1. Градиент на скаларна функция

Голяма част от операциите във векторния анализ се записват удобно посредством оператора на Намилтон $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$. Такива са операциите 'градиент', 'дивергенция', 'ротация' и други.

Градиент на скаларна функция се записва като обикновено умножение на вектор (оператора на Хамилтон) със скалар:

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}i + \frac{\partial\varphi}{\partial y}j + \frac{\partial\varphi}{\partial z}k = grad\varphi \qquad (1)$$

От израза се вижда, че градиентът на скаларна функция е вектор. Компонентите на този вектор са производните на скаларната функция по съответните оси на координатната система.

Физическото тълкуване на градиент на скаларна функция е, че това е вектор, насочен в направление на най-бързото изменение на функцията в пространството, а големината му дава скоростта на изменения на функцията в това направление. Компонентите на вектора 'градиент' определят изменението на функцията по отделните оси на координатната система, поради което се записват с производните на функцията по тези оси.

2. Дивергенция на вектор

Дивергенция на вектор се дефинира като скаларно произведение на оператора ∇ и вектора $\vec{a}$

$$\nabla.\vec{a} = (\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k)(a_x i + a_y j + a_z k) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = div\vec{a}$$

Записана за скоростното поле операцията дивергенция има вида:

$$divV = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \qquad (2)$$

3. Ротация (вихър) на вектор

Циркулацията на вектор се задава като векторно произведение на оператора на Хамилтон и дадения вектор: ***Δ x a.*** Векторно произведение на два вектора има вида:

$$(a \times b) = (a_y b_z - a_z b_y)i + (a_z b_x - a_x b_z)j + (a_x b_y - b_x a_y)\vec{k}$$

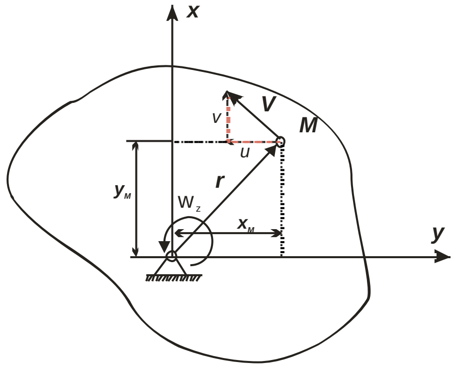
Векторното произведение на ∇ с вектора $\vec{a}$ тогава е:

$$(\nabla \times \vec{a}) = (\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y})\vec{k} = rot\vec{a}.$$

Това е векторна величина, която се нарича вихър (ротор) на вектора. Когато векторното поле е полето на скоростите във флуидното пространство се получава вихър на скоростта

$$rot\vec{V} = (\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})\vec{k} \qquad (3)$$

Физическият смисъл на вихъра на вектора на скоростта може да се изясни с помощта на фигура 14.



Фиг.14 Ротация на скоростта

Разглежда се въртене на твърдо тяло по оста z с ъглова скорост $\boldsymbol{\omega_z}$.

Произволна точка от тялото М при въртенето се движи с периферна скорост V. Тази скорост се определя от механиката:

$$\boldsymbol{V = \omega_z . r},$$

с компоненти:

u = $\boldsymbol{\omega_z y}$; $\boldsymbol{v = \omega_z x}$ $\boldsymbol{w = 0}$

От тези изрази може да се определят производните: $\frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial v}{\partial x}$: $\frac{\partial u}{\partial y} = -\omega_z; \frac{\partial v}{\partial x} = \omega_z$

тогава $rot_z \vec{V} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega_z \Rightarrow \omega_z = \frac{1}{2} rot_z \vec{V}$

по аналогичен начин: $\omega_x = \frac{1}{2} rot_x \vec{V}; \cdot \omega_y = \frac{1}{2} rot_y \vec{V}$

Следователно вихърът на вектора на скоростта на флуидните частици може да се определи чрез ъгловата скорост $\omega \Rightarrow \omega = \frac{1}{2} rot \vec{V}$

Понякога вихровото движение се свързва с турболентното течение. Това не е точно. И ламинарните, и турболентните течения могат да бъдат вихрови или безвихрови.

Особено значение в механиката на флуидите имат безвихровите течения, за които ротацията на скоростта е нула:

$$rot \vec{V} = 0; \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Това е възможно когато съществува функция φ(x,y,z), за която:

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u; \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v; \frac{\partial \varphi}{\partial z} = w$, тогава например: $\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = 0$ и горният израз за ротацията на скоростта действително се превръща в нула.

Такова течение се нарича потенциално.

Тогава: $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k} = grad\varphi$

Функцията φ се нарича потенциал на вектора на скоростта

Ако векторът на скоростта има потенциал, то $rot \vec{V} = rot.grad\varphi = 0$

4. Оператор на Лаплас

Операторът на Лаплас се дефинира като скаларно произведение на оператора на Хамилтон:

$$\nabla.\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y 2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2 = \Delta \qquad (4)$$

Приложен към скаларна функция операторът на Лаплас има вида:

$$\nabla.\nabla\varphi = div.grad\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

В сила са следните правила:

$$rot.grad\varphi = \nabla \times \nabla \varphi = 0$$

$$div.rot\vec{a} = \nabla(\nabla \times \vec{a}) = 0$$