Задача 1. Да се намерят първите частни производни на функцията:

$$f(x, y) = 5x^2y - xe^y.$$

Решение. За да определим частната производна на $f(x, y)$, последователно пресмятаме:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \left(5x^2y - xe^y\right)'_x \\ &= \left(5x^2y\right)'_x - \left(xe^y\right)'_x \\ &= 5\left(x^2\right)'_x y - (x)'_x e^y \\ &= 5\,2x\,y - e^y = 10xy - e^y. \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\begin{aligned} f'_y(x, y) &= \left(5x^2y - xe^y\right)'_y \\ &= \left(5x^2y\right)'_y - \left(xe^y\right)'_y \\ &= 5x^2\,(y)'_y - x\left(e^y\right)'_x \\ &= 5x^2 - xe^y. \end{aligned}$$

□

Пример 1.11. Нека $f(x, y) = \sqrt{xy}$. Да се пресметнат първите частни производни на $f(x, y)$ в точката $(1, 4)$.

Решение. Първо определяме частните производни на функцията $f(x, y)$ относно x и y съответно:

$$f'_x(x, y) = \left(\sqrt{xy}\right)'_x = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}},$$

$$f'_y(x, y) = \left(\sqrt{xy}\right)'_y = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}},$$

Стойностите на функциите $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в точката $(1, 4)$ са:

$$f'_x(1, 4) = \frac{\sqrt{4}}{2\sqrt{1}} = 1, \quad f'_y(1, 4) = \frac{\sqrt{1}}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

□

Пример 1.12. Дадена е функцията $f(x,y) = x^2y - e^{-y}$. Да се изчисли $f''_{x^2}(1,2)$, $f''_{xy}(1,2)$, $f''_{yx}(1,2)$ и $f''_{y^2}(1,2)$.

Решение. Първо определяме първите частни производни $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ на $f(x,y)$:

$$
\begin{aligned}
f'_x(x,y) =& 2xy,\\
f'_y(x,y) =& x^2 + e^{-y}.
\end{aligned}
$$

Намираме вторите частни производни:

$$
\begin{aligned}
f''_{x^2}(x,y) =& 2y,\\
f''_{xy}(x,y) =& 2x,\\
f''_{y^2}(x,y) =& -e^{-y}.
\end{aligned}
$$

Следователно

$$
\begin{aligned}
f''_{x^2}(1,2) =& 4,\\
f''_{xy}(1,2) =& 2,\\
f''_{y^2}(1,2) =& -e^{-1}.
\end{aligned}
$$

Нека отбележим, че не е необходимо да пресмятаме $f''_{yx}(x,y)$. Наистина от теоремата за равенство на вторите смесени частни производни, теорема 1.6, следва, че $f''_{yx}(x,y) = f''_{xy}(x,y)$. В частност $f''_{yx}(1,2) = 2$. $\square$

Пример 1.19. Нека $f(x,y) = x^5 + 2xy - y^3$, където $x(t) = t^3$ и $y(t) = 2t$. Да се намери производната на функцията f относно t.

Решение. Очевидно:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= 5x^4 + 2y, & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 2x - 3y^2,\\
\frac{dx}{dt} &= 3t^2, & \frac{dy}{dt} &= 2.
\end{aligned}
$$

Заместваме в (1.2):

$$
\begin{aligned}
\frac{df(t)}{dt} =& \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy(t)}{dt}\\
=& \left(5x^4 + 2y\right)3t^2 + \left(2x - 3y^2\right)2\\
=& 15t^2x^4 + 6t^2y + 4x - 6y^2\\
=& 15t^{14} + 16t^3 - 24t^2.
\end{aligned}
$$

Ще отбележим, че в последното равенство заместихме x и y с техните равни: t^3 и $2t$.

Задачата може да се реши и чрез директно заместване на функциите $x = x(t)$ и $y = y(t)$ в функцията $f(x, y)$:

$$\begin{aligned} f(x(t), y(t)) &= \left(t^3\right)^5 + 2\left(t^3\right)(2t) - (2t)^3 \\ &= t^{15} + 4t^4 - 8t^3. \end{aligned}$$

Следователно

$$\frac{df(t)}{dt} = 15t^{14} + 16t^3 - 24t^2. \qquad \square$$

Пример 1.20. Нека $f(x, y) = x^2y^3 + y^2 - 2x$, където $x(t) = \ln t$ и $y(t) = t^2$. Да се намери производната на функцията $f(x(t), y(t))$ относно t.

Решение. Прилагаме формула (1.2):

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\frac{dy(t)}{dt} \\ &= \left(2xy^3 - 2\right)\frac{1}{t} + \left(3x^2y^2 + 2y\right)2t \\ &= \left(2t^6 \ln t - 2\right)\frac{1}{t} + \left(3t^4 \ln^2 t + 2t\right)2t \\ &= 2\frac{\left(t^6 \ln t - 1 + 3t^6 \ln^2 t + 2t^3\right)}{t}. \end{aligned} \qquad \square$$