

ПУ „Паисий Хилендарски”, ФМИ, катедра „Геометрия”
Упражнения по Аналитична геометрия

Метрични действия с вектори

1. Притежава ли скаларното произведение свойствата, аналогични на следните свойства на реалните числа:
а) $\vec{a} \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$; б) $\vec{a} \vec{b} = \vec{b} \vec{a}$, $\vec{b} \neq 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{c}$; в) $\vec{a} (\vec{b} \vec{c}) = (\vec{a} \vec{b}) \vec{c}$; г) $(\vec{a} \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2$; д) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \vec{b} + \vec{b}^2$?
2. Ако $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, да се пресметнат $\vec{a} \vec{b}$, $\vec{a}^2$, $\vec{b}^2$, $(\vec{a} + \vec{b})^2$, $(\vec{a} - \vec{b})^2$, $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - 3\vec{b})$.
3. Да се пресметне $(2\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$, ако $\vec{a} (1, 2)$, $\vec{b} (-2, 3)$. Да се намери косинусът на ъгъла между векторите $\vec{p} = (2\vec{a} + \vec{b})$ и $\vec{q} = (\vec{a} - 2\vec{b})$.
4. Да се пресметне $(\vec{a} + \vec{b})(3\vec{a} - \vec{b})$, ако $\vec{a} (1, -1, 0)$, $\vec{b} (-2, 0, 3)$. Да се намери косинусът на ъгъла между векторите $\vec{p} = (\vec{a} + \vec{b})$ и $\vec{q} = (3\vec{a} - \vec{b})$.
5. Ако $\angle(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, то да се намери $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi$.
6. Да се определи λ , така че векторът $\vec{a} (2, \lambda)$ да бъде ортогонален на вектора $\vec{b} (2, -2)$.
7. Дадени са векторите $\vec{a} (3, -1, -2)$, $\vec{b} (1, 2, -1)$, $\vec{c} (1, 1, -1)$. Да се намерят координатите на векторите $\vec{a} \times \vec{b}$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ и да се пресметне $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$.
8. Да се намери разстоянието от точка A(1, 1) до права BC, определена от точките B(-3, 4) и C(13, -4).
9. Дадени са точките A(-1, 2, 3), B(0, 4, 4), C(2, 0, 2), D(-1, 3, 2). Да се намери разстоянието от точката D до равнината ABC.
10. Относно ортонормирана координатна система $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ е даден триъгълник ABC, чрез равенствата $\vec{OA} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{OB} = \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{OC} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_3$. Да се намери $\cos \angle BCA$. Ако H е ортогоналната проекция на C върху AB, да се изрази $\vec{CH}$ като линейна комбинация на $\vec{CA}$ и $\vec{CB}$. Да се намери дължината на височината CH.
11. Относно ортонормирана координатна система са дадени точките A(1, -5, 4), B(0, -3, 1), C(-2, -4, 3), D(4, 4, -2). Да се намери дължината на височината през върха A на тетраедъра ABCD.
12. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и нека $\vec{AB} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{b}$. Да се намери $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi$, ако $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ и $|\vec{AM}| = \frac{\sqrt{13}}{4}$, а AM е медиана за триъгълника ABC.