

ЧАСТ III

СТАТИСТИЧЕСКО РАЗСЕЙВАНЕ И АСИМЕТРИЯ

Учебни цели:

- (1) Изчисляване на измерителите на статистическото разсейване:
 - размах на вариацията
 - средноаритметично отклонение
 - средноквадратично (стандартно) отклонение
- (2) Характеризиране на статистическата асиметрия чрез:
 - коефициент на асиметрия на Пирсън
 - коефициент на асиметрия на Юл
 - моментен коефициент на асиметрия

1. Измерители на разсейването

1.1. Изчисляване на измерителите на разсейването при негрупиран статистически сведения за съвкупността

Пример 1.1

По данни за подгрупа от пет търговски дружества, да се изчислят следните измерители на разсейването по признака “размер дълготрайните активи (млн.лв)”:

- размах на вариацията
- средно аритметично отклонение
- средно квадратично отклонение

Размерите на дълготрайните активи на петте дружества са:

1,0 8,8 2,5 1,0 7,5 млн.лв

1.1.1. Размах на вариацията

Размахът се изчислява въз основа на най-малкото и най-голямото значение на признака:

$$X_{\min} = 1,0 \text{ млн.лв} \quad X_{\max} = 8,8 \text{ млн.лв}$$

$$R = X_{\max} - X_{\min} = 8,8 - 1,0 = 7,8 \text{ млн.лв}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{20,8}{5} = 4,16 \text{ млн.лв}$$

Коефициентът на вариация по размаха е:

$$V_R = \frac{R}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{7,8}{4,16} \cdot 100\% = 1,875 \cdot 100\% = 187,5\%$$

Размахът на вариацията измерва ширината на диапазона (интервала), в който варират значенията на признака. В относителна мярка този интервал възлиза на 187,5% от средното равнище по изследвания признак.

1.1.2. Средно аритметично отклонение

Изчисляването на средното аритметично отклонение изисква образуването на отклоненията на значенията на признака от тяхната средна аритметична стойност. Осредняват се абсолютните значения на тези отклонения. За удобство, изчислителната процедура се осъществява с помощта на следната работна таблица:

i	x_i	$x_i - \bar{x}$	$ x_i - \bar{x} $
1	1,0	-3,16	3,16
2	8,8	4,64	4,64
3	2,5	-1,66	1,66
4	1,0	-3,16	3,16
5	7,5	3,34	3,34
Σ	20,8	0	15,96

$$\delta = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{N} = \frac{15,96}{5} = 3,192 \approx 3,2 \text{ млн.лв}$$

$$V_\delta = \frac{\delta}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{3,2}{4,16} \cdot 100\% = 0,769 \cdot 100\% = 76,9\%$$

В относително изражение, средната абсолютна разлика на размерите на дълготрайните активи на дружествата от общото им средно равнище възлиза на близо 77% от това средно равнище.

1.1.3. Средно квадратично (стандартно) отклонение

Изчисляването на стандартното отклонение става по формулата за средна квадратична величина, приложена върху отклоненията на значенията на признака от тяхната средна аритметична стойност. Това изисква повдигане във втора степен на тези отклонения, въз основа на които се изчислява **дисперсията** σ^2 на стойностите на признака. Използва се следната работна таблица:

i	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	1,0	-3,16	9,99
2	8,8	4,64	21,53
3	2,5	-1,66	2,76
4	1,0	-3,16	9,99
5	7,5	3,34	11,16
Σ	20,8	0	55,43

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{55,43}{5} = 11,086$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{11,086} = 3,33 \text{ млн.лв}$$

$$V_\sigma = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{3,33}{4,16} \cdot 100\% = 0,80 \cdot 100\% = 80\%$$

Стандартното отклонение на размерите на дълготрайните активи на дружествата от общото им средно равнище възлиза на 80% от това средно равнище.

 Решете самостоятелно следната задача:

Да се изчислят:

- (1) размаха на вариацията
- (2) средното аритметично отклонение
- (3) стандартното отклонение

заедно с техните коефициенти на вариация по признака “брой на персонала”, по данни за 6 избрани дружества:

5, 38, 12, 20, 10, 18 бр. наети

(Забележка: Закръгляване на крайните резултати с точност до една десета.)

1.2. Изчисляване на измерителите на разсейването по данни от ЕЕР (групирани данни)

Пример 1.2

По данни от получения в част I интервален ред на разпределение на търговските дружества, да се изчислят следните измерители на разсейването по признака “размер дълготрайните активи (млн.лв)”: (1) средно аритметично; (2) средно квадратично отклонение

1.2.2. Средно аритметично отклонение

Изчисляването на средното аритметично отклонение при интервален ред на разпределение изисква предварително да се намери средната аритметична претеглена по изследвания признак. Чрез използването ѝ се образуват абсолютните отклонения, които се претеглят с честотите от ЕЕР. Както бе показано в част II,

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{215}{25} = 8,6 \text{ млн.лв}$$

Удобно е изчислителната работа да се организира чрез следната работна таблица:

(X]	f_i	x_i	$x_i f_i$	$x_i - \bar{x}$	$ x_i - \bar{x} $	$ x_i - \bar{x} f_i$
1 – 5	6	3	18	-5,6	5,6	33,6
5 – 9	10	7	70	-1,6	1,6	16,0
9 – 13	4	11	44	2,4	2,4	9,6
13 – 17	3	15	45	6,4	6,4	19,2
17 – 21	2	19	38	10,4	10,4	20,8
$\Sigma f_i =$	25	–	215	–	–	99,2

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^m |x_i - \bar{x}| f_i}{\sum_{i=1}^m f_i} = \frac{99,2}{25} = 3,968 \approx 4,0 \text{ млн.лв}$$

$$V_\delta = \frac{\delta}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{4,0}{8,6} \cdot 100\% = 0,465 \cdot 100\% = 46,5\%$$

Търговските дружества от изследваната съвкупност се различават по признака “дълготрайни активи” от средното му равнище средно с около ± 4 млн.лв. В относително изражение средното отклонение възлиза на над 46% от средния размер на дълготрайните активи за съвкупността.

1.2.3 Средно квадратично (стандартно) отклонение

Изчисляването на стандартното отклонение при интервален ред на разпределение става по показаната в част II процедура за намиране на средна квадратична величина. Тук също е необходимо квадратите на отклоненията да се претеглят с честотите от ЕЕР.

Изчислителната работа се организира чрез аналогична работна таблица:

(X]	f_i	x_i	$x_i f_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 f_i$
1 – 5	6	3	18	-5,6	31,36	188,16
5 – 9	10	7	70	-1,6	2,56	25,60
9 – 13	4	11	44	2,4	5,76	23,04
13 – 17	3	15	45	6,4	40,96	122,88
17 – 21	2	19	38	10,4	108,16	216,32
$\Sigma f_i =$	25	–	215	–	–	576,00

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{\sum_{i=1}^m f_i} = \frac{576}{25} = 23,04$$

$$\sigma = \sqrt{23,04} = 4,8 \text{ млн.лв}$$

$$V_\sigma = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{4,8}{8,6} \cdot 100\% = 0,558 \cdot 100\% = 55,8\%$$

Вариацията в изследваната съвкупност на търговските дружества по признака “дълготрайни активи”, измерена чрез средно квадратично отклонение, възлиза на 4,8 млн.лв средна разлика от средното за съвкупността ниво. В относително изражение, стандартното отклонение възлиза на около 56% от средния размер на дълготрайните активи.

 Решете самостоятелно следната задача:

Да се изчислят: (1) средното аритметично отклонение; (2) стандартното отклонение заедно с техните коефициенти на вариация, като се използва разпределението на търговските дружества по признака “брой на персонала”.

(Забележка: Закръгляване на крайните резултати с точност до една десета.)

2. Измерители на статистическата асиметрия

2.1. Изчисляване на измерителите на асиметрията и ексцеса при негрупиран статистически сведения за съвкупността

Пример 2.1

По данните за подгрупата от пет търговски дружества (пример 1.1), да се изчислят следните измерители на асиметрията и ексцеса по признака “размер дълготрайните активи (млн.лв)”:

- коефициент на асиметрия на Юл;
- моментен коефициент на асиметрия;
- коефициент на ексцес.

Размерите на дълготрайните активи на петте дружества са:

1,0 8,8 2,5 1,0 7,5 млн.лв

2.1.1. Коефициент на Юл

Коефициентът на Юл се изчислява въз основа на средната аритметична, медианата и стандартното отклонение:

$$S_2 = \frac{3(\bar{x} - Me)}{\sigma}$$

В пример 1.1 бяха установени стойностите на средната аритметична величина и стандартното отклонение на дълготрайните активи на петте дружества: $\bar{x} = 4,16$ млн.лв; $\sigma = 3,33$ млн.лв.

Медианното значение в дадения статистически ред ще се определи по описания в част II начин:

- 1) ранжиране на значенията на признака: 1,0 1,0 2,5 7,5 8,8
- 2) определяне на номера на медианния случай: $N_{Me} = (5+1)/2 = 3$
- 3) определяне на медианното значение (третото): $Me = 2,5$

Тогава за коефициента на Юл се получава:

$$S_2 = \frac{3(\bar{x} - Me)}{\sigma} = \frac{3(4,16 - 2,5)}{3,33} = \frac{3 \cdot 1,66}{3,33} = \frac{4,98}{3,33} \approx 1,5$$

(1) тъй като $S_2 > 0$, следователно налице е положителна асиметрия в изследвания статистически ред (с дясно изтеглено рамо на кривата на разпределението);

(2) тъй като $|S_2| > 1$, наблюдава се значителна степен на асиметричност на разпределението.

2.1.2. Моментен коефициент на асиметрия

Изчисляването на моментния коефициент на асиметрия изисква предварително да се получи стойността на третия централен момент на разпределението. При негрупирани данни това се осъществява чрез продължение на работната таблица за изчисляването на стандартното отклонение:

i	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^3$
1	1,0	-3,16	9,99	-31,55
2	8,8	4,64	21,53	99,90
3	2,5	-1,66	2,76	-4,57
4	1,0	-3,16	9,99	-31,55
5	7,5	3,34	11,16	37,26
Σ	20,8	0	55,43	69,47

Числовата стойност на третия централен момент е:

$$\mu_3 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^3}{N} = \frac{69,47}{5} = 13,89$$

За моментния коефициент на асиметрия се получава:

$$S_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{13,89}{3,33^3} = \frac{13,89}{36,89} = 0,38$$

(1) тъй като $S_3 > 0$, наблюдава се положителна асиметрия (дясно изтеглено рамо на кривата);

(2) тъй като $|S_3| < 1$, наблюдава се умерена степен на асиметричност.

Моментният коефициент на асиметрия се счита за по-прецизен при измерването на статистическата асиметрия, поради което по-надеждни са направените чрез него изводи.

 Решете самостоятелно следната задача:

Да се изчислят: (1) коефициента на Юл; (2) моментният коефициент на асиметрия по признака “брой на персонала”, като се използват данните за 6 избрани дружества:

5, 38, 12, 20, 10, 18 бр. наети

(Забележка: Закръгляване на крайните резултати с точност до една десета.)

2.2. Изчисляване на измерителите на асиметрията по данни от ЕЕР (групирани данни)

 Пример 2.2

По данни от получения в част I интервален ред на разпределение на търговските дружества, да се характеризира формата на емпиричното разпределение по признака “размер дълготрайните активи (млн.лв)” чрез:

- коефициента на асиметрия на Пирсън;
- коефициента на асиметрия на Юл;
- моментния коефициент на асиметрия;

2.2.1. Коефициент на Пирсън

Коефициентът на Пирсън се изчислява въз основа на средната аритметична, модата и стандартното отклонение:

$$S_1 = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma}$$

В пример 1.2 бяха установени стойностите на средната аритметична величина и стандартното отклонение на дълготрайните активи за съвкупността:

$$\bar{x} = 8,6 \text{ млн.лв}; \quad \sigma = 4,8 \text{ млн.лв.}$$

В част II бе определена модалната стойност по признака:

$$Mo = 6,6 \text{ млн.лв}$$

При наличието на числовите стойности на тези величини за коефициента на Пирсън се получава:

$$S_1 = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma} = \frac{8,6 - 6,6}{4,8} = \frac{2,0}{4,8} = 0,42$$

2.2.2. Коефициент на Юл

В част II бе определена медианната стойност по признака:

$$Me = 7,8 \text{ млн.лв}$$

При наличието на числовите стойности на средната аритметична, медианата и стандартното отклонение за коефициента на Юл се получава:

$$S_2 = \frac{3(\bar{x} - Me)}{\sigma} = \frac{3(8,6 - 7,8)}{4,8} = \frac{3 \cdot 0,8}{4,8} = \frac{2,4}{4,8} = 0,50$$

2.2.3. Моментен коефициент на асиметрия

За изчисляването на моментния коефициент на асиметрия е необходимо да се получи третият централен момент на разпределението. Това се осъществява чрез продължение на работната таблица за изчисляване на стандартното отклонение:

(X]	f_i	...	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$	$(x_i - \bar{x})^3 \cdot f_i$
1 – 5	6	...	-5,6	31,36	188,16	-1053,7
5 – 9	10	...	-1,6	2,56	25,60	-41,0
9 – 13	4	...	2,4	5,76	23,04	55,3
13 – 17	3	...	6,4	40,96	122,88	786,4
17 – 21	2	...	10,4	108,16	216,32	2249,7
$\Sigma f_i =$	25	...	–	–	576,00	1996,8

Числовата стойност на третия централен момент е:

$$\mu_3 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^3 f_i}{\sum_{i=1}^m f_i} = \frac{1996,8}{25} = 79,9$$

За моментния коефициент на асиметрия се получава:

$$S_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{79,9}{4,8^3} = \frac{79,9}{110,6} = 0,72$$

(1) тъй като $S_3 > 0$, наблюдава се положителна асиметрия (дясно изтеглено рамо на кривата);

(2) тъй като $|S_3| < 1$, наблюдава се умерена степен на асиметричност.

Освен това може да се посочи, че в получените резултати от трите коефициента *липсва противоречие* относно наличието и характера на асиметрията в разпределението на търговските дру-

жества по размера на дълготрайните им активи. Това е свидетелство за съответствието на изследваното ЕЕР до еталона за *умерено асиметрично разпределение*, при което е налице приблизителното равенство:

$$\bar{x} - Mo \approx 3(\bar{x} - Me)$$

 Решете самостоятелно следните задачи:

Да се характеризира формата на разпределението на търговските дружества по признаците:

А/ Брой на персонала

Б/ Брой на подразделенията

Да се използват следните коефициенти:

- коефициент на асиметрия на Пирсън;
- коефициент на асиметрия на Юл;
- моментен коефициент на асиметрия.

ДОПЪЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

Зад.3.1. Като се използват получените в задача 1.1 разпределения, да се характеризира статистическото разсейване и асиметрия в ЕЕР на съвкупността на домакинствата по признаците:

- 1) брой на заетите лица в домакинство;
- 2) брой на децата в домакинство.

Да се използват средно аритметичното и стандартното отклонение, техните коефициенти на вариация, и моментния коефициент на асиметрия.

Зад.3.2. Да се характеризира статистическата асиметрия в разпределението на месеците по месечния обем на продажбите на банани в супермаркета (зад.1.2), като се използват моментния коефициент на асиметрия и коефициентите на асиметрия на Пирсън и Юл.

Зад.3.3. Да се характеризира статистическата асиметрия в разпределението на регионалните клонове на Втора Инвестиционна Банка АД по признака “размер на остатъците по сročните депозитни сметки” (зад.1.3), като се използват моментния коефициент на асиметрия и коефициентите на асиметрия на Пирсън и Юл.

Зад.3.4. Да се характеризира статистическата асиметрия в разпределението на ценните книжа в инвестиционния портфейл на борсовия посредник по признака “норма на възвръщаемост” (зад.1.4), като се използват моментния коефициент на асиметрия и коефициентите на асиметрия на Пирсън и Юл.