## ПУ „Паисий Хилендарски”, ФМИ, катедра „Геометрия”
## *Упражнения по Аналитична геометрия*

---

***Линейни действия със свободни вектори***

---

**1.** Дадени са точките $A$, $B$ и $C$, нележащи на една права. Ако O е произволна точка, да се докаже, че:

а) точката $M$ е среда на отсечката $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$;

б) точката $G$ е медицентър на $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

**2.** В успоредника $ABCD$ точките $M$ и $N$ са среди съответно на $BC$ и $CD$. Точката $P$ е такава, че четириъгълникът $AMPN$ е успоредник. Да се докаже, че точките $A$, $C$ и $P$ са колинеарни.

**3.** Да се докаже, че точките, симетрични на дадена точка относно средите на страните на произволен пространствен четириъгълник, са върхове на успоредник.

**4.** В пространството са дадени два произволни успоредника $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$. Да се докаже, че правите $BB_1$, $CC_1$ и $DD_1$ са успоредни на една и съща равнина.

**5.** Даден е успоредник $ABCD$. Точките $M$ и $N$, съотвотно от отсечките $AB$ и $CA$, са определени чрез равенствата $AM : MB = 1 : 5$ и $AN : NC = 1 : 6$. Да се докаже, че точките $M$, $N$ и $D$ са колинеарни и да се намери отношението, в което $N$ дели отсечката $DM$.

**6.** Дадени са точките $O_1$, $O_2$, $O_3$ и $A$. Симетричната точка на $A$ относно $O_1$ означаваме с $A_1$, на $A_1$ относно $O_2$ - с $A_2$, на $A_2$ относно $O_3$ - с $A_3$, на $A_3$ относно $O_1$ - с $A_4$, на $A_4$ относно $O_2$ - с $A_5$, на $A_5$ относно $O_3$ - с $A_6$. Докажете, че $A_6$ съвпада с $A$.

**7.** Даден е тетраедър $A_1A_2A_3A_4$, за който точките $G_1$, $G_2$, $G_3$, $G_4$ са медицентрове съответно на триъгълниците $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$. Да се докаже, че отсечките $A_1G_1$, $A_2G_2$, $A_3G_3$, $A_4G_4$, минават през една точка $G$ (*медицентър на тетраедъра*), която дели всяка от тези отсечки вътрешно в отношение 3:1, считано от съответния връх.