Да се изследва функцията:

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-9}$$

за локални екстремуми, монотонност, изпъкналост, асимптоти и да се начертае нейната графика.

1) Определяме дефиниционното множество на функцията. То се състои от всички реални числа x, за които

знаменателят на функцията е различен от нула, т.е. $x^2-9\neq 0$ за $x\neq \pm 3$.

Следователно дефиниционното множество $D=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,+\infty)$.

След това проверяваме дали функцията е четна или нечетна:

$$f(x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-9}=\frac{-x^3}{x^2-9}=-f(x).$$

Следователно $f(x)$ е нечетна функция.

$f(x)$ е частно на диференцируемите функции x^3 и x^2-9, следователно $f(x)$ е непрекъсната и диференцируема за всяко $x\in D$.

2) Намираме производните на функцията :

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2-9)-x^2.2x}{(x^2-9)^2}=\frac{3x^4-27x^2-2x^4}{(x^2-9)^2}=\frac{x^4-27x^2}{(x^2-9)^2}.$$

$$f''(x)=\frac{(4x^3-2.27x)(x^2-9)^2-(x^4-27x^2)2(x^2-9)^2.2x}{(x^2-9)^4}=$$

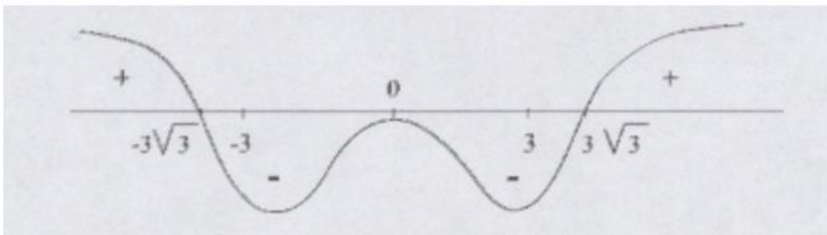
$$=\frac{(x^2-9)((4x^3-54x)(x^2-9)-(x^4-27x^2)4x)}{(x^2-9)^4}=$$

$$=\frac{(x^2-9)(4x^5-36x^3-54x^3+54.9.x-4x^5+4.27x^3)}{(x^2-9)^4}=$$

$$=\frac{(x^2-9)(18x^3-54.9x)}{(x^2-9)^4}=\frac{18x(x^2-9)(x^2-27)}{(x^2-9)^4}.$$

Знаменателите на $f'(x)$ и $f''(x)$ са положителни и следователно знаците на първата и втората производна се определят съответно от знаците на числителите им. Затова ще изследваме само числителите на производните. Разглеждаме числителя на първата производна $x^4 - 27x^2 = x^2(x^2 - 27) = x^2(x - 3\sqrt{3})(x + 3\sqrt{3})$.

Той се анулира за $x = 0$, $x = -3\sqrt{3}$, $x = 3\sqrt{3}$. По метода на интервалите определяме знаците му.



Следователно за $x \neq \pm 3$ имаме $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty, -3\sqrt{3}) \cup (3\sqrt{3}, +\infty)$

и $f'(x) < 0$ при $x \in (-3\sqrt{3}, 0) \cup (0, 3\sqrt{3})$, както и

$f'(x) = 0$ за $x = 0$, $x = -3\sqrt{3}$ $x = 3\sqrt{3}$.

Следователно функцията $f(x)$ е строго монотонно растяща в интервалите

$(-\infty, 3\sqrt{3})$ и $(3\sqrt{3}, +\infty)$, и е строго монотонно намаляваща за

Следователно за $x \neq \pm 3$ имаме $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty, -3\sqrt{3}) \cup (3\sqrt{3}, +\infty)$

и $f'(x) < 0$ при $x \in (-3\sqrt{3}, 0) \cup (0, 3\sqrt{3})$, както и

$f'(x) = 0$ за $x = 0$, $x = -3\sqrt{3}$ $x = 3\sqrt{3}$.

Следователно функцията $f(x)$ е строго монотонно растяща в интервалите

$(-\infty, 3\sqrt{3})$ и $(3\sqrt{3}, +\infty)$, и е строго монотонно намаляваща за

$x \in (-3\sqrt{3}, -3) \cup (-3; 3) \cup (3, 3\sqrt{3})$.

При $x = -3\sqrt{3}$ производната $f'(x)$ сменя знака си от "+" към "–", следователно при $x = -3\sqrt{3}$ функцията $f(x)$ има локален максимум равен на

$$f\left(-3\sqrt{3}\right) = \frac{\left(-3\sqrt{3}\right)^3}{\left(-3\sqrt{3}\right)^2 - 9} = \frac{-9\sqrt{3}}{2},$$

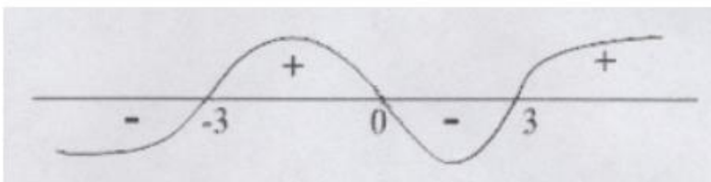
а при $x = 3\sqrt{3}$ производната $f'(x)$ сменя знака си от "–" към "+" следователно при $x = 3\sqrt{3}$ функцията $f(x)$ има локален минимум

$$f\left(3\sqrt{3}\right) = \frac{\left(3\sqrt{3}\right)^3}{\left(3\sqrt{3}\right)^2 - 9} = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Разглеждаме числителя на втората производна

$$18x\left(x^2 - 9\right)\left(x^2 + 27\right) = 18x(x-3)(x+3)\left(x^2 + 27\right).$$

По метода на интервалите определяме знаците му :



$f''(x) > 0$ за $x \in (-3, 0) \cup (3, +\infty)$,
$f''(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -3) \cup (0, 3)$,
$f''(x) = 0$ за $x = 0$.

Изключваме точките $x = -3$ и $x = 3$, тъй като те не принадлежат на дефиниционното множество. Следователно $f(x)$ е строго изпъкнала за $x \in (-3, 0) \cup (3, +\infty)$ и $f(x)$ е строго вдлъбната за $x \in (-\infty, -3) \cup (0, 3)$.
Точката $x = 0$ е инфлексна точка, тъй като в нея втората производна си сменя знака.

4) Изследваме границите на функцията в краищата на интервалите от дефиниционното множество:

Намираме границата на функцията когато x клони към -3 със стойности по малки от -3 , т.е.

$$\lim_{x \to -3-0} f(x) = \lim_{x \to -3-0} \frac{x^3}{(x-3)(x+3)} = \frac{(-3)^3}{(-6)(-0)} = -\infty .$$

Намираме границата на функцията когато x клони към -3 със стойности по-големи от -3 , т.е.

$$\lim_{x \to -3+0} f(x) = \lim_{x \to -3+0} \frac{x^3}{(x-3)(x+3)} = \frac{(-3)^3}{(-6)(+0)} = +\infty .$$

Аналогично намираме границата и когато x клони към 3 отляво или отдясно :

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = \frac{(3)^3}{(+6)(-0)} = -\infty \quad , \qquad \lim_{x\to 3+0} f(x) = \frac{(3)^3}{(+6)(+0)} = +\infty \ .$$

Изследваме границите и при $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\left(1-\frac{9}{x^2}\right)} = \frac{\pm\infty}{1-0} = \pm\infty \ .$$

5) Изследваме функцията за асимптоти :

Левите и десните граници на функцията в точките $x = -3$ и $x = 3$ са безкрайни. Следователно в тях функцията $f(x)$ има вертикални асимптоти. При $x \to \pm\infty$ границите са безкрайни и следователно функцията няма хоризонтални асимптоти. Ще изследваме функцията за наклонени асимптоти. Търсим границите

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad , \quad l = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - kx \right) \ :$$

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-9}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-9} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)} = \frac{1}{1-0} = 1 \ ,$$

$$l = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - 1.x \right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-9} - x \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x^3 + 9x}{x^2-9} = \lim_{x\to+\infty} \frac{9x}{x^2\left(1 - \frac{9}{x^2}\right)} = \frac{0}{(+\infty)(1-0)} = 0.$$

Следователно функцията $f(x)$ има наклонена асимптота с уравнение $y = x$.

6) Тъй като $f(x) = 0$ за $x = 0$ е единственото решение на уравнението, следва, че

точката $(0,0)$ е точката, в

която графиката на функцията пресича координатните оси.

7) Нанасяме всички получени данни за функцията в таблицата

x	$-\infty$ $\quad -3\sqrt{3}$ $\quad$ -3	$\quad$ 0	3 $\quad 3\sqrt{3}$ $\quad +\infty$
y	$-\infty$ $\uparrow$ $-9\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\downarrow$ $-\infty$	$+\infty$ $\downarrow$ 0 $\downarrow$ $-\infty$	$+\infty$ $\downarrow$ $9\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\uparrow$ $+\infty$
y'	+ + 0 - - -	- - 0 - -	-- - 0 + +
y''	- - - - -	+ + 0 - -	+ + + + +

8) Построяваме графиката на функцията**.**