ПУ "Паисий Хилендарски", ФМИ, Катедра "Геометрия"
Задачи за самостоятелни упражнения по ЛААГ
за специалност ИНФОРМАТИКА

Задача 1. *Да се пресметнат детерминантите:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -5 & 8 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 7 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & -1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} x & x & y & y \\ y & y & z & z \\ 0 & 0 & x & y \\ x & y & z & z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 8 & 7 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Задача 2. *Нека f е линейно преобразуване на R^3 и $e = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ е база на R^3, такава че $f(\vec{e}_1) = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$. Да се намери:*

а) матрицата $A = M_e(f)$; б) аналитичното представяне на f;

в) образът на $\vec{x} = (-1, 3, 5)$ чрез f; г) матрицата A^{-1}, ако A е обратима.

Задача 3. *Да се намерят обратните матрици, ако съществуват, на матриците:*

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. *Нека $e = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ е база на V.*

а) Да се докаже, че $\vec{e'}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e'}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e'}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$ образуват база e' на V.

б) Да се намери матрицата на прехода от базата e към базата e'.

в) Ако векторът $\vec{a} = (-2, 1, 0)$ е зададен относно e, то да се намерят координатите му относно e'.

г) Да се намери матрицата $M_{e'}(f)$, ако f е линейно преобразуване на V и

$$M_e(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. *Да се намери рангът на:*

а) матриците

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 8 & -12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

б) системата вектори $\vec{a}_1 = (3, -1, 3, 2, 5)$, $\vec{a}_2 = (5, -3, 2, 3, 4)$, $\vec{a}_3 = (1, -3, -5, 0, -7)$, $\vec{a}_4 = (2, -2, -1, 1, -1)$ и $\vec{b}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{b}_2 = (-1, 3, 1)$, $\vec{b}_3 = (-1, 13, 5)$.

Задача 6. *Да се решат системите уравнения:*

$$\begin{array}{c} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array};\quad \begin{array}{c} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 4 \end{array};\quad \begin{array}{c} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ 6x_1 + x_2 + 5x_3 = 3 \end{array};$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 4 \\ -x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 12. \end{aligned}$$

Задача 7. *Да се решат матричните уравнения:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Задача 8. *Дадени са точките $A(-1,1,1)$, $B(0,2,2)$, $C(2,0,2)$. Да се докаже, че точките не са колинеарни и да се пресметне:*

а) лицето на триъгълника ABC;
б) синусът на вътрешния ъгъл при върха A на триъгълника ABC;
в) височината през върха A.

Задача 9. *Да се намери уравнението на права:*

а) през точка $A(-1,3)$, успоредна на права p: $3x + 4y - 8 = 0$;
б) през точка $B(1,3)$, перпендикулярна на права q: $3x + 4y - 11 = 0$;
в) през точките $C(1,0)$ и $D(2,2)$;
г) през точка $E(0,3)$ и сключваща ъгъл 120° с оста Ox.

Задача 10. *Даден е триъгълник ABC с върхове $A(-1,-2)$, $B(3,-1)$, $C(0,4)$. Да се намерят:*

а) уравненията на страните на триъгълника ABC;
б) уравнението на медианата през върха A;
в) уравнението на височината през върха A.

Задача 11. *Даден е триъгълник ABC с върхове $A(-4,0)$, $B(1,0)$, $C(1,5)$. Да се намерят:*

а) ъглите на триъгълника ABC;
б) ъглополовящата при върха B на триъгълника ABC;
в) уравнението на описаната около триъгълника окръжност.

Задача 12. *Дадени са точките $A(1,2,-2)$, $B(2,3,1)$ и $C(0,1,3)$. Намерете:*

а) уравнението на равнината през точка A, перпендикулярна на права BC;
б) уравнението на равнината през точките A, B и C.

Задача 13. *Дадени са права $p : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{2}$, точките $A(1,2,0)$, $B(-3,1,2)$ и равнина $\alpha : x - 3y - 3z + 2 = 0$. Намерете:*

а) уравнението на равнината през точка A, успоредна на равнината α;
б) уравнението на равнината през точките A и B, перпендикулярна на α;
в) уравнението на равнината през точка A, минаваща през правата p.

Задача 14. *Дадени са точка $A(2,-2,2)$, права $p : \dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+1}{-3}$ и равнина $\alpha : x + y - z + 5 = 0$. Намерете:*

а) разстоянието от точка A до права p;
б) ортогонално симетричната точка A' на A относно равнината α;
в) разстоянието от точка A до равнината α.

Задача 15. *Спрямо ортонормирана координатна система* $K = Oxy$ *са дадени кривите:*

а) c: $17x^2 + 8y^2 + 12xy + 20\sqrt{5}x + 20 = 0$;

б) c: $x^2 + 4y^2 + 4xy - 20x + 10y - 50 = 0$;

в) c: $4x^2 - y^2 + 10\sqrt{2}xy + 6\sqrt{6}x + 6\sqrt{3}y - 9 = 0$.

Да се намери метричното канонично уравнение за всяка от тези криви и координатните трансформации, чрез които се достига до него. Да се изобрази всяка крива относно дадената координатна система.