11 Екстремуми на функция

1. Монотонни функции

Нека функцията f е определена в интервала I.

Определение 1. *Функцията $f(x)$ се нарича:*
растяща в интервала I, *ако*
$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;

строго растяща в интервала I, *ако*
$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

намаляваща в интервала I, *ако*
$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;

строго намаляваща в интервала I, *ако*
$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Пример: $y = e^x$ е строго растяща в R.
Пример: $y = \dfrac{1}{x^2}$ е строго растяща в интервала $(-\infty, 0)$ и строго намаляваща в интервала $(0, +\infty)$.
Пример: $y = \dfrac{1}{x}$ е строго намаляваща в интервала $(-\infty, 0)$ и строго намаляваща в интервала $(0, +\infty)$.

Не може да се твърди, че $y = \dfrac{1}{x}$ е строго намаляваща в $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$**!!!**

Функциите, имащи някое от свойствата, посочени в горното определение, се наричат **монотонни**.

Теорема 1. *Нека функцията $f(x)$ е диференцуема в интервала (a, b). Тогава:*
1) *$f(x)$ е растяща в $(a, b) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ в (a, b).*
2) *$f(x)$ е намаляваща в $(a, b) \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$ в (a, b).*
3) *Ако $f'(x) > 0$ в (a, b), то $f(x)$ е строго растяща в (a, b).*
4) *Ако $f'(x) < 0$ в (a, b), то $f(x)$ е строго намаляваща в (a, b).*

Примери: $y = x^2, \ y = x^3$

Следствие 1. *Нека:*
1) *$f(x)$ и $g(x)$ са диференцуеми в $[a, b]$;*
2) $f'(x) \leq g'(x), \quad x \in [a, b]$;
3) $f(a) \leq g(a)$.
Тогава
$f(x) \leq g(x), \quad x \in [a, b]$.

2. Екстремуми на функция

Нека функцията $f(x)$ е определена в интервала (a, b) и $x_0 \in (a, b)$.

Определение 2. *Казваме,че функцията $f(x)$ има* **максимум** $f(x_0)$ *в точката x_0, ако съществува околност U на точка x_0, такава, че:*
$f(x) \leq f(x_0), \quad x \in U$.

Аналогично:
строг максимум, ако
$f(x) < f(x_0), \quad x \in U, \ x \neq x_0$;
минимум, ако
$f(x) \geq f(x_0), \quad x \in U$;
строг минимум, ако
$f(x) > f(x_0), \quad x \in U, \ x \neq x_0$.

Ако в точката x_0 функцията f има едно от горните свойства, то казваме, че функцията f има **екстремум** в точката x_0.

Коментар: За локалния характер на екстремумите!

В кои точки на интервала (a, b) функцията f може да има екстремуми?

Отговор на този въпрос дава следната **теорема на Ферма̀** (1601 – 1665).

Теорема 2. *Ако функцията f има екстремум в точката $x_0 \in (a, b)$ и е диференцуема в тази точка, то $f'(x_0) = 0$.*

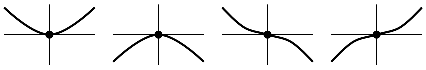
От теорема 2 следва, че функцията f може да има екстремум в тези точки на интервала (a, b), в които $f'(x) = 0$ (така наречени, **стационарни точки**) или в точките, в които $f(x)$ не е диференцуема.

Забележка: От факта, че $f'(x_0) = 0$ все още не следва, че функцията f има екстремум в точката x_0.

Пример: $y = x^3, \ y' = 3x^2, \ y'(0) = 0$, но функцията е строго растяща в R и няма екстремум при $x = 0$.

Забележка: Ако в някаква околност $U(x_0)$ на точката x_0 функцията f е диференцуема и $f'(x)$ е равна на нула само в точката x_0, то графиката на функцията в малка околност на точката $(x_0, f(x_0))$ изглежда както в един от случаите, показани на Фиг.().

Геометрично тълкуване:



Точките от интервала (a, b), в които $f(x)$ не е диференцуема или е диференцуема и $f'(x) = 0$, се наричат **критични точки на функцията** f.

Как да определим в кои от критичните си точки функцията има екстремум и какъв е видът му?

На този въпрос може да отговорим, като определим интервалите на растене и намаляване на функцията.

Нека в интервала (a, b) функцията f е непрекъсната и има краен брой критични точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b\,.$

Критичните точки разбиват интервала (a, b) на подинтервали

$$(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_n, b)\,,$$

в които производната запазва знака си $(+)$, ако $f'(x) > 0$ или $(-)$, ако $f'(x) < 0$. Затова във всеки от тези интервали функцията е или строго растяща $(+)$ или строго намаляваща $(-)$.

Правило:

1) Ако в критичната точка x_k производната $f'(x)$ сменя знака си, то функцията f има екстремум в точката x_k и този екстремум е:

– максимум, ако смяната е от $(+)$ към $(-)$;

– минимум, ако смяната е от $(-)$ към $(+)$.

2) Ако в критичната точка x_k производната $f'(x)$ не сменя знака си, то функцията f няма екстремум в точката x_k.

Пример: $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5\,.$

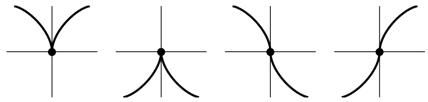
$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) \\ &= 2(x-1)(x-3)\,. \end{aligned}$$

В точките $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$ производната y' е равна на нула, положителна е в интервалите $(-\infty, 1)$ и $(3, +\infty)$ и е отрицателна в интервала $(1, 3)$. Следователно в точката $x_1 = 1$ функцията има максимум (y' сменя знака си от $+$ към $-$), а в точката $x_2 = 3$ функцията има минимум (y' сменя знака си от $-$ към $+$). Освен това,

$y_{\max} = y(1) = 9, \;\; y_{\min} = y(3) = 5\,.$

Забележка: Ако в някаква околност $U(x_0)$ на точката x_0 функцията f не е диференцуема само в точката x_0, където има безкрайни лява и дясна производни, то графиката на функцията в малка околност на точката $(x_0, f(x_0))$ изглежда както в един от случаите, показани на Фиг.().

Геометрично тълкуване:



Пример: $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$.

$$y' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\,.$$

Функцията не е диференцуема само в точката $x = 0$, а производната y' е отрицателна при $x < 0$ и положителна при $x > 0$. Следователно в точката $x = 0$ функцията има минимум (y' сменя знака си от $-$ към $+$) и $y_{\min} = y(0) = 0$.

Нека в някоя околност $U(x_0)$ на точката x_0 функцията f е $n-$ пъти диференцуема, където $n \geq 2$, $n \in N$.

Теорема 3. *Нека*

$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$

и

$f^{(n)}(x_0) \neq 0\,.$

Тогава:

1) *При n нечетно f няма екстремум;*

2) *При n четно f има екстремум, който е:*

– *максимум, ако $f^{(n)}(x_0) < 0$;*

– *минимум, ако $f^{(n)}(x_0) > 0\,.$*

Следствие 2. $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$. *Тогава:*

– *ако* $f''(x_0) < 0 \Rightarrow \max$;

– *ако* $f''(x_0) > 0 \Rightarrow \min$.

Пример: $y = 5x^3 - 3x^5\,.$

$y' = 15x^2 - 15x^4 = 15x^2(1-x)(1+x)$;

$\Rightarrow y' = 0$ при $x = 1, \; x = -1, \; x = 0\,;$

$y'' = 30x - 60x^3$;

$y''(1) = -30 < 0 \;\Rightarrow \max, \; y_{\max} = y(1) = 2$;

$y''(-1) = 30 > 0 \;\Rightarrow \min, \; y_{\min} = y(-1) = -2$;

$y''(0) = 0, \; y''' = 30 - 180x^2, \; y'''(0) = 30 \neq 0$

$\Rightarrow$ няма екстремум, понеже $n = 3$ е нечетно.

3. Абсолютни екстремуми

Нека функцията $f(x)$ е определена в множеството D и $x_0 \in D$.

Определение 3. *Казваме, че в точката x_0 функцията $f(x)$ има :*
– **абсолютен максимум** $f(x_0)$, *ако*

$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in D;$

– **абсолютен минимум** $f(x_0)$, *ако*

$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in D\,.$

Абсолютните максимум и минимум се наричат **абсолютни екстремуми** на функцията $f(x)$ в множеството D.

Нека $D = [a, b]$. Тогава абсолютните екстремуми се намират или в точките на локални екстремуми, лежащи в отворения интервал (a, b), или в крайните точки $x = a$, $x = b$ на интервала $[a, b]$.

Геометрично тълкуване:

Пример: $y = 2x^3 - 3x^2,\ x \in [-0{,}5,\ 2{,}5]$.

$y' = 6x^2 - 6x = 6x(x-1);$

$\Rightarrow y' = 0$ при $x = 0$ и $x = 1$;

$y'' = 12x - 6;$

$y''(0) = -6 < 0\ \Rightarrow \max,\ y_{\max} = y(0) = 0;$

$y''(1) = 6 > 0\ \Rightarrow \min,\ y_{\min} = y(1) = -1;$

$y(-0{,}5) = -1,\ y(2{,}5) = 12{,}5;$

$\max\{-1, 0, -1, 12{,}5\} = 12{,}5;$

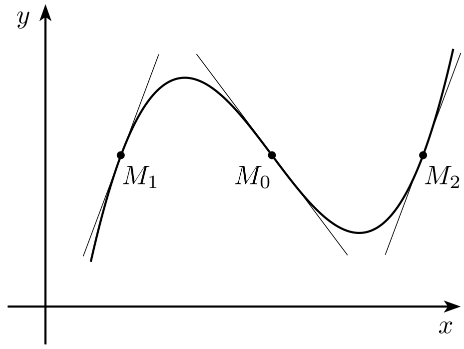
$\min\{-1, 0, -1, 12{,}5\} = -1;$

$\Rightarrow$ y има абсолютен максимум, равен на 12,5, в точката $x = 2{,}5$;

$\Rightarrow$ y има абсолютен минимум равен на -1, в точките $x = -0{,}5$ и $x = 1$.

4. Изпъкналост, вдлъбнатост, инфлексия

Нека функцията $f(x)$ има $f''(x)$ в интервала (a, b). Точките от графиката на функцията f се разбиват на три характерни групи, които се илюстрират с поведението на функцията в околност на точките M_1, M_2 и M_0 (Фиг.()):



M_1: Съществува околност на точката M_1, в която графиката на функцията f е разположена под допирателната в точка M_1. Тогава се казва, че графиката на f е **изпъкнала в точка** M_1;

M_2: Съществува околност на точката M_2, в която графиката на функцията f е разположена над допирателната в точка M_2. Тогава се казва, че графиката на f е **вдлъбната в точка** M_2;

M_0: Във всяка околност на точката M_0 графиката на функцията f е разположена както под допирателната в точка M_0 така и над допирателната. Тогава се казва, че M_0 е **инфлексна точка** за функцията f (графиката на f има **инфлексия в точка** M_0).

Коментар: десен завой, ляв завой, смяна на вида на завоите

Нека точката $M_0(x_0, f(x_0))$ лежи на графиката Γ_f на функцията f.

Правило:

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow \Gamma_f$ е изпъкнала в точка M_0;

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow \Gamma_f$ е вдлъбната в точка M_0.

Общо правило: Нека $n \geq 2,\ n \in N$,

$$f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

и

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогава:

1) Ако n е четно:

$f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow \Gamma_f$ е изпъкнала в точка M_0;

$f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow \Gamma_f$ е вдлъбната в точка M_0.

2) Ако n е нечетно $\Rightarrow M_0$ е инфлексна точка.

Пример: $f(x) = x^3 - 15x^2 + 36x + 80$.

$f'(x) = 3x^2 - 30x + 36;$

$f''(x) = 6x - 30 = 6(x-5);$

$f'''(x) = 6;$

$f''(x) > 0$ при $x > 5 \Rightarrow \Gamma_f$ е вдлъбната при $x > 5$;

$f''(x) < 0$ при $x < 5 \Rightarrow \Gamma_f$ е изпъкнала при $x < 5$;

$f''(5) = 0,\ f'''(5) = 6 \neq 0,\ n = 3$ е нечетно $\Rightarrow$ инфлексия в точката $M_0(5, f(5))$.

5. Изследване на функция и построяване на графика

Ред на действие:

1) Определяне на дефиниционната област D_f на функцията f и изследване за четност, нечетност, периодичност;

2) Намиране на $\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x)$ в крайните точки на дефиниционните интервали;

Намиране на асимптотите: вертикални, хоризонтални, наклонени;

3) Намиране на y' и решаване на неравенствата:

$y' > 0 \Rightarrow$ интервали на растене,

$y' < 0 \Rightarrow$ интервали на намаляване.

4) Екстремуми;

5) Намиране на y'' и изследване за изпъкналост, вдлъбнатост, инфлексия;

6) Пресечни точки с осите Ох и Оу;

7) Таблица;

8) Графика.

Пример: $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

1) $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1 \Rightarrow$

$D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

$y(-x) = -y(x) \ \Rightarrow$ функцията е нечетна;

2) Граници и асимптоти:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{0^+ \cdot 2} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to 1^-} y(x) = \frac{1}{0^- \cdot 2} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{-2 \cdot 0^+} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to -1^-} y(x) = \frac{-1}{-2 \cdot 0^-} = -\infty;$$

Извод: Има вертикални асимптоти

$x = 1,\ x = -1$;

$$\lim_{x\to \pm\infty} y(x) = \pm\infty;$$

Извод: Няма хоризонтални асимптоти. Търсим наклонени асимптоти от вида $y = kx + n$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1 \Rightarrow k = 1;$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} (\frac{x^3}{x^2-1} - x)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0 \Rightarrow n = 0;$$

Извод: Има наклонена асимптота $y = x$.

3) Производна y':

$$y' = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(3x^2 - 3 - 2x^2)}{(x^2-1)^2}$$

$$y' = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2};$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x^2 - 3 = 0;$$

Извод: $x_0 = 0,\ x_1 = \sqrt{3},\ x_2 = -x_1 = -\sqrt{3}$ са критичните точки за $y(x)$, лежащи в D.

$$y' > 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 > 0,\ \ x \neq 0, 1, -1;$$

$$x^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) > 0$$

$$\Leftrightarrow x < -\sqrt{3} \text{ или } x > \sqrt{3}.$$

Извод: y е строго растяща в интервалите

$(-\infty, -\sqrt{3}), (\sqrt{3}, +\infty)$.

$$y' < 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 < 0,\ \ x \neq 0, 1, -1;$$

$$x^2 - 3 < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < +\sqrt{3}.$$

Извод: y е строго намаляваща в интервалите

$(-\sqrt{3}, -1), (-1, 0)(0, 1), (1, \sqrt{3})$;

4) Екстремуми: Определяме промяната на знака на y' в критичните точки:

$x = x_1 = \sqrt{3}: \quad (-,+) \ \Rightarrow \min$

$$y_{\min} = y(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} = y_1 \approx 2{,}6;$$

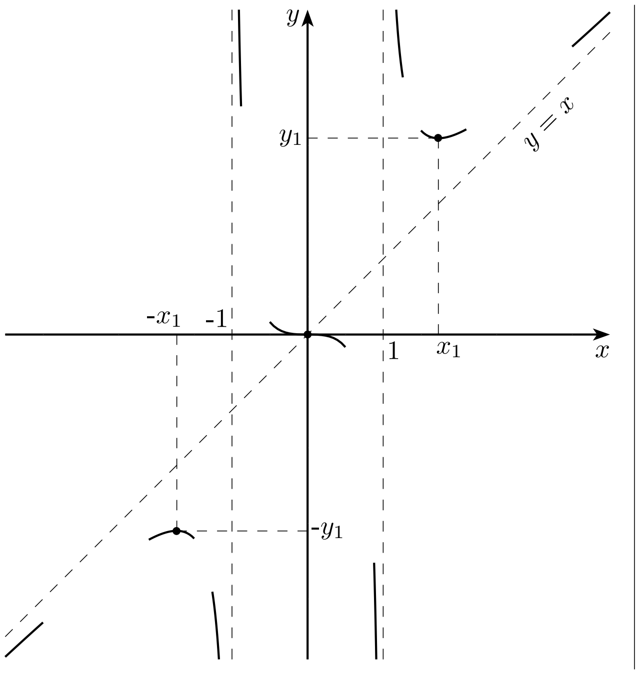
$x = -x_1 = -\sqrt{3}: \quad (+,-) \ \Rightarrow \max$

$$y_{\max} = y(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} = -y_1 \approx -2{,}6;$$

$x = 0: \quad (-,-) \ \Rightarrow$ инфлексия.

6) Пресечни точки: $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow (0, 0) \in \Gamma$.



7) Таблица:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1^-	-1^+		0		1^-	1^+		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$			$-$	0	$-$			$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\uparrow$	$\approx -2{,}6$	$\downarrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\downarrow$	0	$\downarrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\downarrow$	$\approx 2{,}6$	$\uparrow$	$+\infty$

$y = x$ max $x = -1$ инфлексия $x = 1$ min $y = x$

8) Графика: