Граници в безкрайност, асимптоти и главни членове

СЪДЪРЖАНИЕ

1. Граници при $x \to \pm\infty$

В математиката **символът за безкрайност** се бележи с ∞. Това не е реално число. Когато използваме ∞ или $+\infty$, това означава, че разглежданите числа са бързо нарастващи положителни числа. Когато използваме $-\infty$, това означава, че разглежданите числа са бързо намаляващи отрицателни числа.

В тази лекция разглеждаме функции, дефинирани в безкрайни интервали от вида:

$(-\infty, a]$, $[a, \infty)$ или $(-\infty, \infty)$.

По аналогия с функциите върху крайни интервали е възможно стойностите на функцията да остават ограничени, когато аргументът се приближава към безкрайност (пишем $x \to \infty$, или $x \to -\infty$, или $x \to \pm\infty$). В много от тези случаи стойностите на функцията се приближават към едно и също число, наречено граница.

Определение 1. Функцията $f(x)$ има граница A при x клонящо към плюс безкрайност, което ще означаваме с

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

ако за всяко число $\varepsilon > 0$, съществува съответно число M такова, че за всички $x > M$ е изпълнено:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение 2. Функцията $f(x)$ има граница A при x клоняющо към минус безкрайност, което ще означаваме с

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$$

ако за всяко число $\varepsilon > 0$, съществува съответно число M такова, че за всички $x < M$ е изпълнено:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение 3. Ако за една функция $f(x)$ не съществува граница когато x клони към $+\infty$ или $-\infty$, а всичките й стойности растат (намаляват) безкрайно към $+\infty$ (или $-\infty$) ще казваме формално, че функцията има граница равна на $+\infty$ (или $-\infty$), която ще наричаме неограничена безкрайна граница и ще означаваме с

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

2. Основен пример: Граница в безкрайност на функцията $f(x)=\dfrac{1}{x}$

Тази функция е дефинирана за всяко $x \neq 0$.
Имаме

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0, \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0}$$

<u>Доказателство.</u> От Определение 1, фиксираме някакво $\varepsilon > 0$ и търсим съответно M, такова, че за $A = 0$ и всяко $x > M$ да е изпълнено

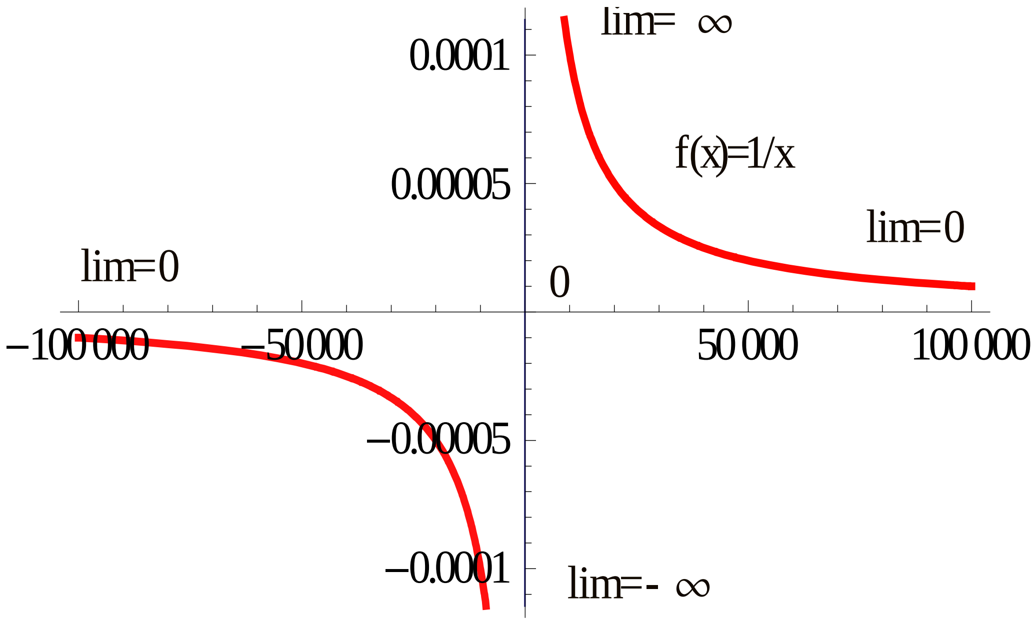
$$\left|f(x)-A\right| = \left|\frac{1}{x}-0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$$, откъдето $|x| > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Тъй като $x \to \infty$, достатъчно е да вземем например каквото и да е $M > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Втората граница се доказва аналогично за $x \to -\infty$ като вземем $M < -\dfrac{1}{\varepsilon}$.

Поведението на функцията е дадено на Фиг.1. Виждаме, че:

- $f(x)$ намалява към 0 при $x \to \infty$ с положителни стойности
- $f(x)$ нараства към 0 при $x \to -\infty$ с отрицателни стойности.



Фиг.1 Графика на $f(x) = 1/x$.

3. Правила за граници при $x \to \pm\infty$

Нека A, B и λ са реални числа и съществуват границите: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = B$. Тогава при:

1. Умножение с число: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \{\lambda f(x)\} = \lambda A$

2. Сума или разлика: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \{f(x) \pm g(x)\} = A \pm B$

3. Произведение: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \{f(x).g(x)\} = A.B$

4. Деление: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, $g \neq 0,\ B \neq 0$

5. Сравнение: Ако $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, то съществува границата $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x)$ и $A \leq \lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x) \leq B$.

4. Примери за граници в $\pm\infty$

Намерете границите:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{x}-10\right)$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-6x}{-3x^3+4}$, c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$,

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$, e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+1}{\sqrt{x-1}}$

Решение a). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{x}-10\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}10$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^3-2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim_{x\to\infty}10=0^3-2.0-10=-10.$$

Решение b).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-6x}{-3x^3+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(5-\frac{6x}{x^3})}{x^3(-3+\frac{4}{x^3})}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(5-\frac{6x}{x^3})}{(-3+\frac{4}{x^3})}=\frac{(5-6\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3})}{(-3+4\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3})}=\frac{(5-0)}{(-3+0)}=-\frac{5}{3}$$

Решение c).

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(-x)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-1$$

Решение d). Знаем, че за всяко реално x:

$$-1 \le \sin x \le 1.$$

От правилото за сравнение на граници имаме:

$$-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} \le \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} \le \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}, \quad \text{или} \quad -0 \le \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} \le 0.$$

Следователно: $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0.$

Решение e).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{\sqrt{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\left(2x^2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=\frac{\left(2\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\sqrt{x}\right)+\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}\right)}{\sqrt{1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}}$$

$$=\frac{2\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\sqrt{x}\right)+0}{\sqrt{1-0}}=2\lim_{x\to\infty}x^2\sqrt{x}=\infty \quad .$$

5. Забележителни граници в $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\,, \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}$$

Примери. Намерете границите:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{3x}$

Решение a). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\right)^{x}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

Решение b).

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^{3x} = \frac{1^{3x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}} = \frac{1}{e^{3}} = e^{-3}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^{3x} = \frac{1^{3x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}} = \frac{1}{e^{3}} = e^{-3}$$

6. Безкрайни граници при $x \to a$

В много случаи функцията може да расте или намалява безкрайно, когато x клони към крайна точка a. Реално това отразява поведението на функцията в близост до точката a.

Определение 4. Казваме, че $f(x)$ клони към плюс безкрайност, когато x клони към a и означаваме

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

ако за всяко положително реално число L съществува съответно число $\delta > 0$, такова че за всяко x, за което

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > L.$$

Определение 5. Казваме, че $f(x)$ клони към минус безкрайност, при x клонящо към a и пишем

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

ако за всяко положително реално число L съществува съответно число $\delta > 0$, такова че за всяко x, за което

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) < -L \,.$$

Забележка. Помнете, че определения 4-5 не представят реални граници, това са само означения!

Определенията 4-5 се използват в математиката и са едностранни граници при крайно число a. Това описва поведението на функцията за всяко x, което е отдясно на a (означаваме с $x \to a^{+}$) или отляво на a (означено като $x \to a^{-}$).

Например:

$$\lim_{x\to a^{+}} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to a^{-}} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to a^{+}} f(x) = -\infty,$$

или $\lim_{x\to a^{-}} f(x) = -\infty$.

7. Примери за безкрайни граници при $x \to a$

Основен пример. Функцията $f(x)=1/x$ не е определена в точката $x = 0$. Но за всички положителни числа, достатъчно близки до 0, означени като $x \to 0^+$, функцията расте неограничено и надвишава всяко положително реално число. Това е значението на определение 4 за лява граница. Следователно:

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty}.$$

Съответно, за всички отрицателни x клонящи към 0 (пишем $x \to 0^-$):

$$\boxed{\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty}.$$ Виж Фиг. 1.

Примери. Определете поведението на функцията близо до точката a.

a) $\dfrac{2x}{x-9}$, $a = 9$, b) $\dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1}$, $a = 1$.

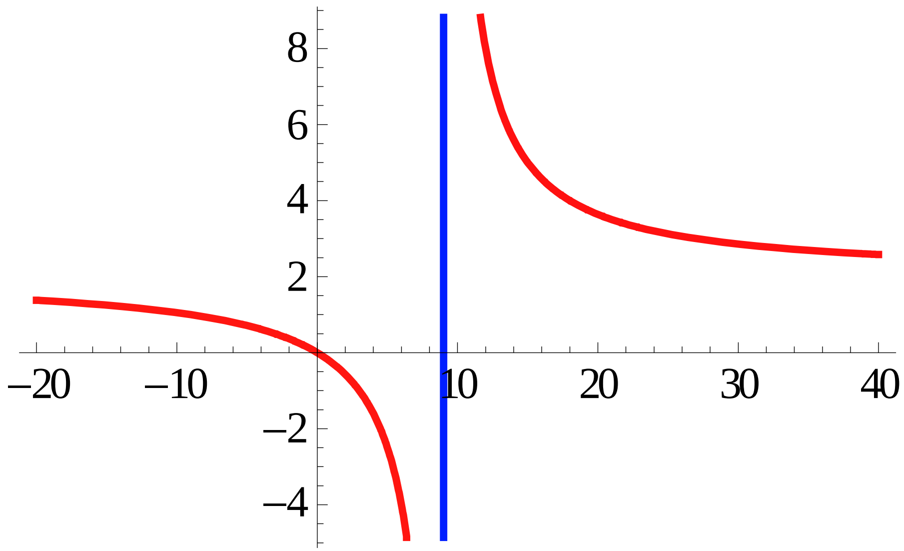
Решение а).

- Виждаме, че при *x*=9 знаменателят става 0. Изчисляваме границата над 9:

$$\lim_{x\to 9^+} \frac{2x}{x-9} = \left[\frac{18}{0^+}\right] = \infty .$$

- Границата под 9 е:

$$\lim_{x\to 9^-} \frac{2x}{x-9} = \left[\frac{18}{0^-}\right] = -\infty$$



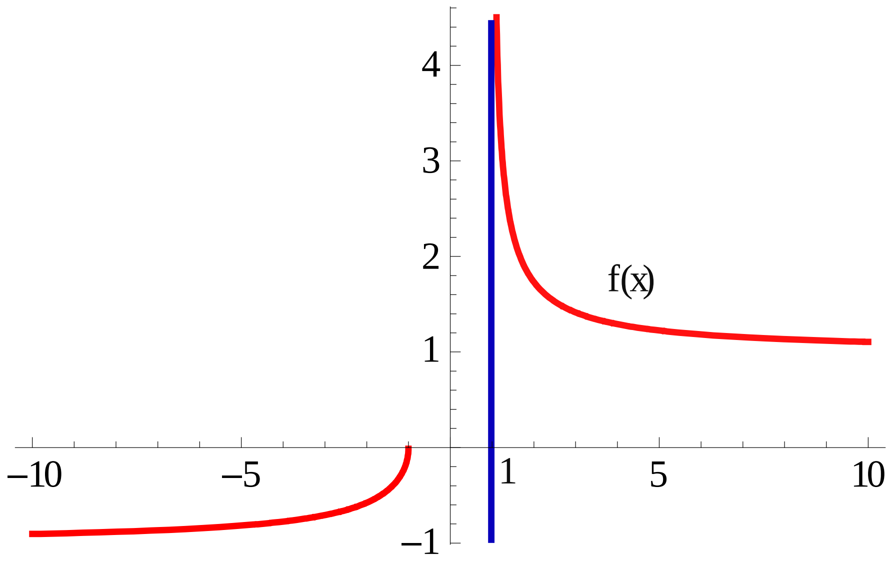
Фиг. 2 Разглеждаме графиката на функцията $f(x) = \dfrac{2x}{x-9}$ близо до $x = 9$. За $x > 9$, $f(x) \to +\infty$; за $x < 0$, $f(x) \to -\infty$.

Решение b).

- Дефиниционната област е: $D=(-\infty,-1]\cup(1,\infty)$.
- Особената точка е: $x=a=1$, където знаменателят е 0. Границата над a е:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{2}\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt{x-1}}=\infty.$$



Фиг.3 Графика на функцията $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$. Близо до $x=1$, $x>1$, $f(x)\to+\infty$.

8. Асимптоти към графики

Ако разстоянието между някоя графика на функция и фиксирана права клони към нула при движение на точка надалече от началото на координатната система, казваме че графиката приближава правата асимптотично и че тя е **асимптота н**а графиката на функцията.

Има 3 вида асимптоти:

- Хоризонтални
- Вертикални
- Наклонени

9. Хоризонтална асимптота

Определение 6. Правата $y = b$ е хоризонтална асимптота към графиката на функцията $y = f(x)$, ако или $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

Основен пример. Както знаем от секция 2 и Фиг.1:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Значи $y = 0$ е хоризонтална асимптота на функцията $1/x$ едновременно в двете безкрайности.

10. Вертикална асимптота

Определение 7. Правата $x = a$ е вертикална асимптота към графиката на функцията $y = f(x)$, ако или $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$.

Основен пример. В секция 7 (и Фиг.1), получихме:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty,$$

Което означава, че $x = 0$ е вертикална асимптота на функцията $1/x$ над и под нулата.

Пример. Намерете хоризонталната и вертикалната асимптота на функцията: $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x - 1}{x^2 - 4}$.

Решение.

- Хоризонталните асимптоти са при $x \to \pm\infty$. За $x = \infty$ ще опитаме да съкратим най-големият член, който носи особеността в +безкрайност (тук x^2):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 5x - 1}{x^2 - 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2\left(1 - \dfrac{5x}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right)} = 3$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-5x-1}{x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2\left(1-\frac{5x}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=3$$

Получааваме, че правата $y = 3$ е хоризонтална асимптота в + и - безкрайност.

- Вертикалните асимптори са в т. $x = \pm 2$.

Изчисляваме всичлите възможни 4 граници:

$$\lim_{x\to2^+}\frac{3x^2-5x-1}{x^2-4}=\lim_{x\to2^+}\frac{3.4-5.2-1}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2^+}\frac{1}{4(x-2)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to2^-}\frac{3x^2-5x-1}{x^2-4}=\lim_{x\to2^-}\frac{3.4-5.2-1}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2^-}\frac{1}{4(x-2)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{3x^2-5x-1}{x^2-4}=\lim_{x\to -2^+}\frac{3.4-5.(-2)-1}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to -2^+}\frac{21}{-4(x+2)}=-\infty$$

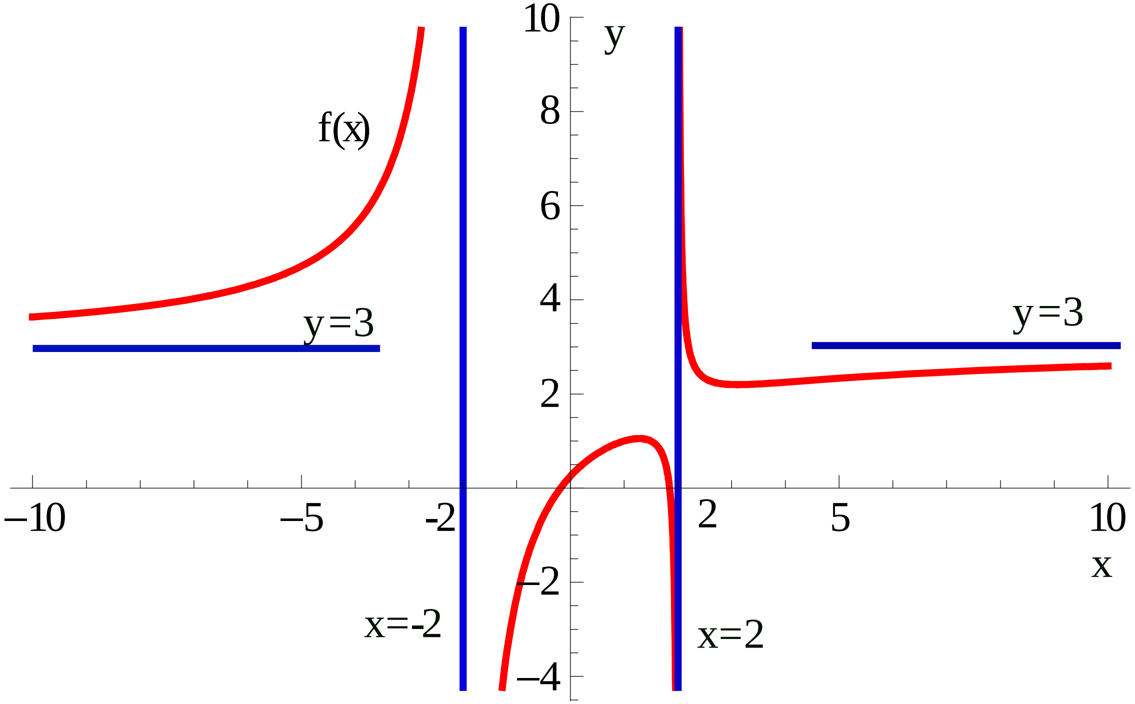
$$\lim_{x\to -2^-}\frac{3x^2-5x-1}{x^2-4}=\lim_{x\to -2^-}\frac{3.4-5.(-2)-1}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to -2^-}\frac{21}{-4(x+2)}=+\infty$$

Получаваме, че $x = \pm 2$ са верункцията, в близост до т. x=2.

Графиките на функцията и асимптотите са показани на Фиг. 4.

Заключение:

- $f(x)$ приближава стойност 3 при $\pm\infty$.
- $f(x)$ приближава ∞ когато x клони към -2 отдолу и към $+2$, когато клони отгоре.
- $f(x)$ клони към $-\infty$, когато x клони към -2 отгоре и към $+2$ отдолу.



Фиг. 4 Графика на функцията $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x - 1}{x^2 - 4}$ с нейните асимптоти (дадени в син цвят).

11. Наклонена асимптота

Определение 8. Правата $y = kx + b$ е наклонена асимптота към графиката на функцията $y = f(x)$ където

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx \right),$$

Ако тези граници съществуват.

Пример. Намерете асимптотите на функцията

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 2}.$$

Решение:

- Хоризонтални асимптоти няма, защото:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-9}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(x-\frac{9}{x})}{x(1-\frac{2}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\frac{9}{x})}{(1-\frac{2}{x})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-9/x)}{1}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

and $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-9}{x-2}=\ldots=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$.

- Вертикални асимптоти. При $x = 2$ функцията е неопределена:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-9}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{4-9}{(x-2)}=-5\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{4(x-2)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-9}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{4-9}{(x-2)}=-5\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{4(x-2)}=+\infty.$$

Т.е., правата $\boxed{x = 2}$ е двустранна вертикална асимптота.

- Наклонени асимптоти. Търсим $y = kx + b$, където

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-9}{x(x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1-9/x)}{x^2(1-2/x)}=1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = 1 \text{ при } x = \pm\infty}.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-9}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-9-x^2+2x}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-9}{x-2}=2$$. Наклонената асимптота е: $\boxed{y = x + 2}$.

Графика на функцията

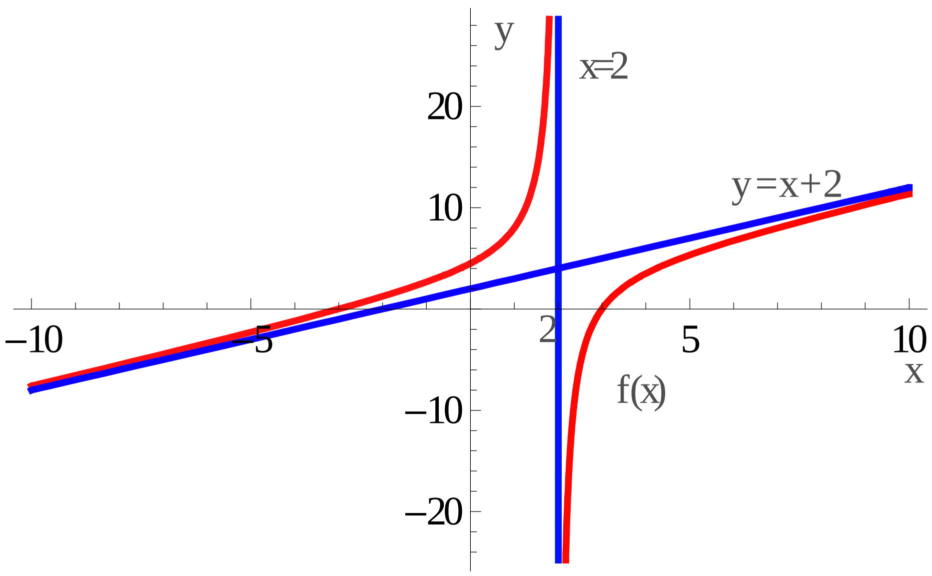
$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-2}$$

И асимптотите й:

$x = 2$ - вертикална;

$y = x + 2$- наклонена.

Функцията се доближава към асимптотите си при $x\to\pm\infty$ и $y\to\pm\infty$.



Фиг. 5 Графика на функцията $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-2}$ и нейните асимптоти (в син цвят).

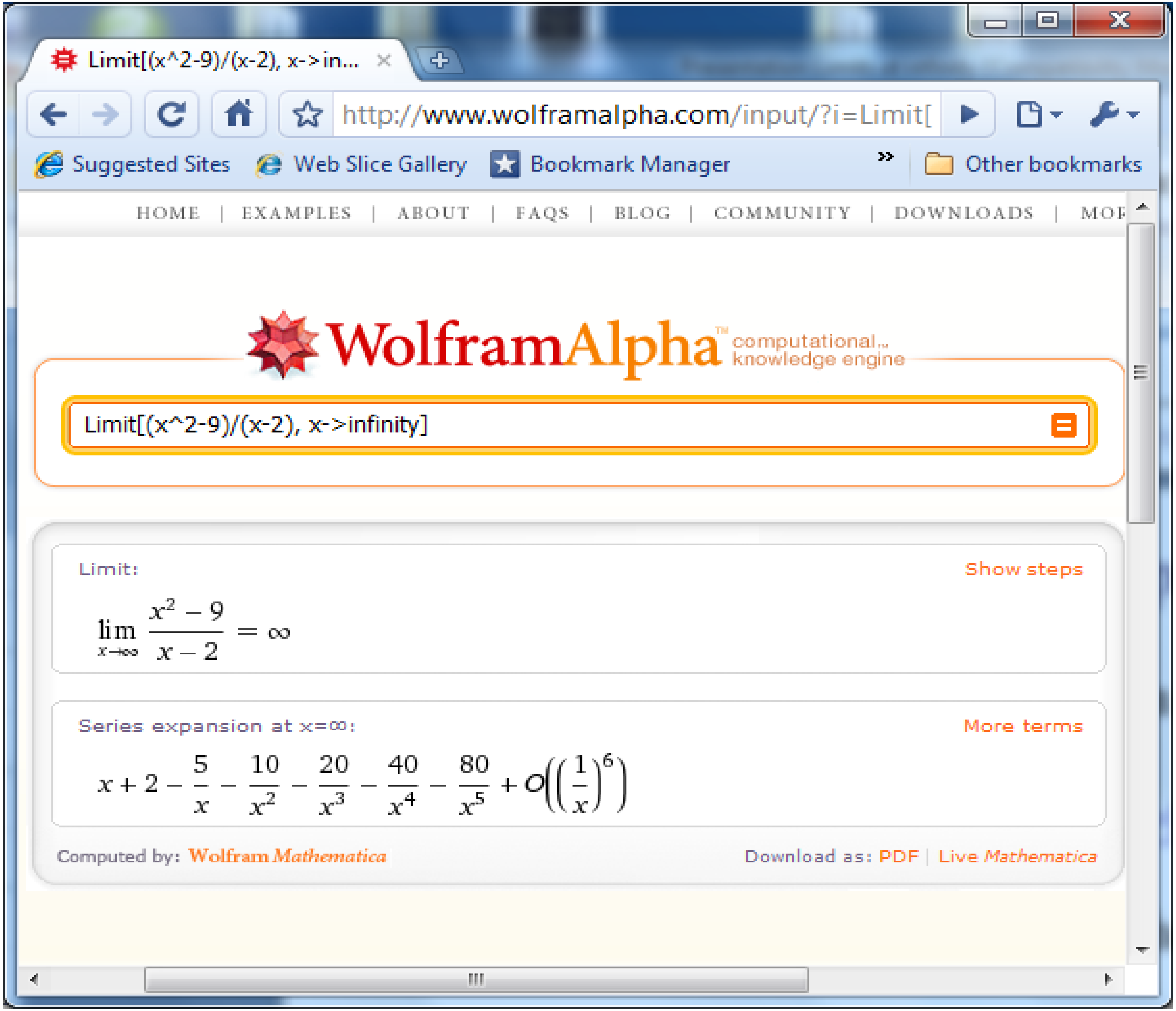
12. Компютърни изчисления

За по-прости изчисления можем да ползваме онлайн *Mathematica* на уебадрес: http://www.wolframalpha.com/

Например, за да изчислим границата на функция в безкрайност, пишем командата:

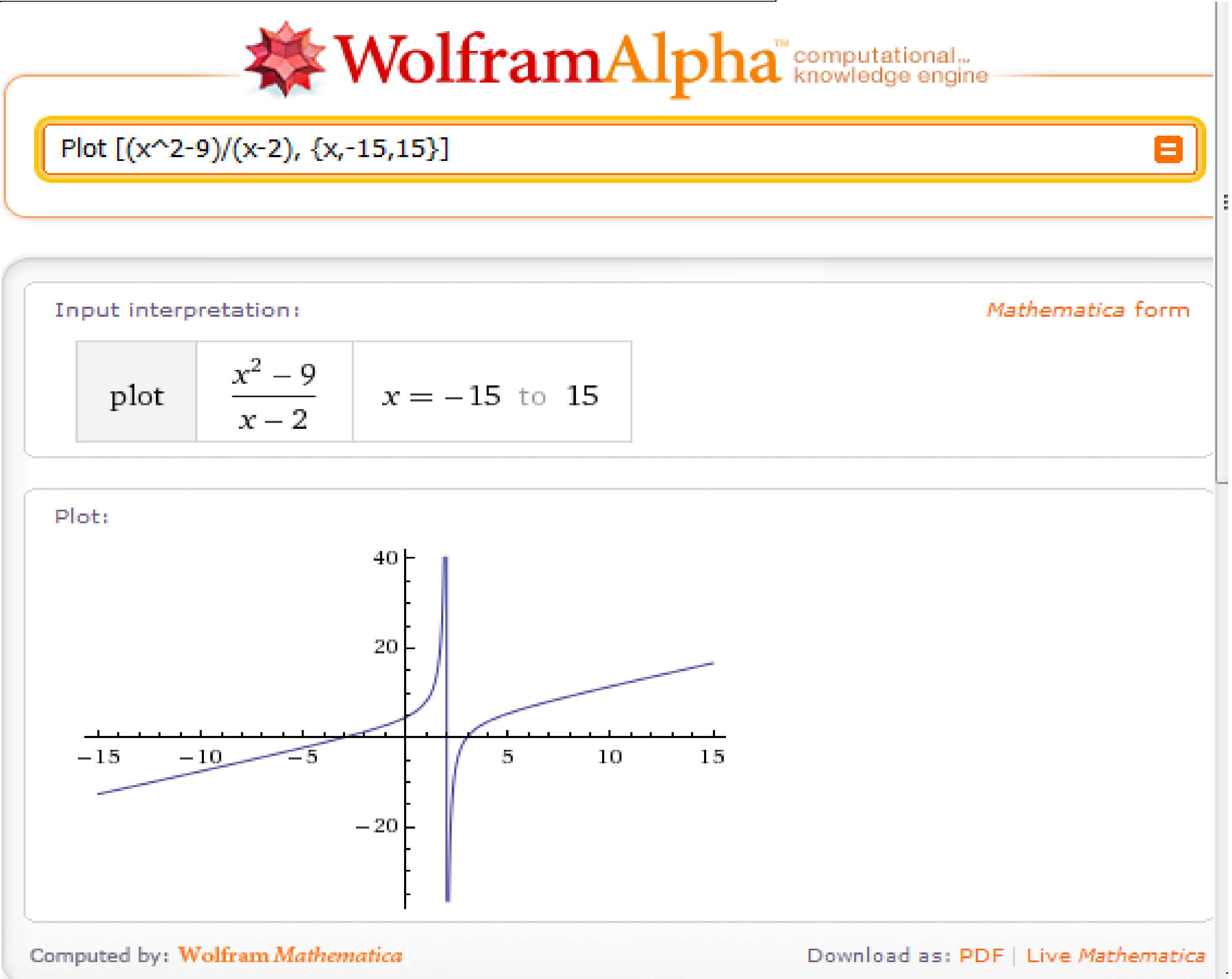
```
Limit[(x^2-9)/(x-2), x->infinity]
```

Резултатът е:


Limit[(x^2-9)/(x-2), x-> in...
http://www.wolframalpha.com/input/?i=Limit[
Suggested Sites
Web Slice Gallery
Bookmark Manager
Other bookmarks
HOME | EXAMPLES | ABOUT | FAQS | BLOG | COMMUNITY | DOWNLOADS | MOR
WolframAlpha computational.. knowledge engine
Limit[(x^2-9)/(x-2), x->infinity]
Limit:
Show steps
$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-9}{x-2}=\infty$
Series expansion at x=∞:
More terms
$x+2-\frac{5}{x}-\frac{10}{x^2}-\frac{20}{x^3}-\frac{40}{x^4}-\frac{80}{x^5}+O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^6\right)$
Computed by: Wolfram Mathematica
Download as: PDF | Live Mathematica

За да нарисуваме графиката задаваме командата:

Plot [(x^2-9)/(x-2), {x,-15,15}]



13. Доминиращ член

В много случаи можем да намерим представяне на функцията с отделяне на една част от нейната формула, която съдържа поведението й в особените точки.

Пример. Нека представим предната функция така

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 2} = (x + 2) - \frac{5}{x - 2}$$

При $x \to \pm\infty$ вторият член е почти нула, или приблизително $f(x) \approx (x + 2)$. Това е доминиращият член.

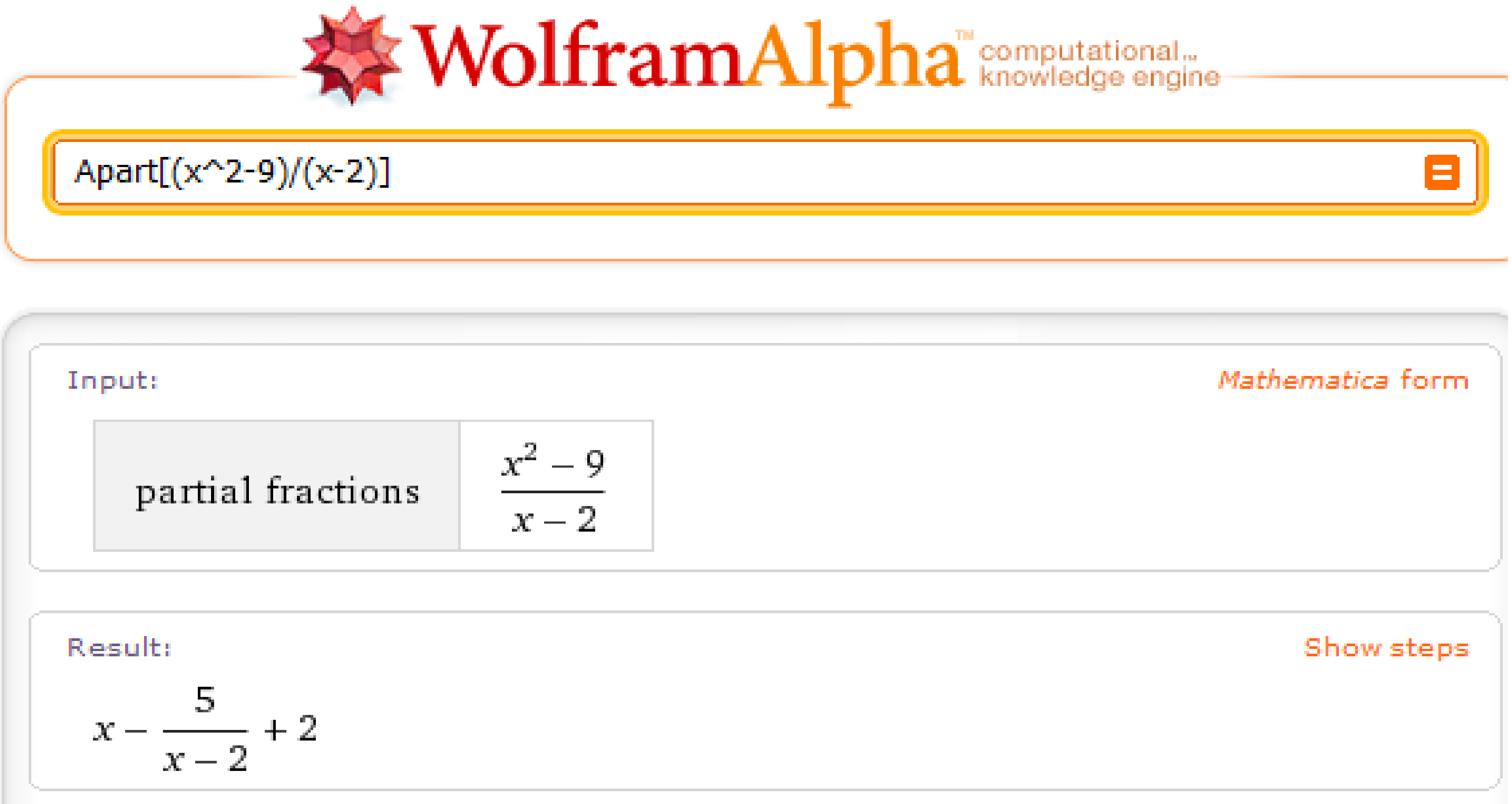
При $x \to \pm 2$, първият член е фиксиран и функцията е приблизително $f(x) \approx -\dfrac{5}{x-2}$, което расте или намалява безкрайно, съответно при $x \to \mp\infty$.

Така имаме 2 доминиращи члена на функцията.

Доминиращите членове могат да се намерят с деление на полиномите, разлагане в ред и др.

От сайта на *Wolfram alfa Mathematica* записаме:

Apart[(x^2-9)/(x-2)]



и получаваме същото решение.

References for further reading:

[1] G. B. Thomas, M. D. Weir., J. Hass, F. R. Giordano, *Thomas' Calculus including second-order differential equations*, 11 ed., Pearson Addison-Wesley, 2005.

[2] http://www.wolframalpha.com/