Лекция 1

§1. Числови редове

1. Определения и примери. Абсолютна и условна сходимост. Числовите редове представляват безкрайни суми

(1.1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots .$

Величината u_n се нарича ***общ член*** на реда. Сумирането в (1.1) започва от $n = 1$, но по целесъобразност може да започне и от друг индекс. Крайните суми

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

се наричат ***частични суми*** на реда. Например реда с общ член $u_n = \frac{1}{2^n}$

(1.2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

има частични суми

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} .$$

За този ред имаме

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

и по тази причина естествено е да приемем, че реда (1.2) има сума, равна на 1, която се явява граница на частичните суми на реда (1.2).

Определение 1.1. Нека редицата от частичните суми $\{s_n\}$ на реда (1.1) е сходяща и клони към границата s $(s \neq \pm\infty)$,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s .$$

В този случай се казва, че редът (1.1) е ***сходящ*** и има сума s,

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

Ако редицата $\{s_n\}$ е разходяща или нейната граница е $\pm\infty$, то редът (1.1) се нарича ***разходящ***. ■

Например редът (1.2) е сходящ и има сума $s = 1$, понеже $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$. По същия начин се установява, че ако общият член на един ред се получава от геометрична прогресия с първи член a и частно q, $u_n = aq^n$, то редът

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n + \cdots$$

е сходящ, когато $|q| < 1$ и разходящ, когато $|q| \geq 1$. В този случай частичните суми имат вида

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n = a\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^n\right) = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q} ,$$

следователно при $|q| < 1$ имаме $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

Понятието ред, разглеждано като безкрайна сума и в този смисъл като непосредствено обобщение на крайните суми, има принципно значение за цялата математика. Могат да бъдат определели редове чиито общ член не е число, например редове от матрици. При всички случаи обаче сумата на един ред се определя като граница от неговите частични суми независимо от конкретната природа на реда.

Твърдение 1.1. Нека редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ. Тогава неговият общ член клони към нула, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Доказателство. Нека s е сумата на реда. По определение

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(u_1 + u_2 + \cdots + u_n\right) = s,$$

следователно

$$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}\right) = s.$$

Сега от свойствата на сходящите редици намираме

$$\lim_{n\to\infty}\left(s_n - s_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} u_n = s - s = 0,$$

което доказва твърдението. ■

От твърдение 1.1 следва, че ако общият член на един ред не клони към нула, то редът обезателно е разходящ. Например редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+3}$$

е разходящ понеже за неговия общ член имаме

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Да отбележим специално, че ако общият член на даден ред клони към нула, то в общия случай само от това не следва, че редът е сходящ.

Съгласно критерия на Коши, една редица $\{s_n\}$ е сходяща тогава и само тогава, когато е фундаментална, т.е. тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери някакво n_0, за което $\left|s_{n+p} - s_n\right| < \varepsilon$, при всяко $n > n_0$ и всяко естествено p. От тук веднага се получава верността на

Твърдение 1.2 (*Коши*). Редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ тогава и само тогава, когато редицата от частичните суми $\{s_n\}$ е фундаментална, т.е. тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува n_0 такова, че

$$\left|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}\right| < \varepsilon,$$

при всяко $n > n_0$ и всяко естествено $p \in \mathrm{N}$.

Доказателство. За доказателство е достатъчно да отбележим, че в този случай

$$\left|s_{n+p} - s_n\right| = \left|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}\right|,$$

след което да приложим критерия на Коши. ■

Например за реда (1.2) имаме

$$\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right|=\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}=$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{p-1}}\right)=\frac{1}{2^{n}}\left(1-\frac{1}{2^{p}}\right)<\frac{1}{2^{n}}$$

Да изберем едно $\varepsilon>0$, след което да фиксираме някакво естествено n_0, за което $\frac{1}{2^{n_0}}<\varepsilon$. Тогава при всяко $n>n_0$ и всяко естествено p е изпълнено

$$\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right|<\frac{1}{2^{n}}<\frac{1}{2^{n_0}}<\varepsilon .$$

Твърдение (1.2) позволява бързо да установим, че хармоничният ред

$$(1.3)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

е ***разходящ***. В този случай

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

и

$$(1.4)\qquad s_{2n}-s_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Да допуснем противното, че редът (1.3) е сходящ и да изберем едно $\varepsilon_0>0$, за което $\varepsilon_0<\frac{1}{2}$. Тогава според твърдение 1.2 може да се намери n_0 такова, че $\left|s_{n+p}-s_n\right|<\varepsilon_0$, при всяко $n>n_0$ и всяко естествено p, в частност и при $p=n$, откъдето се получава, че

$$\left|s_{2n}-s_n\right|<\varepsilon_0<\frac{1}{2},$$

при всяко $n>n_0$, което противоречи на неравенството (1.4). Достигнатото противоречие показва, че хармоничният ред (1.3) е разходящ. Този пример показва конкретно как в един ред общият член може да клони към нула, но въпреки това редът да бъде разходящ.

Определение 1.2. Редът $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ се нарича ***абсолютно сходящ***, когато е сходящ редът с общ член $\left|u_n\right|$, т.е. когато е сходящ редът с положителни (неотрицателни) членове $\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|$. Ако един ред е сходящ, но не е абсолютно сходящ, то той се нарича ***условно сходящ***. ■

Следващото твърдение показва очаквания факт, че ако един ред е абсолютно сходящ, то той е и сходящ.

Твърдение 1.3. Нека редът $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ е абсолютно сходящ. Тогава $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ е сходящ.

Доказателство. Да изберем едно $\varepsilon>0$. По условие редът е абсолютно сходящ, което означава, че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|$$

е сходящ, следователно съществува n_0 такова, че

$$\left\| u_{n+1} \right| + \left| u_{n+2} \right| + \cdots + \left| u_{n+p} \right\| = \left| u_{n+1} \right| + \left| u_{n+2} \right| + \cdots + \left| u_{n+p} \right| < \varepsilon,$$

при всяко $n > n_0$ и $p \in \mathrm{N}$. Сега от основното неравенство за модула имаме

$$\left| s_{n+p} - s_n \right| = \left| u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} \right| \le \left| u_{n+1} \right| + \left| u_{n+2} \right| + \cdots + \left| u_{n+p} \right| < \varepsilon,$$

което означава, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ удовлетворява условието Коши за сходимост от твърдение 1.2. ■

От направените определения веднага се установява, че сходимостта на един ред (абсолютна или условна) не се променя, ако променим първите няколко (краен брой) негови членове. Освен това от свойствата на сходящите редици следва, че сходящите редове могат да се събират и умножават с число.

Твърдение 1.4. Нека редовете $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ са сходящи със суми съответно s_U и s_V. Тогава редът с общ член $u_n + v_n$ е сходящ и има сума $s_U + s_V$. Освен това редът с общ член λu_n също е сходящ и има сума λs_U, където λ е константа. ■

Ако и двата реда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ са абсолютно сходящи, то и тяхната почленна сума $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ също е абсолютно сходящ ред.

Както ще се убедим по-нататък, основните трудности при изследването за сходимост на даден ред са свързани с поведението на знака на неговия общ член. Един интересен критерий за сходимост в този смисъл представлява критерият на Лайбниц.

Теорема 1.1 (***Лайбниц***). Нека редицата $\{u_n\}$ е монотонно намаляваща и клоняща към нула, т.е. $0 \le u_{n+1} \le u_n$ и $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Тогава редът с алтернативно променящи се знаци на общия член (алтернативен ред)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots$$

е сходящ.

Доказателство. Да разгледаме частичните суми

$$s_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} \text{ и } s_{2n+1} = u_1 - u_2 + u_3 - \cdots - u_{2n} + u_{2n+1}.$$

От последното веднага се получава, че $s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1}$, следователно $s_{2n} \le s_{2n+1}$. От друга страна редицата $\{s_{2n+1}\}$ е ограничена отгоре, понеже

$$s_{2n+1} = u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{2n} - u_{2n+1}) \le u_1,$$

следователно редицата $\{s_{2n}\}$ също е ограничена отгоре. Имаме

$$s_{2n+2} = s_{2n} + (u_{2n+1} - u_{2n+2}) \ge s_{2n},$$

следователно редицата $\{s_{2n}\}$ е монотонно растяща. По този начин получихме, че редицата $\{s_{2n}\}$ е монотонно растяща и ограничена отгоре, което показва, че $\{s_{2n}\}$ е сходяща, $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s$. Освен това

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n} + u_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = s + 0 = s,$$

което доказва напълно теоремата. ■

Съгласно критерият на Лайбниц, алтернативният хармоничен ред

(1.5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$

е сходящ. От друга страна (1.5) не е абсолютно сходящ, понеже неговата абсолютна сходимост означава сходимост на хармоничния ред (1.3), за който вече установихме, че е разходящ. По този начин (1.5) представлява пример за ***условно сходящ*** ред, т.е. за ред който е сходящ но не се явява абсолютно сходящ.

Абсолютната сходимост гарантира, че свойствата на безкрайната сума са аналогични на крайните суми, както добре се вижда от следната

Теорема 1.2 (***Комутативен закон за абсолютно сходящи редове***). Нека редът $s=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ е абсолютно сходящ и нека редът $\sum_{i=1}^{n}u'_n$ е получен от него след произволно разместване на неговите членове. Тогава редът $\sum_{i=1}^{n}u'_n$ също е абсолютно сходящ, при което неговата сума остава равна на s. ■

Разместването на събираемите в един абсолютно сходящ ред не променя нито неговата абсолютна сходимост нито неговата сума. При условно сходящите редове ситуацията е напълно различна. Нека $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ е условно сходящ ред и a е някакво произволно избрано число (или $a=\pm\infty$). Тогава членовете на реда могат да се разместят по такъв начин, че новият ред да има сума, равна на a.

Самите редове представляват първично средство в математиката за представяне на различни величини и по тази причина намирането на сумата на даден ред в някакъв съкратен вид се явява в общия случай безпредметна задача, което не изключва възможността в отделни случаи тази сума да представлява интерес както от практическа така и от теоретическа гледна точка. Например, в сила е равенството

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots,$$

което може да послужи за приблизително пресмятане стойността на константата π.

2. Редове с положителни членове. Критерии за сходимост. Да разгледаме реда (1.1), за който се предполага, че $u_n\geq 0$, $n=1,2,3,\ldots$. Тогава редицата от неговите частични суми е монотонно растяща, понеже

$$s_{n+1}=s_n+u_{n+1}\geq s_n.$$

Една монотонно растяща редица или е сходяща или дивергира към ∞, при което сходимостта е налице тогава и само тогава, когато редицата е ограничена отгоре. Следователно един ред с положителни членове $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ винаги има сума s, но е сходящ само когато $s<\infty$.

Сумата на хармоничния ред е ∞, понеже той има положителни членове и се явява разходящ. Всъщност частичните суми на хармоничния ред клонят към безкрайност от порядъка на $\ln n$. Даже при $n=10^{30}$, което е твърде голямо число, имаме $\ln n\approx 70$, което показва, че на практика (в изчислителен план) хармоничният ред се държи като сходящ.

В този раздел ще се занимаваме с въпроса за сходимостта на редове с положителни членове. Получените критерии могат да се отнесат непосредствено и към редове с отрицателни членове, понеже всеки ред с отрицателни членове може да се превърне в ред с положителни членове след умножение с константата -1. При изследване въпросите за сходимостта, условието за положителност а общия член не е необходимо да се налага за всичките членове на реда, а само от известно място нататък. С други думи, получените по-нататък в настоящия раздел критерии за сходимост, по същество се отнасят за всички редове, за които от известно място нататък общия член не си сменя знака, т.е. за редове с просто поведение на знака на общия член.

Един ред с положителни членове е сходящ точно когато е абсолютно сходящ. Последното очевидно е вярно и за редове с отрицателни членове. От направените разсъждения веднага се получава верността на

Твърдение 1.5. Редът с положителни членове $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е сходящ тогава и само тогава, когато редицата от частични суми $\{s_n\}$ е ограничена отгоре. ■

Горното твърдение е в основата на доказателството на

Теорема 1.3 (***Принцип за сравняване на редове***). Нека е изпълнено условието $0 \le u_n \le v_n$, $n = 1,2,3,\ldots$. Тогава ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ е сходящ, то редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ също е сходящ и следователно, ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е разходящ, то редът $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ също е разходящ.

Доказателство. Доказателството следва от факта, че за частичните суми на двата реда е изпълнено неравенството $s_n^U \le s_n^V$. Нека редът $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ е сходящ. Тогава редицата от частичните суми $\{s_n^V\}$ е ограничена отгоре, следователно редицата от частичните суми $\{s_n^U\}$ също е ограничена отгоре, което пък означава, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ също е сходящ. ■

В този случай казваме, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ***мажорира*** реда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Верността на теорема 1.3 се запазва, ако условието за наредбата между двата общи члена се нарушава за първите няколко краен брой индекси. Достатъчно е да поискаме неравенството $0 \le u_n \le v_n$ да бъде изпълнено от известно място нататък, т.е. да съществува някакво n_0 (евентуално много голямо) такова, че $0 \le u_n \le v_n$ при всички стойности на индекса n, за които $n > n_0$. Аналогична забележка е валидна и при другите критерии за сходимост на редове.

Вече знаем, че сумата на геометричната прогресия $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ представлява сходящ ред, ако за частното q е изпълнено $|q| < 1$ и представлява разходящ ред ако $|q| \ge 1$, при което в последния случай общият член на реда aq^n не клони към нула при $n \to \infty$. Следващите теорема се основава на сравняване изходния ред с геометрична прогресия.

Теорема 1.4 (*критерий на Коши*). Нека $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е ред с положителни членове, $u_n > 0$, и нека съществува границата

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l .$$

Тогава ако $l < 1$, то редът е сходящ и ако $l > 1$, то редът е разходящ. Ако $l = 1$, то редът може да се случи както сходящ, така и разходящ.

Доказателство. Доказателството се основава на сравняване на реда спрямо геометрична прогресия. Нека съществува границата $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$ и $l<1$. Нека q е число, за което $l<q<1$ и да положим $\varepsilon=q-l$. Тогава $(l-\varepsilon,l+\varepsilon)=(2l-q,q)$ е една ε-околност на границата l и следователно може да се намери някакво n_0 такова, че $\sqrt[n]{u_n}\in(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$, за всяко $n>n_0$. Това означава, че $\sqrt[n]{u_n}<l+\varepsilon=q$ при $n>n_0$, следователно $u_n<q^n$ при $n>n_0$. Тук редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ се мажорира от сходяща геометрична прогресия и следователно е сходящ съгласно теорема 1.3, понеже по условие $q<1$. Да предположим сега, че съществува границата $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$ и $l>1$. Нека q е число, за което $1<q<l$ и да положим $\varepsilon=l-q$. Тогава $(l-\varepsilon,l+\varepsilon)=(q,2l-q)$ е една ε-околност на границата l и следователно може да се намери някакво n_0 такова, че $\sqrt[n]{u_n}\in(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$, за всяко $n>n_0$. Това означава, че $\sqrt[n]{u_n}>l-\varepsilon=q$ при $n>n_0$, следователно $u_n>q^n$ при $n>n_0$. По условие обаче $q>1$, следователно $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\infty$, откъдето намираме, че $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\infty$. В този случай редът не може да бъде сходящ, понеже неговият общ член не клони към нула. ■

Теорема 1.5 (*критерий на Даламбер*). Нека $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ е ред с положителни членове, $u_n>0$, и нека съществува границата

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l.$$

Тогава ако $l<1$, то редът е сходящ и ако $l>1$, то редът е разходящ. Ако $l=1$, то редът може да се случи както сходящ, така и разходящ.

Доказателство. И тук доказателството се основава на сравняване спрямо геометрична прогресия. Нека съществува границата $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$ и $l<1$. Нека q е число, за което $l<q<1$ и да положим $\varepsilon=q-l$. Тогава $(l-\varepsilon,l+\varepsilon)=(2l-q,q)$ е една ε-околност на границата l и следователно може да се намери някакво n_0 такова, че $\frac{u_{n+1}}{u_n}\in(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$, за всяко $n\geq n_0$, следователно $\frac{u_{n+1}}{u_n}<q$ при $n\geq n_0$. Имаме

$$\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}}<q,$$

$$\frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}}<q,$$

$$\frac{u_{n_0+3}}{u_{n_0+2}}<q,$$

$$\ldots$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<q.$$

Умножавайки последните неравенства почленно, след съкращаване на равните множители, намираме

$$\frac{u_{n+1}}{u_{n_0}} < q^{n-n_0},$$

следователно $u_{n+1} < \left(u_{n_0} q^{-n_0-1}\right) q^{n+1}$ при $n \geq n_0$. Тук редът отново се мажорира от сходяща геометрична прогресия, което доказва тази част на твърдението.

Да предположим сега, че съществува границата $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ и $l > 1$. Нека q е число, за което $1 < q < l$ и да положим $\varepsilon = l - q$. Тогава $(l-\varepsilon, l+\varepsilon) = (q, 2l-q)$ е една ε-околност на границата l и следователно може да се намери някакво n_0 такова, че $\frac{u_{n+1}}{u_n} \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, за всяко $n \geq n_0$, следователно $\frac{u_{n+1}}{u_n} > q$ при $n \geq n_0$. Разсъждавайки както в предишния случай намираме, че $u_{n+1} > \left(u_{n_0} q^{-n_0-1}\right) q^{n+1}$ при $n \geq n_0$. По условие обаче $q > 1$, следователно $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, откъдето намираме, че $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$. В този случай редът не може да бъде сходящ, понеже неговият общ член не клони към нула. ■

Например редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

е сходящ по критерия на Коши, понеже в този случай

$$u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n, \ \sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{2n+1} \text{ и } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

е сходящ по критерия на Даламбер, понеже в този случай

$$u_n = \frac{n}{3^n}, \ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3}\frac{n+1}{n} \text{ и } \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{3} < 1.$$

Следващия критерий представлява уточнение на критерия на Даламбер.

Теорема 1.6 (*критерий на Дюамел*). Нека $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ е ред с положителни членове, $u_n > 0$, и нека съществува границата

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = l.$$

Тогава ако $l > 1$, то редът е сходящ и ако $l < 1$, то редът е разходящ. Ако $l = 1$, то редът може да се случи както сходящ, така и разходящ.

Доказателство. Да положим

$$\alpha_n = n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right).$$

Нека съществува границата $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = l$ и $l > 1$. Нека q е число, за което $1 < q < l$ и да положим $\varepsilon = l - q$. Тогава $(l-\varepsilon, l+\varepsilon) = (q, 2l-q)$ е една ε-околност на границата l и следователно може да се намери някакво n_0 такова, че $\alpha_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, за всяко $n \geq n_0$, следователно $\alpha_n > q$ при $n \geq n_0$. От последното веднага получаваме

$$nu_n - (n+1)u_{n+1} > (q-1)u_{n+1},\ n \geq n_0.$$

Имаме последователно

$$n_0 u_{n_0} - (n_0+1)u_{n_0+1} > (q-1)u_{n_0+1},$$
$$(n_0+1)u_{n_0+1} - (n_0+3)u_{n_0+2} > (q-1)u_{n_0+2},$$
$$(n_0+2)u_{n_0+2} - (n_0+3)u_{n_0+3} > (q-1)u_{n_0+3},$$
$$\ldots$$
$$nu_{n-1} - (n+1)u_{n+1} > (q-1)u_{n+1}.$$

Събирайки почленно горните получаваме

$$n_0 u_{n_0+1} - (n+1)u_{n+1} > (1-q)\left[u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + u_{n_0+3} + \cdots + u_{n+1}\right],$$

откъдето, отчитайки факта, че $nu_n > 0$ и $q > 1$, получаваме

$$u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + u_{n_0+3} + \cdots + u_{n+1} < \frac{n_0 u_{n_0}}{q-1},$$

следователно за частичните суми на реда е в сила неравенството

$$s_{n+1} = s_{n_0} + \left(u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + u_{n_0+3} + \cdots + u_{n+1}\right) < s_{n_0} + \frac{n_0 u_{n_0}}{q-1},\ n \geq n_0.$$

Последното показва, че редицата от частичните суми $\{s_n\}$ е ограничена отгоре, следователно редът е сходящ.

Да предположим сега, че съществува границата $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = l$ и $l < 1$. Нека q е число, за което $l < q < 1$ и да положим $\varepsilon = q - l$. Тогава $(l-\varepsilon, l+\varepsilon) = (2l-q, q)$ е една ε-околност на границата l и следователно може да се намери някакво n_0 такова, че $\alpha_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, за всяко $n \geq n_0$, следователно $\alpha_n < q$ при $n \geq n_0$. От последното веднага получаваме $nu_n - (n+1)u_{n+1} < 0$, $n \geq n_0$. Сега разсъждавайки както в преди получаваме неравенството $n_0 u_{n_0} - (n+1)u_{n+1} < 0$ при $n \geq n_0$. Последното показва, че

$$u_{n+1} > \left(n_0 u_{n_0}\right)\frac{1}{n+1},\ n \geq n_0,$$

което означава, че редът се ограничава отдолу от разходящия ред $const\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и се явява разходящ съгласно принципа за сравняване на редове. ■

Например да изследваме за сходимост реда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Тук имаме

$$u_n = \frac{1}{n^2},\ n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = n\frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2} = \frac{2n+1}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n} = 2 > 1,$$

следователно редът е сходящ по критерия на Дюамел.

Особено значение при сходимостта на редове с положителни членове има признака за сходимост на Коши. Да припомним, че ако неотрицателната функция $f(x)$

е определена и непрекъсната в интервала $[a,\infty)$, то несобственият интеграл от $f(x)$ в граници от a до ∞ се определя като границата

(1.6) $$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^n f(x)dx,$$

когато съществува. В този случай интегралът се нарича сходящ. Понеже редицата $\left\{\int_a^n f(x)dx\right\}$ е монотонно растяща, то границата в (1.6) винаги съществува, но в общия случай може да приема стойност ∞. Интегралът е сходящ точно когато въпросната граница не е ∞, т.е. тогава и само тогава, когато редицата е ограничена отгоре.

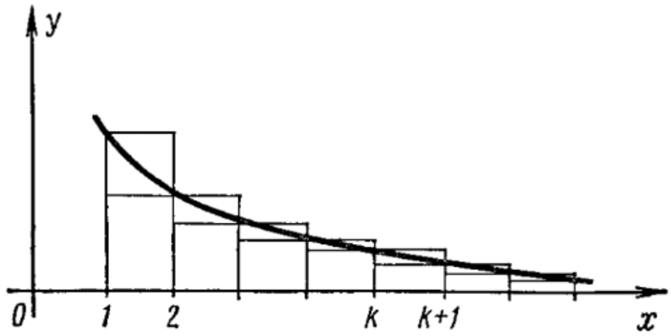
Теорема 1.7 (***интегрален критерий на Коши***). Нека $f(x):[1,\infty)\to \mathrm{R}$ е неотрицателна и монотонно намаляваща непрекъсната функция. Тогава редът

$$\sum_{n=1}^\infty f(n)$$

е сходящ тогава и само тогава, когато е сходящ несобственият интеграл

$$\int_1^\infty f(x)dx.$$

Доказателство. Доказателството се получава лесно следвайки геометричната интерпретация на определения интеграл (фиг. 1.1).



Фиг. 1.1.

Понеже функцията $f(x)$ е монотонно намаляваща, за всяко естествено число k имаме $f(k+1)\le f(x)\le f(k)$, $x\in[k,k+1]$ от което след интегриране в интервала $[k,k+1]$ получаваме

$$f(k+1)\le \int_k^{k+1} f(x)dx \le f(k).$$

Сумирайки последното за $k=1,2,\ldots,n$ намираме

$$\sum_{k=1}^n f(k+1)\le \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x)dx \le \sum_{k=1}^n f(k),$$

откъдето отчитайки адитивното свойство на интеграла получаваме

(1.7) $$s_{n+1} - f(1)\le \int_1^{n+1} f(x)dx \le s_n,$$

където $s_n = f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$ са частичните суми на дадения ред.

Нека редът $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ е сходящ. Тогава неговите частични суми $\{s_n\}$ образуват ограничена редица и следователно редицата $\left\{\int_1^n f(x)dx\right\}$ също е ограничена отгоре, което води след себе си сходимост на несобствения интеграл. Да предположим сега, че несобственият интеграл е сходящ. Това е еквивалентно на ограниченост на редицата $\left\{\int_1^n f(x)dx\right\}$, което пък от своя страна въз основа на (1.7) води до ограниченост на редицата от частичните суми $\{s_n\}$, а последното означава, че даденият ред е сходящ. ■

Да разгледаме например реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Тук общият член на реда се поражда от функцията $f(x) = \frac{1}{x^3}$, която удовлетворява условията на теорема 1.7. Имаме

$$\int_1^n f(x)dx = \int_1^n \frac{dx}{x^3} = \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Bigg|_1^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2},$$

следователно

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2} < \infty,$$

което означава, че несобственият интеграл е сходящ, което пък от своя страна съгласно интегралния критерий на Коши показва, че редът също е сходящ.

Теорема 1.7 открива лесна възможност за изследване сходимостта на обобщения хармоничен ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}},\ \alpha > 0. \tag{1.8}$$

Тук случаят $\alpha \le 0$ не е интересен понеже тогава редът (1.8) е очевидно разходящ поради факта, че неговият общ член $u_n = n^{-\alpha}$ не клони към нула. При $\alpha > 0$ функцията $f(x) = x^{-\alpha}$, която поражда общия член на реда, удовлетворява условията на теорема 1.7, следователно редът (1.8) е сходящ тогава и само тогава, когато е сходящ несобственият интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}.$$

При $\alpha \ne 1$ имаме

$$\int_1^n \frac{dx}{x^{\alpha}} = \left(-\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}\right)\Bigg|_1^n = \frac{1}{(\alpha-1)}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right),$$

а при $\alpha = 1$,

$$\int_1^n \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^n = \ln n,$$

следователно

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{dx}{x^\alpha}=\begin{cases}\frac{1}{\alpha}\ \text{за}\ \alpha>1\\ \infty\ \text{за}\ \alpha=1\\ \infty\ \text{за}\ \alpha<1\end{cases}$$

Последното заедно с теорема 1.7 показва, че обобщеният хармоничен ред (1.8) е сходящ тогава и само тогава, когато $\alpha>1$.

Например редът

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

е разходящ, понеже в този случай имаме $\alpha=\frac{1}{2}<1$.

Всеки критерий за сходимост на ред с положителни членове автоматично работи и като критерий за абсолютна сходимост на ред с произволни знаци на членовете. Например да изследваме за сходимост реда

(1.9) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha n}{n^2},$$

където α е реален параметър. За общия член на този ред е в сила оценката

$$\left|\frac{\sin\alpha n}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2},$$

следователно редът

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin\alpha n}{n^2}\right|$$

се мажорира от сходящия ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Последното показва, че редът (1.9) е абсолютно сходящ при всяка стойност на параметъра α.

Два абсолютно сходящи реда $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty}v_n$ могат да се умножават ***конволюционно***, при което се получава отново абсолютно сходящ ред $\sum_{n=0}^{\infty}w_n$ с общ член

$$w_n=\sum_{k=0}^{n}u_k v_{n-k}=u_0v_n+u_1v_{n-1}+u_2v_{n-2}+\cdots+u_{n-1}v_1+u_nv_0.$$