямо началото на координатната система $K_C(Cxyz)$. По такъв начин **задачата за движение на две взаимодействащи си тела бе сведена към задачата за движение на една частица** (*едната от двете*) **с фиктивна маса** μ **във външно централно поле** $U(r)$, създадено от другата от двете частици.