Въпрос 13: Двоен интеграл

Дефиниция: нека е дадена функция $f(x, y)$ с дефиниционна област $(x, y) \in D_f$. Разглеждаме **разбиване** τ на дефиниционната област на n непресичащи се подобласти

$\tau : D = D_1 \cup D_2 \cup .... \cup D_n$, като $\mu(D_i \cap D_j) = 0$,

където с $\mu(D_i)$ е означена мярката (повърхнината) на i-тата подобласт от разбиването τ. **Диаметър** δ_τ на разбиването τ ще наричаме най-големият измежду диаметрите δ_i на отделните подобласти, т.е. $\delta_\tau = \max(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$.

За всяка от подобластите на разбиването избираме по една **произволна точка** $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$.

При крайно разбиване (разбиване с краен брой елементи) Римановата интегрална сума за тази функция ще бъде

$$\sigma_\tau(f, \xi_i, \eta_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \mu(D_i).$$

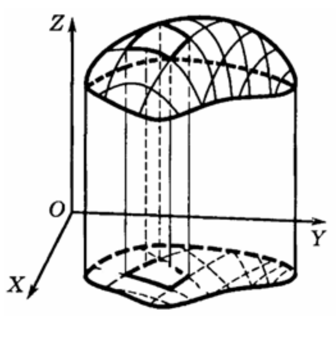
<u>Определение:</u> Казваме, че функцията $f(x, y)$ е **интегруема** в двумерна област $D \in D_f \in \Re^2$, ако съществува границата, към която клони сумата $\sigma_\tau(f, \xi_i, \eta_i)$ при неограничено нарастване на броя на елементите на разбиването, когато диаметъра на разбиването δ_τ клони към нула, т.е. ако съществува границата

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \mu(D_i).$$

Големината на $\sigma_\tau(f, \xi_i, \eta_i)$ при $\delta_\tau \to 0$, (**ако съществува**), се нарича **двоен интеграл**, и се бележи

$$\boxed{J = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f, \xi_i, \eta_i) = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \mu(D_i)}.$$

***Допълнение**: геометричен смисъл на двойния интеграл:



Двойният интеграл $J = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy \equiv \iint_D f(x, y)\, dS$ е равен численo на обема V на вертикалното цилиндрично тяло, опиращо се в долната си основа на областта D (областта на интегрирането), а отгоре ограничено от повърхността $z = f(x, y)$, определена за $(x, y) \in D$.

От казаното става ясно, че двойният интеграл притежава следното свойство: ако областта на интегриране D се разбие на две (или повече) непресичещи се подобласти D_1 и D_2, то в сила е равенството

$$\iint_D f(x, y)\, dS = \iint_{D_1} f(x, y)\, dS + \iint_{D_2} f(x, y)\, dS \cdot$$

Въпрос 14: Пресмятане на двоен интеграл

Нека най-напред разгледаме интеграционна област D, представляваща правоъгълник $D=[a,b]\times[c,d]=\left\{(x,y)\,\middle|\,a\le x\le b,\,c\le x\le d\right\}$. За двоен интеграл по такава област е в сила следното твърдение:

Ако функцията $f(x,y)$ е интегруема в D и за $\forall$x съществува $\int\limits_c^d f(x,y)dy=J(x)$, то съществува и интегралът $\int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right]dx$, като при това се изпълнява равенството

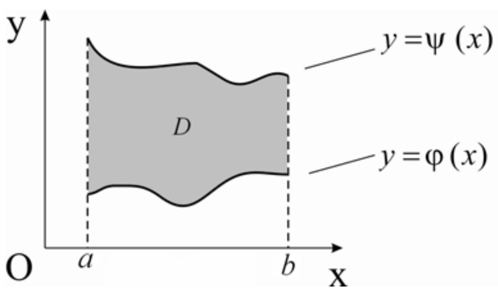
$$\int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right]dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Аналогично твърдение се получава, ако се „сменят” местата на променливите x и y (т.е. $x\leftrightarrow y$):

Ако функцията $f(x,y)$ е интегруема в D и за $\forall$y съществува $\int\limits_a^b f(x,y)dx=J(y)$, то съществува и интегралът $\int\limits_c^d\left[\int\limits_a^b f(x,y)dx\right]dy$, като при това се изпълнява равенството

$$\int\limits_c^d\left[\int\limits_a^b f(x,y)dx\right]dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)\,dx=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Следователно $\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.



Разглежданията за интеграционна област D, представляваща правоъгълник, могат да се обобщят и за интеграционна област, представляваща **криволинеен трапец с вертикални основи**

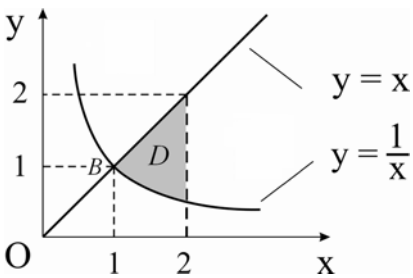
$$D=\left\{(x,y): a\le x\le b;\,\varphi(x)\le y\le\psi(x)\right\},$$

където $y_1=\varphi(x)$ и $y_2=\psi(x)$ са две непрекъснати функции на x в интервала $[a,b]$.

Тогава ако съществува $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$, то съществува и $\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$, като при това

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy=\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

✍ **Задача 1:** да се реши двойния интеграл $J = \iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dx\, dy$, където интеграционната област D е ограничена от правите $x = 2$, $y = x$ и хиперболата $x.y = 1$ (т.е. $y = \frac{1}{x}$).



Решение: Пресечната точка B на правата $y = x$ и хиперболата $x.y = 1$ има абсциса $x_B = 1$ и ордината $y_B \equiv y$, която е $y_B = x_B = 1$ (или пък $x_B.y_B = 1$), следователно т. $B(1,1)$.

Очевидно тази област представлява **криволинеен трапец** с вертикални основи ($x = 1$ и $x = 2$)

$$D = \left\{ (x, y) : 1 \le x \le 2; \varphi(x) \le y \le \psi(x) \right\},$$

където $y_1 \equiv \varphi(x) = \frac{1}{x}$, а $y_2 \equiv \psi(x) = x$ са две непрекъснати функции на x в интервала $[1,2]$.

Тогава за интеграла ще имаме

$$J = \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_1^2 \left[\int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}\, dy \right] dx = \int_1^2 \left[x^2 \int_{1/x}^{x} y^{-2}\, dy \right] dx =$$

$$= \int_1^2 x^2 \left[\frac{y^{-1}}{(-2+1)} \Bigg|_{1/x}^{x} \right] dx = -\int_1^2 x^2 \left[x^{-1} - \left(\frac{1}{x} \right)^{-1} \right] dx = -\int_1^2 x^2 \left[\frac{1}{x} - x \right] dx = -\int_1^2 x.dx + \int_1^2 x^3.dx =$$

$$= -\frac{x^2}{2} \Bigg|_1^2 + \frac{x^4}{4} \Bigg|_1^2 = -\left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) + \left(\frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} \right) = -\frac{3}{2} + \frac{15}{4} = -\frac{6}{4} + \frac{15}{4} = \frac{9}{4}.$$

Въпрос 15: Диференциални уравнения (само с отделящи се променливи**)**

Общият вид на едно ДУ (диференциално уравнение) от първи ред е

(1) $F(x, y, y') = 0$,

или още, ако може да се реши относно производната y' на неизвестната функция $y = y(x)$:

(2) $y' = f(x, y)$.

Например: $y' = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, или пък $y' = \frac{1}{x}$, имащо решение $y(x) = \ln|x| + C$.

Диференциални уравнения с отделящи се променливи

Общият им вид е

(3) $\boxed{y' = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)}}$.

Решение: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\varphi(x)}{\psi(y)} \qquad \Rightarrow \qquad \psi(y)\,dy=\varphi(x)\,dx \quad \Big|\int$

(4) $\quad \boxed{\int\psi(y)\,dy=\int\varphi(x)\,dx+C}$.

✍ **Пример 1:** $\dfrac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\dfrac{dy}{\sqrt{y(1-y)}}$.

Решение: Съгласно (4) решението на това ДУ с отделящи се променливи е $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\int\dfrac{dy}{\sqrt{y(1-y)}}+C$.

Решаваме двата интеграла по еднотипен начин (внасяме най-напред интеграционната променлива под съответния диференциал):

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}=\int\frac{dy}{\sqrt{y}\sqrt{1-y}}+C \quad \Rightarrow \quad \int\frac{x^{-\frac{1}{2}}\,dx}{\sqrt{1-x}}=\int\frac{y^{-\frac{1}{2}}\,dy}{\sqrt{1-y}}+C$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,d\,\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{\left(-\frac{1}{2}+1\right)}=\int\frac{1}{\sqrt{1-y}}\,d\,\frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{\left(-\frac{1}{2}+1\right)}+C \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2\int\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,d\sqrt{x}=2\int\frac{1}{\sqrt{1-y}}\,d\sqrt{y}+C \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad 2\int\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du=2\int\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,dv+C$, където $u=\sqrt{x}$ и $v=\sqrt{y}$.

Двата интеграла са таблични $\boxed{\int\dfrac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}=\arcsin\xi}$, следователно ще имаме следното решение на диференциалното уравнение:

$\boxed{2.\arcsin\sqrt{x}=2.\arcsin\sqrt{y}+C}$

✍ **Пример 2:** $\dfrac{3\,dy}{y^4}-\dfrac{2\,dx}{x^4}=0$.

Решение: $3\int y^{-4}dy=2\int x^{-4}dx+C' \quad \Rightarrow \quad 3\dfrac{y^{-3}}{(-3)}=2\dfrac{x^{-3}}{(-3)}+C' \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{y^3}=\frac{2}{x^3}+(-3)C' \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{x^3}-\frac{3}{y^3}=3C'\equiv C \quad \Rightarrow \quad \frac{2y^3-3x^3}{x^3y^3}=C \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad \boxed{2y^3-3x^3=Cx^3y^3}$, което е крайното решение на диференциалното уравнение.

✍ **Пример 3:** $y=\ln y'$.

Решение: $y'=e^y$, т.е. $\dfrac{dy}{dx}=e^y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{e^{-y}}=dx$, или още

$e^y dy = dx \quad \Rightarrow \quad \int e^y dy = \int dx + C \quad \Rightarrow \quad e^y = x + C$ което е крайното решение на диференциалното уравнение.