Понятие за частна производна на функция на много променливи

Нека е дадена функция на няколко променливи:

Напр. функция на две независими променливи: $y = f(x, y)$

Функция на три независими променливи: $y = f(x, y, z)$ и т.н.

Определение 3.2.

Ако е дадена функцията $f(x, y)$, $(x, y) \in D \subset R^2$, то частна производна относно x на функцията $f(x, y)$ в точката $(x_0, y_0) \in D$ се нарича границата

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$, където $\Delta x = x - x_0$,

ако тази граница съществува. Т.е. частната производна е обикновена производна при фиксирани стойности на другите независими променливи, в случая при фиксирано $y = y_0 \in D$.

Аналогично се дефинира частна производна относно y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$, при фиксирано $x = x_0 \in D$.

Втори частни производни са производни от първите относно една независима променлива и съответно фиксирани останалите променливи (ако съответните граници съществуват).

Напр. втора частна производна само по x е:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \Delta x, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Напр. втора частна производна (смесена производна) по y спрямо първа производна по x е:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

<u>Пример 7.</u> Да се пресметнат всички първи частни производни на следните функции:

А) $f = x^5 - 3xy + 8\sqrt{y}$

Б) $f = \dfrac{3+x}{4y^2+1}$

Решение:

А) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \left(x^5 - 3xy + 8\sqrt{y}\right)'_x = 5x^4 - 3y$, (y се счита за константа).

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \left(x^5 - 3xy + 8\sqrt{y}\right)'_y = -3x + \dfrac{4}{\sqrt{y}}$, (x е константа).