Решени задачи за граници на функции, клонящи към безкрайност, асимптоти и доминиращи членове

Общи методи за намиране на граници на функции със сингулярности

Във всички граници на функции, клонящи към безкрайността, или в единствена крайна точка, където функцията е недефинирана, се опитваме да приложим следния общ метод.

Това трябва да се знае наизуст:

> Общият метод е да изолирате сингулярността като член и да се опитате да го отмените.

Задача 1. Намерете границата $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2x+1}$.

- Решение. Числителят и знаменателят клонят към безкрайността при $x\to\infty$. Сингулярната точка е $x=\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x(2+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(2+\frac{1}{x})}$$

$$=\frac{1}{(2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x})}=\frac{1}{(2+0)}=\frac{1}{2}$$

Задача 2. Намерете границата на функцията

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+1}{3x^2-2x}.$$

- Решение. Прилагаме общия метод:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+1}{3x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(3-\frac{2}{x})}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(3-\frac{2}{x})}=\frac{1-0-0}{3-0}=\frac{1}{3}$$

Задача 3. Намерете границата на функцията

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{7x^2+1}}.$$

- Решение. Сингулярната точка е $x=-\infty$.

  Solution.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{7x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2(7+\frac{1}{x^2})}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{(7+\frac{1}{x^2})}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{(7+\frac{1}{x^2})}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{(-x)\sqrt{7+\frac{1}{x^2}}}=\frac{-1}{\sqrt{7+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}}=\frac{-1}{\sqrt{7}}$$

Задача 4. Намерете границата на функцията

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}.$$

Решение. Сингулярната точка е $x = \infty$. Не е трудно да се забележи, че знаменателят се приближава към 0 при $x\to\infty$. За да изолираме тази сингулярност, ние рационализираме знаменателя чрез използване на формулата

$$\boxed{A^2-B^2=(A+B)(A-B)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x-1}\right)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{x+1-(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}$$

Сега приложете общия метод

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{2}\left(\sqrt{1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{2}\left(\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{2}(1+1)=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty\,.$$

Задача 5. Намерете асимптотите на функцията

$$f(x)=\frac{3x+2}{x-1}.$$

Решение. Дефиниционното множество е за всяко $x \neq 1$ или $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

- Хоризонтални асимптоти при $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(3+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{\left(3+2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)}=\frac{3+0}{1-0}=3$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(3+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{\left(3+2\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\right)}=\frac{3+0}{1-0}=3$$

Получихме, че има хоризонтална асимптота $y=3$.

- Вертикални асимптоти. Крайна сингулярна точка е $x=1$, където функцията е недефинирана.

Границата от лявата страна, когато $x\to1,\ x<1$, е:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{3x+2}{x-1}=\frac{3.1+2}{\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)}=\frac{5}{[-0]}=-\infty$$

Границата от дясната страна, когато $x\to1,\ x>1$, е:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{3x+2}{x-1} = \frac{5}{\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)} = \frac{5}{[+0]} = \infty$$

Функцията има двустранна вертикална асимптота $x=1$.

- **<u>Наклонени асимптоти</u>**. Търсим съществуването на такива две числа k и b, че при $x \to \infty$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ и } b = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - kx \right) \text{ (или при } x \to -\infty\text{).}$$

Тогава правата $y = kx + b$ е коса асимптота на $f(x)$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{x(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(3+2/x)}{x^2(1-1/x)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} . \lim_{x\to\infty} \frac{(3+2/x)}{(1-1/x)} = 0$$

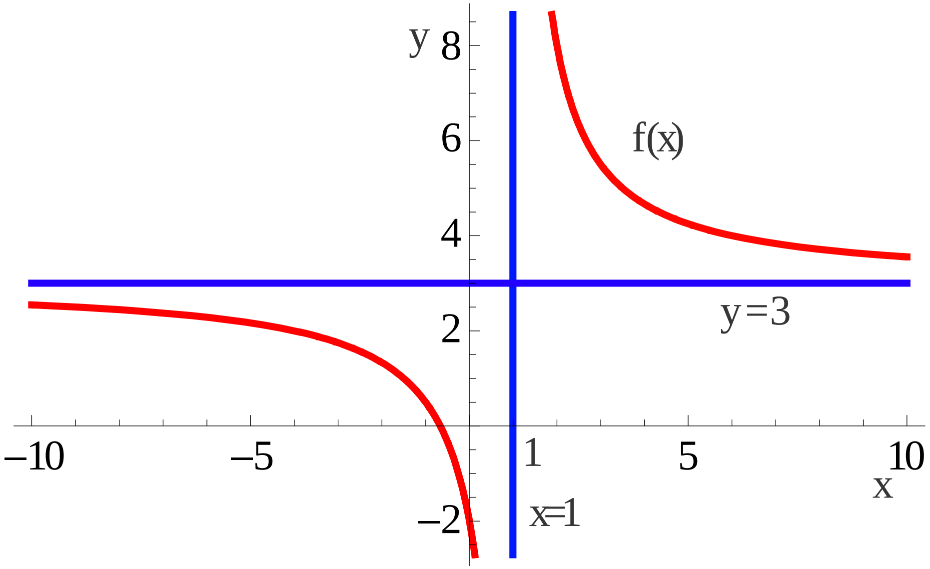
Същото се отнася и за $x \to -\infty$.

Следователно няма коса асимптота.

Задача 6. Начертайте графиката на функцията

$$f(x) = \frac{3x+2}{x-1}.$$

Като използваме асимптотите от Задача 5, получаваме чертежа на Фиг. 1.



Фиг. 1 Чертеж на функцията $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$ с нейните асимптоти (в синьо).

Задача 7. Намерете асимптотите на функцията

$$f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 - 25}.$$

Решение. Дефиниционното множество е $4x^2 - 25 \geq 0$ или $x \in (-\infty, 2.5] \cup [\ 2.5, \infty)$.

- Първо потърсете хоризонтални асимптоти. При $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(2x - \sqrt{4x^2 - 25}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(2x - \sqrt{4x^2 - 25}\right)\left(2x + \sqrt{4x^2 - 25}\right)}{\left(2x + \sqrt{4x^2 - 25}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2 - 4x^2 + 25}{\left(2x + \sqrt{4x^2 - 25}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{25}{2x\left(1 + \sqrt{1 - 25/4x^2}\right)}$$

$$=\frac{25}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}.\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-25/4x^2}}=\frac{25}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}.\frac{1}{1+\sqrt{1-0}}=\frac{25}{4}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

<u>Има хоризонтална асимптота $y = 0$ при $x\to\infty$.</u>

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2-25}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2\left\{1-\frac{25}{4x^2}\right\}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(2x-|2x|\sqrt{1-\frac{25}{4x^2}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x+2x\sqrt{1-\frac{25}{4x^2}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}2x.\left(1+\sqrt{1-\lim_{x\to-\infty}\frac{25}{4x^2}}\right)=\lim_{x\to-\infty}2x.\left(1+\sqrt{1-0}\right)=4.\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

<u>Няма хоризонтална асимптота при $x\to-\infty$.</u>

Няма крайни сингулярни точки и вертикални асимптоти.

- Търсим коси асимптоти при $x \to -\infty$

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x - \sqrt{4x^2 - 25}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x - |2x|\sqrt{1 - \frac{25}{4x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x + 2x\sqrt{1 - \frac{25}{4x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x\left(1 + \sqrt{1 - \frac{25}{4x^2}}\right)}{x} =$$

$$= 2\lim_{x\to-\infty}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{25}{4x^2}}\right) = 2.2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = 4.}$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(2x - \sqrt{4x^2 - 25} - 4x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-2x - \sqrt{4x^2 - 25}\right).$$

Тъй като има $[\infty - \infty]$, ще рационализираме числителя

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(-2x - \sqrt{4x^2 - 25}\right)\left(-2x + \sqrt{4x^2 - 25}\right)}{\left(-2x + \sqrt{4x^2 - 25}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(4x^2 - 25 - 4x^2\right)}{\left(-2x + \sqrt{4x^2 - 25}\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-25}{-2x + |2x|\sqrt{1 - 25/x^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-25}{-2x - 2x\sqrt{1-0}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-25}{-4x} = 0$$

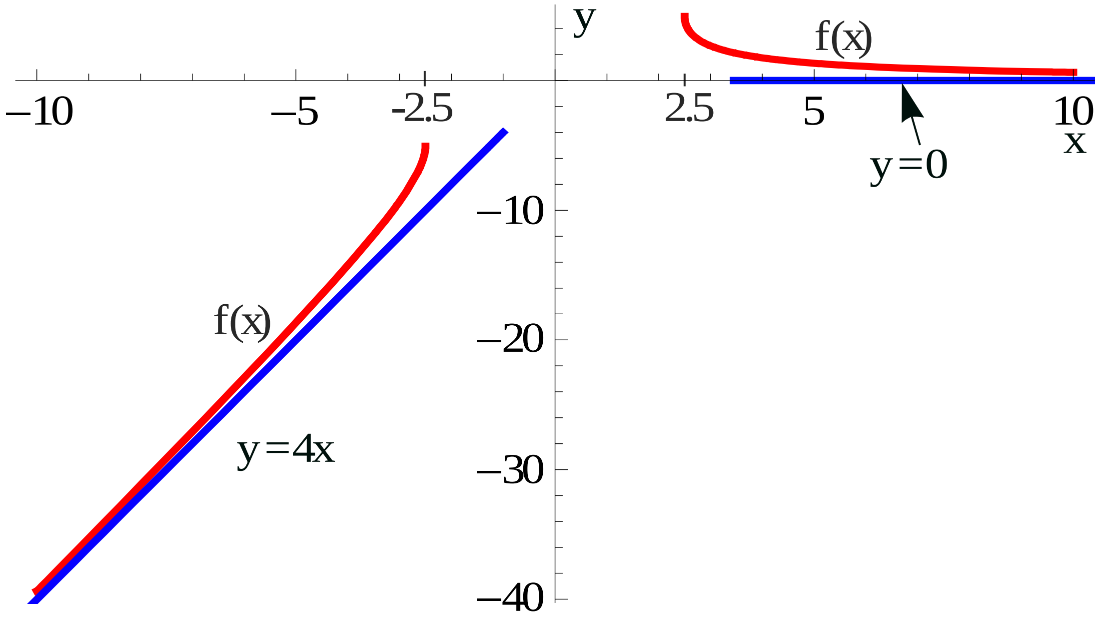
$$\Rightarrow \quad \boxed{b = 0.}$$

Получихме <u>косата асимптота</u> <u>$y = 4x$ при</u> <u>$x \to -\infty$</u>.

Задача 8. Начертайте графиката на функцията
$f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 - 25}$.

Намираме
$f(2.5)=5,\quad f(-2.5)=-5$.

Като използваме асимптотите от Задача 5, получаваме чертежа на Фиг. 1.



Фиг. 2 Чертеж на функцията $f(x)=\left(2x-\sqrt{4x^2-25}\right)$ с нейните асимптоти (в синьо).

Задача 9. Намерете асимптотите и начертайте графиката на функцията

$$f(x)=\frac{2x^3-4x^2+15}{3x^2-12}$$

Решение.

- Дефиниционното множество е: $3x^2-12\neq 0$ или $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$. Сингулярните точки на функцията са $x_1=-2,\ x_2=2$.

- Хоризонталните асимптоти. Изчисляваме границите на безкрайности:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-4x^2+15}{3x^2-12}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3\left(2-4/x+15/x^2\right)}{x^2\left(3-12/x^2\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{3}x=\pm\infty .$$

Това означава липса на хоризонтални асимптоти.

- Вертикални асимптоти. Намираме границите на функциите в сингулярните точки:

$$\ldots \lim_{x\to 2^+}\frac{2x^3-4x^2+15}{3x^2-12}=\lim_{x\to 2^+}\frac{15}{[+0]}=\infty$$

$$\ldots \lim_{x\to 2^-}\frac{2x^3-4x^2+15}{3x^2-12}=\lim_{x\to 2^-}\frac{15}{[-0]}=-\infty$$

$$\ldots \lim_{x\to -2^+}\frac{2x^3-4x^2+15}{3x^2-12}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-17}{[+0]}=-\infty$$

$$\cdots \lim_{x\to -2^-} \frac{2x^3-4x^2+15}{3x^2-12} = \lim_{x\to -2^-} \frac{-17}{[-0]} = \infty$$

Можем да заключим, че правите $x=-2,\ x=2$ са двустранни вертикални асимптоти.

- Коси асимптоти. И за двете $\pm\infty$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3-4x^2+15}{x\left(3x^2-12\right)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(2-4/x+15/x^2\right)}{x^3\left(3-12/x^2\right)} = \frac{2}{3} \qquad \Rightarrow \boxed{k=\frac{2}{3}}.$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - kx \right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^3 - 4x^2 + 15}{3x^2 - 12} - \frac{2}{3}x \right)$$

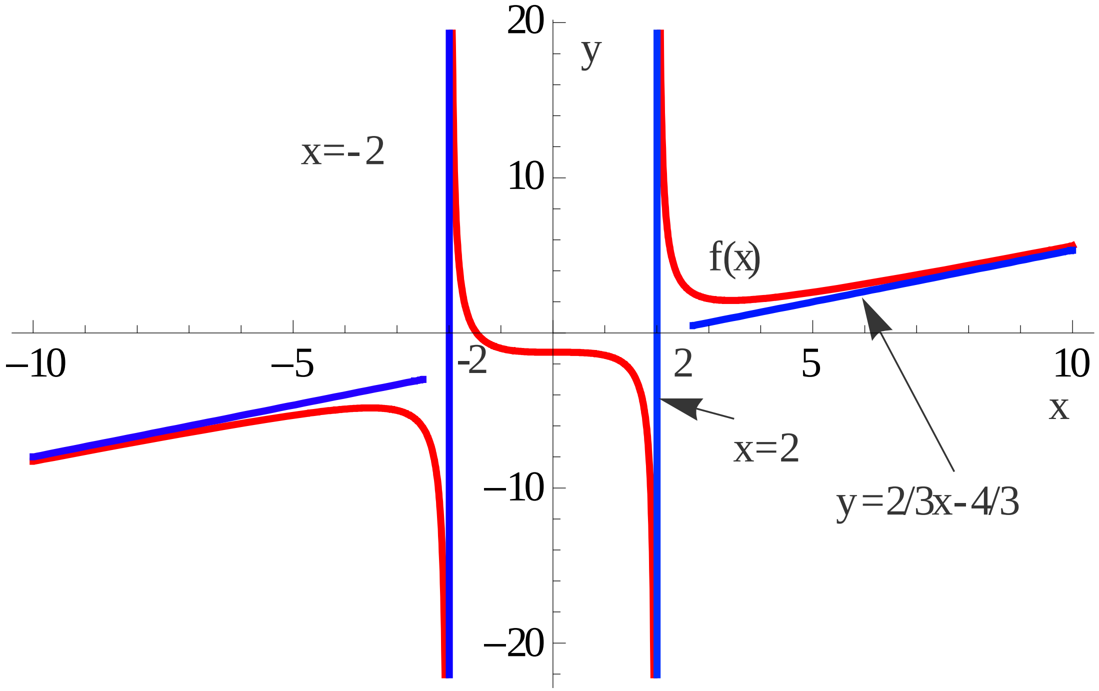
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^3 - 4x^2 + 15 - 2x^3 + 8x}{3x^2 - 12} \right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-4x^2 + 8x + 15}{3x^2 - 12} \right) = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{b = -\frac{4}{3}}.$$

Правата $y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$ е коса асимптота, клоняща към безкрайността и отрицателна безкрайност. Представяне на чертежа на функцията

$$f(x)=\frac{2x^3-4x^2+15}{3x^2-12}$$

и нейните асимптоти:



Фиг. 3 Чертеж на функцията $f(x)=\frac{2x^3-4x^2+15}{3x^2-12}$ (в червен) е нейните асимптоти (в синьо).

Задача 10. Намерете доминиращите членове на функцията

$$f(x)=\frac{2x^3-4x^2+3}{x^2+1}$$

Решение. Разделяме полиномите на числителя и знаменателя, за да получим цялата част и остатъка:

$$2x^3-4x^2+3 : \left|\underline{x^2+1}\right. = 2x-4+\frac{-2x+7}{x^2+1}$$

$$\begin{array}{l} 2x^3+2x \\ \hline \quad -4x^2-2x+3 \\ \quad -4x^2-4 \\ \hline \qquad\quad -2x+7 \end{array}$$

Тук членът $2x-4$ е цялата част и $-2x+7$ е остатъкът.

По този начин получихме представянето на функцията с нейните доминиращи членове:

$$f(x)=\frac{2x^3-4x^2+3}{x^2+1}=2x-4+\frac{-2x+7}{x^2+1}.$$

Като имаме доминиращите членове, лесно е да забележим, че

- $f(x)\approx 2x-4$ за голямо x и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$

Допълнителна литература:

[1] **G. B. Thomas, M. D. Weir., J. Hass, F. R. Giordano,** ***Thomas' Calculus including second-order differential equations*****, 11 ed., Pearson Addison-Wesley, 2005.**

[2] **http://www.wolframalpha.com/**