Тема 14.

Векторно и смесено произведение на вектори

1. Векторно произведение на два вектора

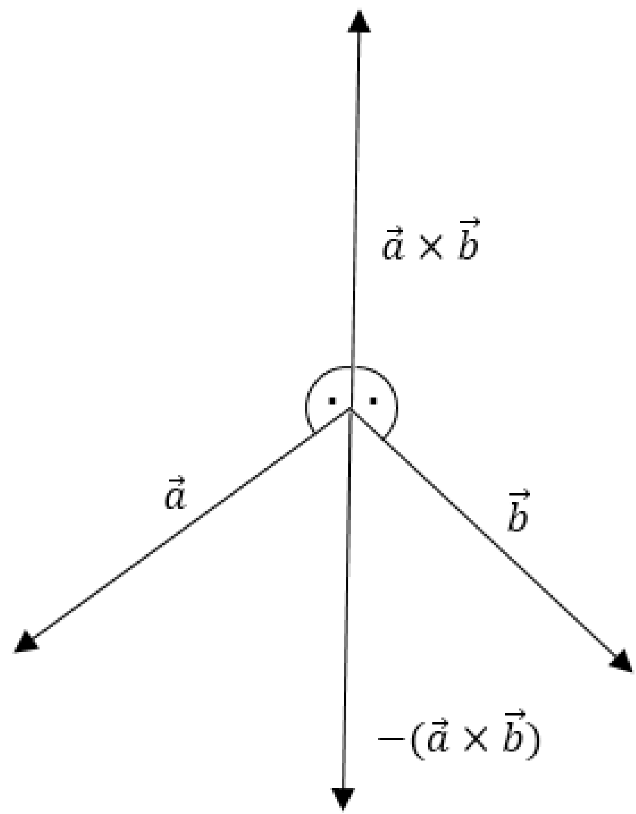
Нека E^3 е реално тримерно евклидово пространство, а $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ е дясна ортонормирана база на E^3.

Определение 14.1. Векторно произведение на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се нарича вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, за който:

1) Ако $\vec{a} = \vec{o}$ или $\vec{b} = \vec{o}$, или $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$.

2) Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно независими, то:

- $\vec{c}$ е ортогонален на $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. $\vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c} = 0$;
- $|\vec{c}| = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$;
- векторите $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ образуват дясна тройка, т. е. дясна база.


$\vec{a} \times \vec{b}$
$\vec{a}$
$\vec{b}$
$-(\vec{a} \times \vec{b})$

Тъй като за ортонормираната дясна база $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ е изпълнено $||\vec{e}_1|| = ||\vec{e}_1|| = ||\vec{e}_3|| = 1$ и $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$, то

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \qquad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \qquad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2.$$

Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно независими, то синусът на ъгъла между тях можем да получим от

$$\sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}.$$

Теорема 14.1. *Нека относно ортонормираната база* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *са дадени векторите* $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ *и* $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$. *Тогава координатите на векторното им произведение са*

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right),$$

т. е.

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1).$$

Доказателство. Ще докажем твърдението, като установим, че така дефинираният начин за получаване на $\vec{a} \times \vec{b}$ удовлетворява всички условия от Определение 14.1.
1) Ако $\vec{a} = \vec{o}$ или $\vec{b} = \vec{o}$, то съгласно свойствата на детерминантите и трите координати на $\vec{a} \times \vec{b}$ са нули, следователно $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$. Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни, отново от свойствата на детерминантите следва $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$.

2) Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно независими. Тогава пресмятаме скаларните произведения

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{a} = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0,$$
$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{b} = b_1(a_2b_3 - a_3b_2) + b_2(a_3b_1 - a_1b_3) + b_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0,$$

следователно $(\vec{a}\times\vec{b})$ е ортогонален на $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Повдигаме равенството $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ на квадрат и получаваме еквивалентното му равенство (*тъждество на Лагранж*)

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\left(1-\cos^2\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\right) \Longrightarrow \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - \left(\vec{a}\vec{b}\right)^2.$$

Тогава лесно се установява, че изразите

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2 = (a_2b_3-a_3b_2)^2 + (a_3b_1-a_1b_3)^2 + (a_1b_2-a_2b_1)^2,$$

$$\vec{a}^2\vec{b}^2 - \left(\vec{a}\vec{b}\right)^2 = (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2,$$

са равни.

Тъй като $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно независими, а $\vec{a}\times\vec{b}$ е ортогонален и на двата вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, следва, че трите вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a}\times\vec{b}$ са линейно независими, т. е. образуват база на E^3. Матрицата на прехода T от базата $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ към базата $(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b})$ има вида

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_2 & b_2 & a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_3 & b_3 & a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

Пресмятаме детерминантата на T, като я развиваме по третия стълб. Така получаваме

$$\det T = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 > 0.$$

следователно базата $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ е дясно ориентирана.

Следствие 14.1. *(Критерий за колинеарност) Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно зависими, точно когато $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$.*

Теорема 14.2. *Векторното произведение притежава следните свойства:*

1) $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$ *(антикомутативност)*;

2) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ *(диститбутивност)*;

3) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Произведение от вида $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ или $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ се нарича *двойно векторно произведение.* В сила са равенствата

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} = \vec{a}\vec{c}.\vec{b}-\vec{b}\vec{c}.\vec{a},$$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{a}\vec{c}.\vec{b}-\vec{a}\vec{b}.\vec{c}$$

и *тъждеството на Якоби*

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b} = \vec{o}.$$

Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са вектори в двумерно пространство, т. е. $\vec{a}(a_1, a_2)$ и $\vec{b}(b_1, b_2)$ спрямо ортонормирана база $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. За да изчислим векторното им произведение допълваме ортонормираната база до $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ в тримерно пространство. Спрямо нея имаме $\vec{a}(a_1, a_2, 0)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, 0)$. Тогава

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = (0, 0, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Пример 14.1. Нека относно ортонормирана база са дадени вектори

$$\begin{aligned}
&\vec{a}(1, \quad 2,\ 3),\\
&\vec{b}(-1, -2, 3),\\
&\vec{c}(1, 0, -2).
\end{aligned}$$

Изчислете $\vec{a} \times \vec{b}$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ и синуса на ъгъла между векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пресмятаме $(\vec{a} \times \vec{b}) = (12, -6, 0)$. Тогава $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{14}$ и $|\vec{a} \times \vec{b}| = 6\sqrt{5}$. Така получаваме

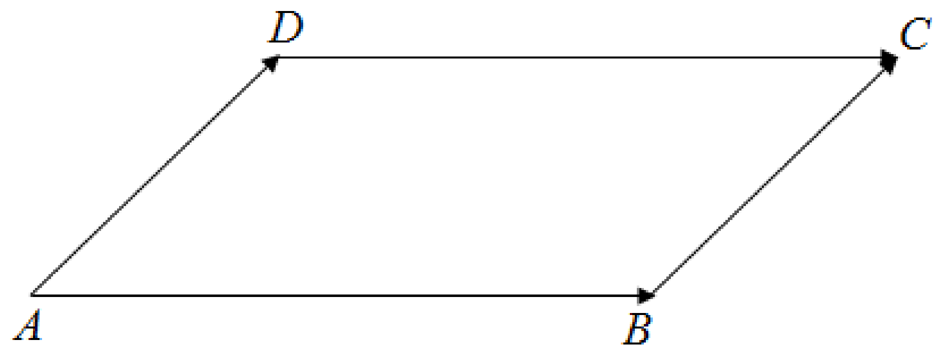
$$\sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3\sqrt{5}}{7}.$$

Имаме още $\left((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}\right) = (-12, -12, 6)$.

Геометричен смисъл на векторното произведение

Нека $ABCD$ е успоредник. Известно е, че лицето му S_{ABCD} може да бъде получено по формулата

$$S_{ABCD} = AB.AD.\sin\sphericalangle BAD.$$



Тогава следва, че

$$S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|.$$

Лицето на триъгълника ABC получаваме чрез

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|.$$

Още една формула за пресмятане на лице на триъгълник, но е в сила само за триъгълник в равнината Oxy.

Нека в Oxy е даден триъгълникът $\triangle\ ABC$ с върхове $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$. Пресмятаме следната детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тогава

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\Delta|.$$

Пример. В равнината Oxy относно декартова координатна система е даден $\triangle\ ABC$ с върхове $A(2,-2)$, $B(7,3)$ и $C(5,-1)$. Намерете лицето на $\triangle\ ABC$.

Намираме координатите на две насочени отсечки по две от страните на $\triangle\ ABC$, например $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ и ги записваме като вектори в тримерното пространство

$$\overrightarrow{AB}(5,5) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}(5,5,0)$$
$$\overrightarrow{AC}(3,1) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AC}(3,1,0).$$

Тогава пресмятаме

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0,0,-10).$$

Следователно $||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|| = 10$ и

$$S_{ABC} = \frac{||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}||}{2} = 5.$$

Пример 14.2. Намерете $x \in \mathbb{R}$ така, че за лицето S_{ABC} на триъгълника с върхове $A(1,2)$, $B(-1,4)$, $C(4,x)$ да е изпълнено $S_{ABC} = 5$.

Имаме $\overrightarrow{AB}(-2,2)$ и $\overrightarrow{AC}(3,x-2)$. Тогава

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}(0,0,-2x-2) \quad \Longrightarrow \quad |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |2x+2| = 2|x+1|.$$

За лицето на триъгълника пресмятаме $S_{ABC} = |x+1|$. Като решим модулното уравнение $|x+1| = 5$, получаваме $x_1 = 4$ и $x_2 = -6$.

2. Смесено произведение на три вектора

Определение 14.2. Числото

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \vec{c}$$

се нарича *смесено произведение* на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, взети в този ред.

Теорема 14.3. *Нека относно ортонормирана база* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *са дадени векторите* $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ *и* $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$. *Смесеното произведение* $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ *се получава по формулата*

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

От горната теорема следва, че смесеното произведение на три вектора се получава и по формулата

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\left(\vec{b} \times \vec{c}\right).$$

Следствие 14.2. *(Критерий за компланарност) Смесеното произведение на три вектора е равно на нула, точно когато векторите са компланарни.*

Смесеното произведение притежава следните свойства:

1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a};$

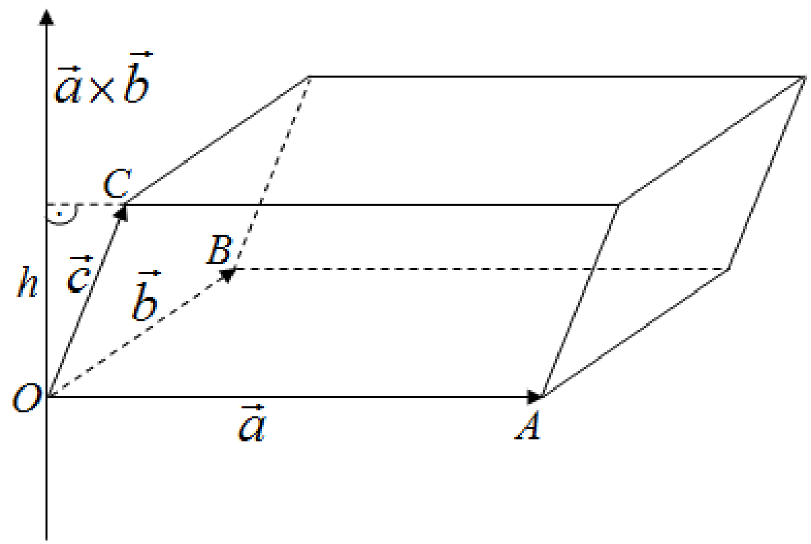
2) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\vec{c}\vec{d} = \vec{a}\vec{c}\vec{d} + \vec{b}\vec{c}\vec{d}, \quad \vec{a}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)\vec{d} = \vec{a}\vec{b}\vec{d} + \vec{a}\vec{c}\vec{d},$

$\vec{a}\vec{b}\left(\vec{c} + \vec{d}\right) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d};$

3) $(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(\lambda\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(\lambda\vec{c}) = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c}).$

Геометричен смисъл на смесеното произведение

Нека разгледаме паралелепипед с ръбове OA, OB и OC. Означаваме $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$.



Фиг. 14.1

Считаме успоредника със страни OA и OB за основа на паралелепипеда. Тогава лицето на основата е $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Нека h е дължината на височината на паралелепипеда към основата, която разглеждаме. Ако $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ е дясна база, то $h = \operatorname{proj}_{(\vec{a}\times\vec{b})}\vec{c}$ (фиг. 14.1), а ако тази база е лява, то $h = -\operatorname{proj}_{(\vec{a}\times\vec{b})}\vec{c}$. Като си припомним, че $\vec{x}\vec{y} = |\vec{x}|\operatorname{proj}_{\vec{x}}\vec{y}$, то за двата случая обемът на паралелепипеда е съответно:

$$V_p = Sh = |\vec{a}\times\vec{b}|\operatorname{proj}_{(\vec{a}\times\vec{b})}\vec{c} = |\vec{a}\times\vec{b}|\frac{(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}}{|\vec{a}\times\vec{b}|} = \vec{a}\vec{b}\vec{c},$$

ако $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ е дясна база;

$$V_p = Sh = |\vec{a}\times\vec{b}|(-\operatorname{proj}_{(\vec{a}\times\vec{b})}\vec{c}) = -|\vec{a}\times\vec{b}|\frac{(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}}{|\vec{a}\times\vec{b}|} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c},$$

ако $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ е лява база.

Така за обема на паралелепипед, образуван от векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, е в сила формулата

$$V_p = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

Ако в горната формула липсва модулът, то получаваме ориентирания обем на паралелепипеда.

За обема на тетраедъра $OABC$ е в сила

$$V_t = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

Пример 14.3. Намерете обема на тетраедъра с върхове: $A(1,0,-1)$, $B(2,4,1)$, $C(0,1,1)$ и $D(-1,2,0)$.

Намираме координатите на три вектора с общо начало, например:

$$\overrightarrow{AB}(1,4,2), \quad \overrightarrow{AC}(-1,1,2), \quad \overrightarrow{AD}(-2,2,1).$$

Трябва да пресметнем тяхното смесено произведение, т. е. детерминантата

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -15.$$

Тогава $V_{ABCD} = \frac{5}{2}$.

Използвана литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.

2. L. Hogben, *Handbook of linear algebra*, CRC, 2007.

3. D. C. Lay, *Linear algebra and its applications*, University of Maryland.

4. C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM.

5. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 3rd ed., MIT, 1988.