Задача 1. Намерете екстремума на следната функция:

$$f(x,y) = -x^2 + xy - y^2 - 9x + 3y - 2.$$

За да определим екстремалните точки на тази функция, първо намираме стационарните точки. За целта решаваме системата (1.7) или

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 0, \\ f'_y(x,y) &= 0, \end{aligned} \qquad \text{т.е.} \qquad \begin{aligned} -2x + y - 9 &= 0, \\ x - 2y + 3 &= 0. \end{aligned}$$

Решението на системата е $(-5,-1)$ и тази точка е стационарна точка на f.

Пресмятаме

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} &= -2, & A &= \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} = -2, \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} &= 1, & B &= \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} = 1, \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} &= -2, & C &= \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} = -2. \end{aligned}$$

Прилагаме теорема 1.9: числото $AC - B^2 = 3$ е положително. Следователно функцията има екстремум в стационарната точка. Доколкото $A < 0$, то този екстремум е строг локален максимум.

Задача 2. Определете екстремумите на функцията:

$$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

Намираме стационарните точки на $f(x,y)$. За целта решаваме системата (1.7) или

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 0, \\ f'_y(x,y) &= 0. \end{aligned} \qquad \text{т.е.} \qquad \begin{aligned} 6x^2 + y^2 + 10x &= 0, \\ 2xy + 2y &= 0. \end{aligned}$$

Решенията на системата са $(0,0)$, $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$, $(-1,2)$, $(-1,-2)$ и тези точки са стационарни точки на f.

Пресмятаме:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} &= 2x+10, & A &= \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} = 12x_0+10,\\
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} &= 2y, & B &= \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} = 2y_0,\\
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} &= 2x+2, & C &= \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} = 2x_0+2,
\end{aligned}
$$

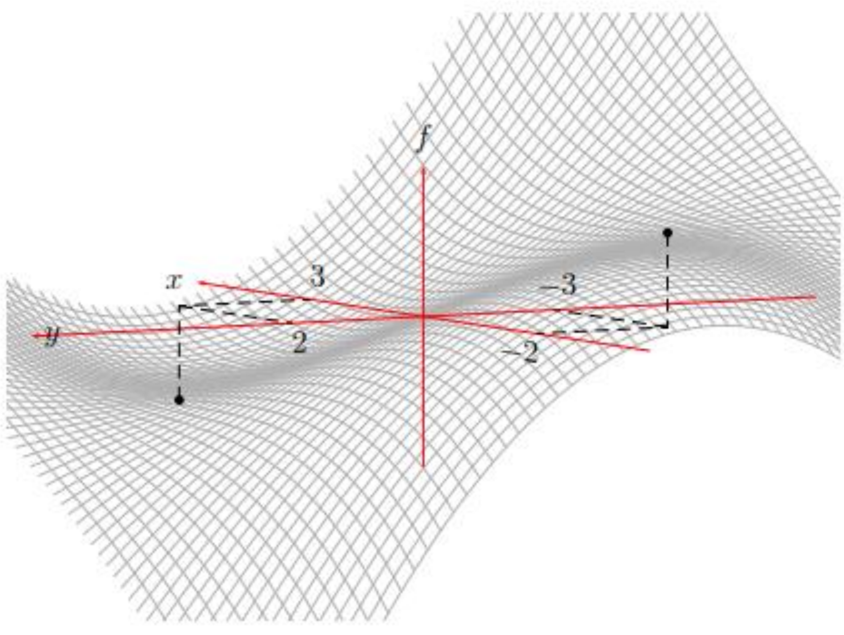
където (x_0, y_0) е стационарна точка на f.

Определяме стойностите на A, B, C и $AC-B^2$ за съответните стационарни точки на f. Резултатите са онагледени в следната таблица:

(x_0, y_0)	$(0,0)$	$\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$	$(-1,2)$	$(-1,-2)$
A	10	30	-2	-2
B	0	0	4	-4
C	2	$-\frac{4}{3}$	0	0
$AC-B^2$	20	-40	-16	-16

Функцията има минимум в точката $(0,0)$. Другите стационарни точки не са екстремални.

На фигура 1.14 е изобразен графикът на функцията $f(x,y)$ в областта $\{(x,y) : -6 < x < 6, \ -6 < y < 6\}$.



Фигура 1.14.

Задача 3. Намерете екстремумите на функцията

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 1.$$

Стационарните точки $(3,2)$, $(-3,-2)$, $(2,3)$ и $(-2,-3)$ определяме от системата:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 - 39 &= 0, \\ 6xy - 36 &= 0. \end{aligned}$$

Пресмятаме:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} = 6x_0, \\ B &= \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} = 6y_0, \\ C &= \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} = 6x_0, \end{aligned}$$

където (x_0, y_0) е стационарна точка на f. Резултатите онагледяваме чрез следната таблица:

(x_0,y_0)	$(3,2)$	$(-3,-2)$	$(2,3)$	$(-2,-3)$
A	18	-18	12	-12
B	12	12	18	-18
C	18	-18	12	-12
$AC - B^2$	180	180	-180	-180

В точката $(3,2)$ функцията има минимум, в точката $(-3,-2)$ функцията има максимум. В стационарните точки $(2,3)$ и $(-2,-3)$ функцията няма екстремум.