ЗАДАЧИ

Задача 1. Да се намерят интервалите на монотонност и екстремумите на функцията

$$y = x^3 - 12x^2 + 45x - 30$$

Решение. Намираме първата производна на дадената функция

$$y' = 3x^2 - 24x + 45$$

и използваме, че y расте в интервалите, за които $y' \geq 0$. Решаваме неравенството

$$3x^2 - 24x + 45 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 \geq 0 \Rightarrow (x-3).(x-5) \geq 0$$

$$x \in (-\infty, 3] \cup [5. + \infty).$$

Следователно функцията y расте в интервалите $(-\infty, 3] \cup [5. + \infty)$, а в интервала $(3, 5)$ y намалява.

Точките, в които функцията y евентуално има екстремуми се наричат критични и се определят от уравнението $y' = 0$. То има решения $x_1 = 3,\ x_2 = 5$. Видът на екстремума в конкретна точка се определя от знака на y'' за съответната точка. Ето защо намираме

$$y'' = 6x - 24 = 6(x-4).$$

Пресмятаме

$$y''(x_1 = 3) = 6(3-4) = -6 < 0.$$

Следователно за критичната точка $x_1 = 3$ дадената функция има локален максимум и

$$y_{\max} = y(x=3) = 3^3 - 12.3^2 + 45.3 - 30 = 9(3 - 12 + 15) - 30 = 54 - 30 = 24$$

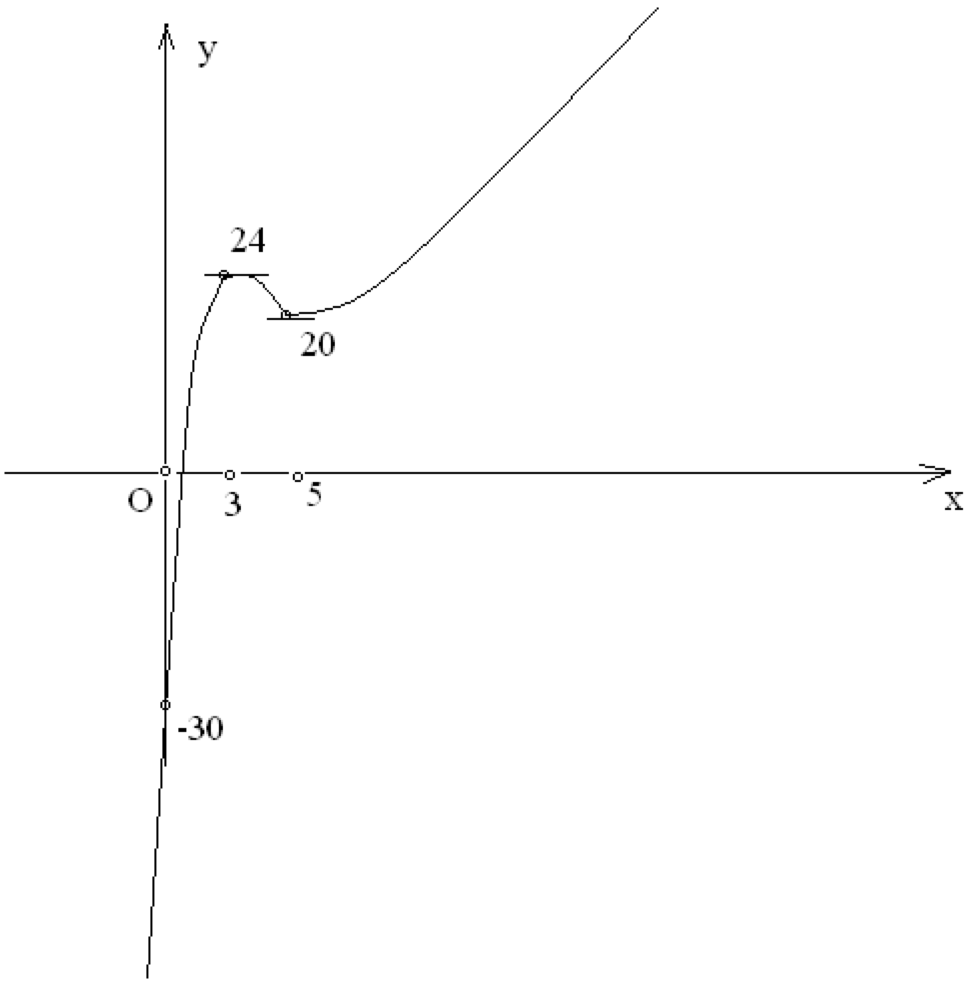
Пресмятаме

$$y''(x_2 = 5) = 6(5-4) = 6 > 0.$$

Следователно за критичната точка $x_2 = 5$ дадената функция има локален минимум и

$$y_{\min} = y(5) = 5^3 - 12.5^2 + 45.5 - 30 = 25(5 - 12 + 9) - 30 = 50 - 30 = 20.$$

Графиката на дадената функция можем да построим като използваме получените резултати. Тя ще изглежда така



Задача 2. Да се намерят екстремумите на функцията

$$y = \frac{2-x}{(x+1)^2}$$

Решение. Намираме първата производна на дадената функция

$$y' = \frac{-(x+1)^2 - (2-x).2.(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-x-1-4+2x}{(x+1)^3} = \frac{x-5}{(x+1)^3}\,.$$

Решение на уравнението $y' = 0$ е $x = 5$. Това е критична точка за дадената функция. За да определим вида на екстремума в нея намираме втората производна

$$y'' = \frac{(x+1)^3 - (x-5).3.(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{x+1-3x+15}{(x+1)^4} = \frac{16-2x}{(x+1)^4}$$

и я пресмятаме в критичната точка

$$y''(x=5) = \frac{16-2.5}{(5+1)^4} = \frac{16-10}{6^4} = \frac{1}{6^3} > 0\,.$$

Следователно дадената функция има локален минимум в точката $x = 5$ и

$$y_{\min} = y(x=5) = \frac{2-5}{(5+1)^2} = -\frac{3}{36} = -\frac{1}{12}$$

Задача 3. Да се намерят екстремумите на функцията

$$y = x^5 - 5x^4 + 6$$

Решение. Намираме първата производна на дадената функция

$$y' = 5x^4 - 20x^3$$

Решение на уравнението

$$y' = 0 \Rightarrow 5x^3(x-4) = 0$$

са $x_1 = 4,\ \ x_2 = 0$. За да определим вида на екстремума в критичните точки намираме втората производна

$$y'' = 20x^3 - 60x^2.$$

Пресмятаме за критичната точка $x_1 = 4$

$$y''(4) = 20.4^2(4-3) > 0.$$

Следователно дадената функция има локален минимум за $x_1 = 4$ и

$$y_{\min} = y(4) = 4^5 - 5.4^4 + 6 = 4^4.(4-5) + 6 = 6 - 4^4 = 6 - 256 = -250$$

За другата критична точка $x_2 = 0$ имаме

$$y'' = 20.0^3 - 60.0^2 = 0.$$

Налага се да търсим производните от по-висок ред

$$y''' = 60x^2 - 120x.$$

Пресмятаме за критичната точка $x_2 = 0$

$$y'''(0) = 0$$

Намираме

$$y^{(4)} = 120x - 120.$$

Пресмятаме за $x_2 = 0$

$$y^{(4)}(0) = 120.0 - 120 = -120$$

Следователно дадената функция има локален максимум за $x_2 = 0$ и $y_{\max} = y(0) = 6$

Задача 4. Да се докаже, че за $\forall x \cup R$ е вярно неравенството

$$2x \operatorname{arctg} x \geq \ln(1+x^2)$$

Решение. Образуваме функцията

$$f(x) = 2x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2)$$

и ще докажем, че нейната най-малка стойност за $x \in (-\infty, +\infty)$ е равна на нула. Намираме първата производна на дадената функция

$$f'(x) = 2 \operatorname{arctg} x + \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = 2 \operatorname{arctg} x$$

Решение на уравнението $f'(x) = 0$, т.е. на $2 \operatorname{arctg} x = 0$

е $x_1 = 0$. Втората производна

$$f''(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

в критичната точка $x_1 = 0$ има стойност

$$f''(x) = \frac{2}{1+0^2} = 2 > 0$$

Следователно в $x_1 = 0$ функцията

$$f(x) = 2x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2)$$

има локален минимум и

$$\min f(x) = f(0) = 2.0.arctg0 - \ln(1+0^2) = 0$$

Тъй като за $x \in (-\infty, 0)$

$$f'(x) = 2arctgx < 0$$

то в интервала $x \in (-\infty, 0)$ $f(x)$ намалява до стойността и $f(0) = 0$. В интервала $x \in (0, +\infty)$ функцията $f(x)$ расте. Следователно локалният и минимум е и глобален минимум, т.е. най-малката стойност на функцията е равна на 0. Щом $f(x) \geq 0$ за $x \in (-\infty, +\infty)$, то неравенството

$$2x \operatorname{arctg} x \geq \ln\left(1 + x^2\right)$$

е вярно за всяко $\forall x \cup R$.

Задача 5. Да се направи пълно изследване на функцията

$$y = 2\ln\frac{x+3}{x} - 3$$

и да се начертае нейната графика.

Решение. Последователно решаваме следните задачи.

1^0. Определяме дефиниционното множество на дадената функция. От условието

$$\frac{x+3}{x} > 0$$

(само положителни величини могат да се логаритмуват) се получава

$$DM_y \to x \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$$

2^0. В намереното DM_y дадената функция няма точки на прекъсване, защото логаритмичната функция е непрекъсната и дробно линейната функция $\dfrac{x+3}{x}$ е непрекъсната в това множество.

3^0. Дадената функция не е периодична, не е четна, нито е нечетна , защото дефиниционното и множество не е симетрично спрямо началото O на координатната система.

4^0. Изследваме функцията в краищата на дефиниционното множество.

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = 2 \lim_{x \to \pm\infty} \ln\frac{x+3}{x} - 3 = 2\ln \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+3}{x} - 3 = 2\ln 1 - 3 = -3$$

Следователно $y = -3$ е уравнение на хоризонтална асимптота.

$$\lim_{x \to -3-0} y = 2 \lim_{\varepsilon \to +0} \ln\frac{-3-\varepsilon+3}{-3-\varepsilon} - 3 = 2\ln \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{-\varepsilon}{-3-\varepsilon} - 3 = -\infty$$

Следователно $x = -3$ е уравнение на вертикална асимптота.

$$\lim_{x \to +0} y = 2 \lim_{\varepsilon \to +0} \ln\frac{\varepsilon+3}{\varepsilon} - 3 = +\infty$$

Тогава $x = 0$ също е уравнение на вертикална асимптота.

5^0. Определяме интервали на монотонност. Намираме

$$y' = 2.\frac{x}{x+3}.\frac{x-x-3}{x^2} = -\frac{6}{x(x+3)}$$

и тъй като за $x \in DM_y$ имаме $x(x+3) > 0$, то $y' < 0$ за всяко x от дефиниционното множество. Това означава, че функцията само намалява.

6^0. Определяме локални екстремуми. От

$$y' = -\frac{6}{x(x+3)}$$

се вижда, че уравнението $y' = 0$ няма решение, т.е. функцията няма критични точки и понеже само намалява тя няма локални екстремуми.

7^0. Определяме интервали на вдлъбнатост. Намираме

$$y'' = \frac{6(2x+3)}{x^2(x+3)^2}$$

Уравнението $y''=0$ има решение

$$x = -\frac{3}{2} \notin DM_y$$

Това означава, че функцията няма инфлексни точки. От неравенството

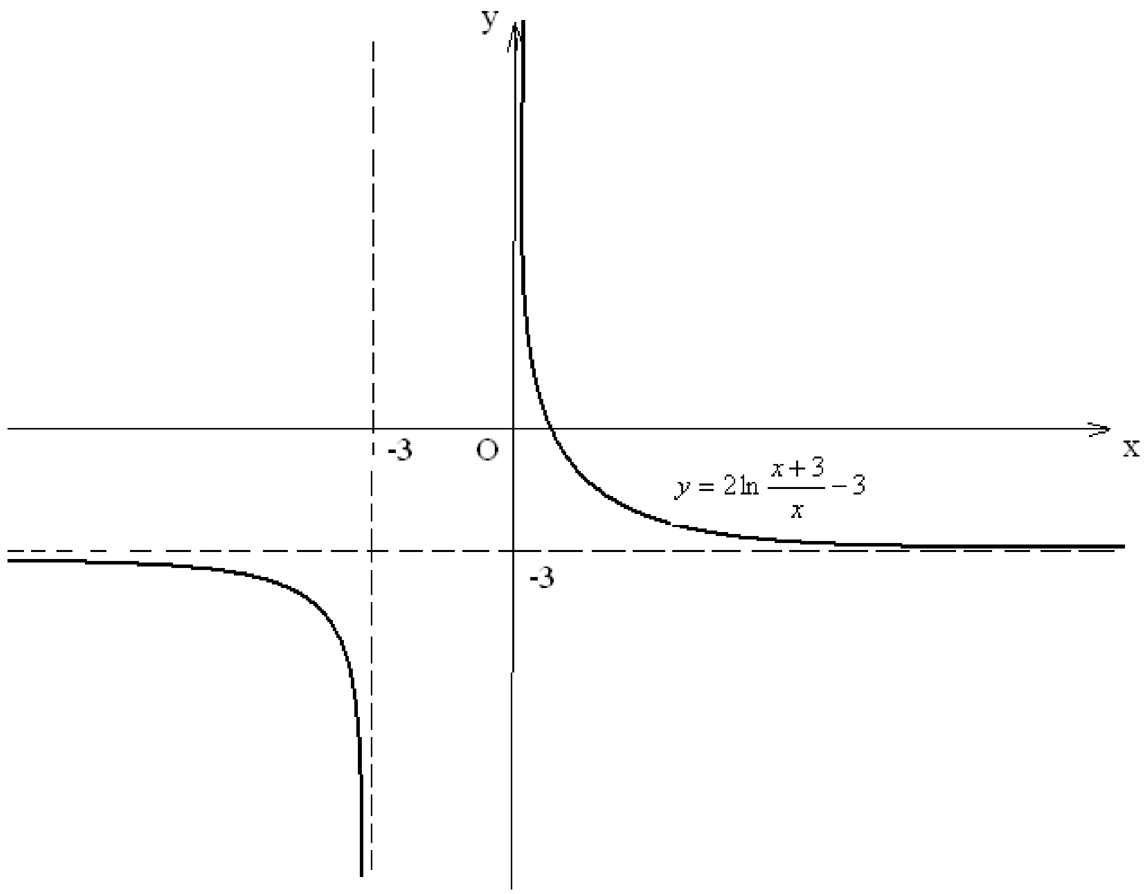
$$y''>0 \Rightarrow 2x+3>0 \Rightarrow x>-\frac{3}{2}$$

Следователно дадената функция е вдлъбната („$\cup$”) за $x \in (0,+\infty)$, а в интервала $x \in (-\infty,-3)$ функцията е изпъкнала („$\cap$”).

8⁰. Систематизираме резултатите в таблица.

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
y'		$-$				$-$	
y''		$\frown$				$\smile$	
y	-3	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	-3

9^0. Чертаем графиката на функцията



Задача 6. Да се направи пълно изследване на функцията

$$y = \frac{x^3}{3 - x^2}$$

и да се начертае нейната графика.

Решение. Следваме описания в предното решение път:

1⁰. Определяме дефиниционното множество на дадената функция. От условието

$$y = \frac{x^3}{3 - x^2}$$

(забранено е да се дели на нула) се получава $3 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{3}$ Тогава

$$DM_y \to x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$$

2⁰. За $x \in DM_y$ дадената функция няма точки на прекъсване, защото дробно-рационалната функция

$$y = \frac{x^3}{3 - x^2}$$

е непрекъсната в това множество.

3⁰. Дадената функция не е периодична, но е нечетна , защото

$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{3 - (-x)^2} = -\frac{x^3}{3 - x^2} = -y(x)$$

Следователно графиката е симетрична спрямо началото О на координатната система. Ето защо ще изследваме функцията само в интервалите

$$J \to x \in \left[0.\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$$

а графиката на функцията в тях ще начертаем симетрично спрямо точка О за останалата част от дефиниционното множество.

4⁰. Изследваме функцията в краищата на интервалите J

$$y(0)=\frac{0^3}{3-0^2}=0$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0} y=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\left(\sqrt{3}-\varepsilon\right)^3}{3-\left(\sqrt{3}-\varepsilon\right)^2}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\left(\sqrt{3}-\varepsilon\right)^3}{2\varepsilon\sqrt{3}-\varepsilon^2}=+\infty$$

Следователно $x=\sqrt{3}$ е уравнение на вертикална асимптота.

$$\lim_{x\to\sqrt{3}+0} y=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\left(\sqrt{3}+\varepsilon\right)^3}{3-\left(\sqrt{3}+\varepsilon\right)^2}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\left(\sqrt{3}+\varepsilon\right)^3}{-2\varepsilon\sqrt{3}-\varepsilon^2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x.x^2}{3-x^2}=-\infty$$

Следователно функцията няма хоризонтална асимптота. Проверяваме има ли наклонена асимптота $y=kx+b$ чрез

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{.x^2}{3-x^2}=-1\neq 0$$

и

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(y-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{.x^3}{3-x^2}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+3x-x^3}{3-x^2}=0$$

Следователно функцията има наклонена асимптота и нейното уравнение е $y=-x$

5⁰. Определяме интервали на монотонност. Намираме

$$y'=\frac{3x^2.\left(3-x^2\right)-x^3.\left(-2x\right)}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{x^2.\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}$$

Решаваме неравенството $y'>0\Rightarrow 9-x^2>0$ и вземаме пред вид, че

$$x\in\left[0.\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right).$$

Тогава в интервалите $x\in\left[0,\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},3\right)$ функцията расте, а в интервала $x\in\left(3,+\infty\right)$ функцията намалява. Това означава, че функцията само намалява.

6⁰. Определяме локални екстремуми. От

$$y'=\frac{x^2.\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}$$

се вижда, че в интервалите J уравнението $y'=0$ има решения $x_1=0,\ x_2=3$. За тези точки функцията евентуално има локални екстремуми. Видът им ще определим чрез втора производна на дадената функция

$$y''=\frac{6x.\left(9+x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}$$

$$y''(0)=\frac{6.0.\left(9+0^2\right)}{\left(3-0^2\right)^3}=0$$

Следователно в точка $x_1=0$ дадената функция няма екстремум. Тази точка е инфлексна точка. Втората производна за другата критична точка $x_2=3$ е

$$y''(3)=\frac{6.3.\left(9+3^2\right)}{\left(3-3^2\right)^3}<0$$

Следователно за $x_2=3$ дадената функция има локален максимум.

$$y_{\max}=y(3)=\frac{3^3}{3-3^2}=-\frac{9}{2}$$

7⁰. Определяме интервали на вдлъбнатост. От

$$y''=\frac{6x.\left(9+x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}$$

следва, че уравнението $y''=0$ има решение $x_1=0$. Това означава, че функцията има инфлексна точка $x_1=0$ ($x_1=0$ не е корен на уравнението $y'''=0$). От неравенството

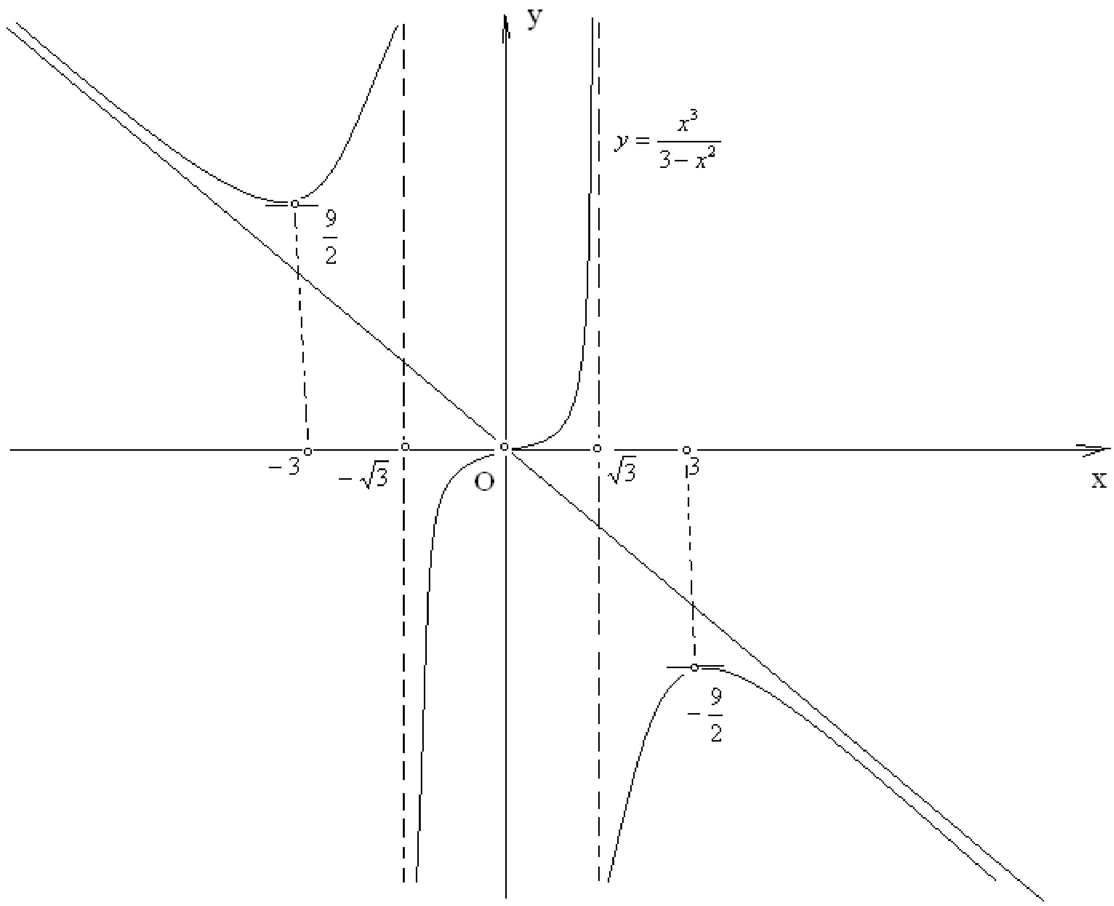
$$y''>0\Rightarrow\frac{6x}{\left(3-x^2\right)}>0\Rightarrow x\left(3-x^2\right)>0$$

Следователно дадената функция е вдлъбната („$\cup$”) за $x\in\left(0,\sqrt{3}\right)$, а в интервала $x\in\left(\sqrt{3},+\infty\right)$ функцията е изпъкнала („$\cap$”).

8⁰. Систематизираме резултатите в таблица.

x	0		1		$\sqrt{3}$		3		$+\infty$
y′		+		+	‖	+		−	
y″			$\cup$		‖		$\cap$		
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{9}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

9⁰. Чертаем графиката на функцията



y
$y = \frac{x^3}{3 - x^2}$
$\frac{9}{2}$
-3
$-\sqrt{3}$
O
$\sqrt{3}$
3
x
$-\frac{9}{2}$