Екстремум на функция на две променливи

Нека $f : \Omega \to \mathbb{R}$ е непрекъсната функция, Ω е област в $\mathbb{R}^2$, $\Omega \neq \varnothing$ и нека $(x_0, y_0) \in \Omega$. Да напомним, че с $\mathbb{B}(x_0, y_0, r)$ означаваме кръга в Ω с център точката (x_0, y_0) и радиус $r > 0$, т.е. $\mathbb{B}(x_0, y_0, r) \subset \Omega$.

Дефиниция 1.5. Казваме, че функцията f има *локален минимум* в точката $(x_0, y_0) \in \Omega$, ако съществува число $r > 0$, такова, че

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \quad \text{за всяка точка} \quad (x, y) \in \mathbb{B}(x_0, y_0, r).$$

Казваме, че функцията f има *локален максимум* в точката $(x_0, y_0) \in \Omega$, ако съществува число $r > 0$, такова, че

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad \text{за всяка точка} \quad (x, y) \in \mathbb{B}(x_0, y_0, r).$$

Точките на локален минимум и локален максимум (вж. фигура 1.11) се наричат *екстремални точки*.

Теорема 1.8 (Ферма[1], необходимо условие за екстремум). *Нека функцията $f : \Omega \to \mathbb{R}$ е диференцируема в точката (x_0, y_0) и нека (x_0, y_0) е екстремална точка за функцията f.*

Тогава:

$$\begin{aligned} f'_x(x_0, y_0) &= 0, \\ f'_y(x_0, y_0) &= 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Дефиниция 1.6. Казваме, че $(x_0, y_0) \in \Omega$ е *стационарна точка* за функцията f, ако са валидни двете равенства (1.7).

Допирателната равнина към графикът на функця в стационарна точка е успоредна на равнината Oxy.

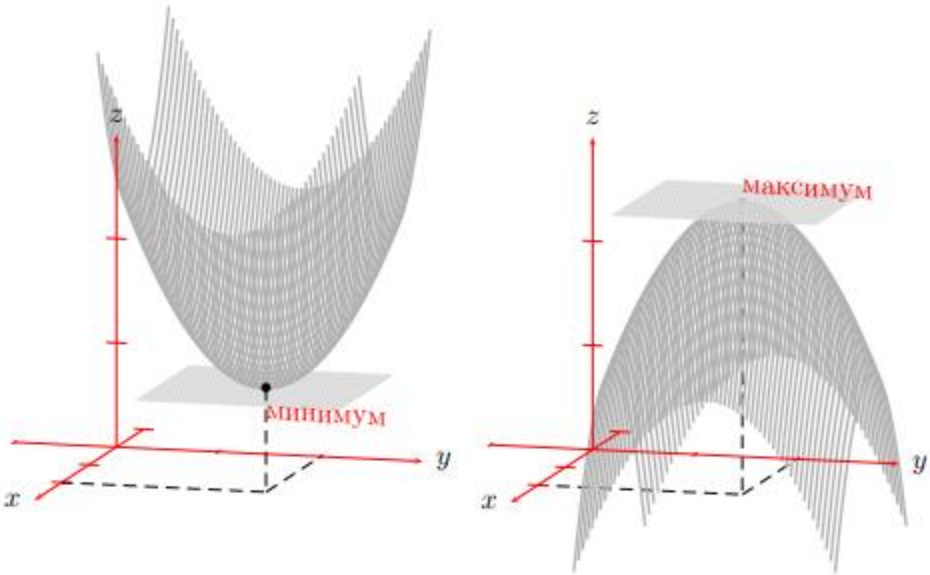
От теорема 1.8 следва, че множеството от всички екстремални точки е подмножество на множеството от всички стационарни точки.

Теорема 1.9 (достатъчно условие за екстремум). *Нека функцията f е два пъти непрекъснато диференцируема в Ω и нека (x_0, y_0) е стационарна точка за функцията f. Полагаме[2]:*

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}.$$

Тогава:

(1) *Ако $AC - B^2 < 0$, то (x_0, y_0) не е екстремална точка.*
(2) *Ако $AC - B^2 > 0$, то:*
  (2.1) *Ако $A < 0$, то (x_0, y_0) е точка на строг локален максимум.*
  (2.2) *Ако $A > 0$, то (x_0, y_0) е точка на строг локален минимум.*



Това може и да се представи и посредством детерминантата Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$$

Ако $\Delta < 0$ функцията $f(x, y)$ **няма** екстремум в точката (x_0, y_0) .

<u>Внимание</u>: Една функция **може да има локален екстремум** без да е необходимо съществуването на частни производни в тази точка!