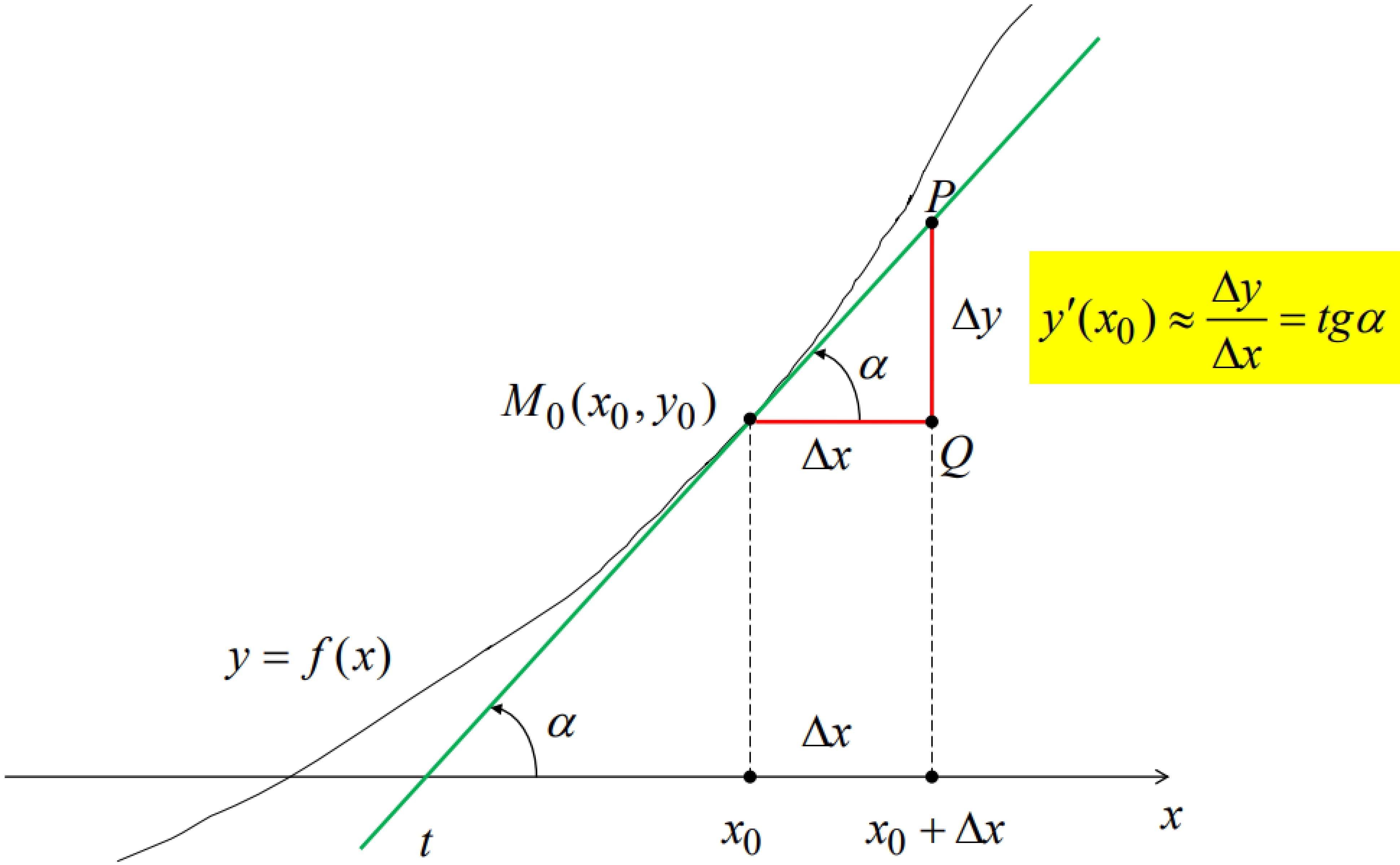
Производна на функция

Определение 3.1. Дадена е функцията $y = f(x), \quad x \in D$.
Производна на функцията $f(x)$ в точката $x_0 \in D$ се нарича границата

$y'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, където $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$,

ако тази граница съществува.

Забележка! Производната е локално свойство на функцията в определена точка. Когато производната съществува във всяка точка от дефиниционната си област, казваме, че функцията има производна или е диференцируема в D.



Фиг.1. Геометричен смисъл на производната.

ПРАВИЛА ЗА НАМИРАНЕ НА ПРОИЗАВОДНА

Нека $u = u(x),\ v = v(x)$ са функции на реалната променлива x

1) $(c)' = 0$ - производна на константа

2) $(cu)' = cu'$ - производна на произведение на константа с функция

3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$ - производна на сума (разлика) на две функции u и v

4) $(u.v)' = u'.v + u.v'$ - производна на произведение на две функции

5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$ - производна на частно на две функции

6) $\left(u(v(x))\right)' = u'_v.v'_x$ - производна на функция от функция (сложна функция)

ТАБЛИЦА НА НЯКОИ ЧЕСТО СРЕЩАНИ ФУНКЦИИ

(1) $C' = 0$, където C е константа.

(2) $x' = 1$.

(3) $\left(\sqrt{x}\,\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

(4) $\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$, където a е константа, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, и $x > 0$.

(5) $\left(a^x\right)' = a^x\,\ell n\, a$, където a е константа, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

(6) $\left(e^x\right)' = e^x$.

(7) $\left(\ell n\, x\right)' = \dfrac{1}{x}$ при $x > 0$.

(8) $\left(\sin x\right)' = \cos x$.

(9) $\left(\cos x\right)' = -\sin x$.

(10) $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, където $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(11) $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$, където $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(12) $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ при $|x| < 1$.

(13) $\left(\arccos x\right)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ при $|x| < 1$.

(14) $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(15) $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$.

А) $y = 5x^2 + 7x - 4.25$

Б) $y = \sqrt{3x}$

В) $y = x\sin x$

Г) $y = \dfrac{\sin x}{x^2}$

Д) $y = x^2 e^x \cos x$

Е) $y = 4e^{-3x}$

Ж) $y = \ln(x^3 + 1)$

З) $y = \sin^4\left(\dfrac{2x+3}{1-x}\right)$

Решение:

А) Сума на функции:

$$y' = \left(5x^2\right)' + (7x)' - (4.25)' = 5\left(x^2\right)' + 7(x)' - 0 = 5.2.x + 7.1 - 0 = 10x + 7.$$

Б) Умножение на функция с константа:

$$y' = \left(\sqrt{3x}\right)' = \left(\sqrt{3}.\sqrt{x}\right)' = \sqrt{3}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \sqrt{3}.\frac{1}{2}.x^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}.$$

В) Произведение на функции:

$$y' = (x\sin x)' = (x)'.\sin x + x.(\sin x)' = 1.\sin x + x.\cos x = \sin x + x\cos x.$$

Г) Частно на функции:

$$y' = \left(\frac{\sin x}{x^2} \right)' = \frac{x^2 (\sin x)' - \left(x^2 \right)' .\sin x}{x^4} = \frac{x^2 \cos x - 2x \sin x}{x^4}.$$

Д) Произведение от три функции:

$$y' = \left(x^2 e^x \cos x \right)' = \left(x^2 e^x \right)' \cos x + x^2 e^x (\cos x)' = \left(\left(x^2 \right)' e^x + x^2 \left(e^x \right)' \right) \cos x +$$

$$x^2 e^x (-\sin x) = \left(2x e^x + x^2 e^x \right) \cos x - x^2 e^x \sin x = e^x \left(x^2 \cos x + 2x \cos x - x^2 \sin x \right)$$

Е) Сложна функция (функция от функция):

$$y' = \left(4e^{-3x} \right)' = 4 \left(e^u \right)'_u .(-3x)'_x = -4e^{-3x}.(-3).1 = -12e^{-3x}.$$

Ж) Сложна функция: $\ln(u),\ u = x^3 + 1$.

$$y' = \left(\ln(x^3+1)\right)' = \left(\ln(u)\right)'_u .(u)'_x = \frac{1}{u}.(x^3+1)' = \frac{1}{(x^3+1)}.3x^2 = \frac{3x^2}{(x^3+1)}.$$

З) Функция от функция от функция: $u^4,\ u = \sin(v),\ v = \dfrac{2x+3}{1-x}$

$$y' = \left[\sin^4\left(\frac{2x+3}{1-x}\right)\right]' = \left[(u)^4\right]'_u .(\sin v)'_v .\left(\frac{2x+3}{1-x}\right)'_x =$$

$$4u^3.\cos(v).\frac{(2x+3)'.(1-x)-(2x+3).(1-x)'}{(1-x)^2} =$$

$$4\sin^3\left(\frac{2x+3}{1-x}\right).\cos\left(\frac{2x+3}{1-x}\right).\frac{5}{(1-x)^2}.$$