

ПУ „Паисий Хилендарски”, ФМИ, катедра „Геометрия”
Задачи за самостоятелни упражнения по ЛААГ
за специалност ИНФОРМАТИКА

1. Точките M и N лежат съответно върху страните AB и BC на $\triangle ABC$, като $AM : MB = BN : NC = 2 : 1$. Точките E и F са среди съответно на AB и BC . Докажете, че E , F и средата на MN са колинеарни.

2. Относно координатна система K в равнината са дадени точките $A(1, -3)$, $B(8, 0)$, $C(4, 8)$ и $D(-3, 5)$.

- а) Да се провери дали A , B и C са колинеарни.
- б) Да се докаже, че четириъгълникът $ABCD$ е успоредник.
- в) Да се намерят координатите на медицентъра G на $\triangle ABC$.

3. Установете за всяка от следните системи вектори дали е линейно зависима или линейно независима:

- а) $(1, -1, 1)$, $(1, 0, 5)$, $(2, -1, 6)$; б) $(2, 1, 0)$, $(0, -2, 4)$, $(1, 0, 1)$.

4. Установете кое от следните множества е векторно пространство:

- а) множеството $N = \{ax^2 + 2bx + (a - b) \in R_2[x] \mid a, b \in R\}$;
- б) множеството $M = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x + y + z = 0, x - y - z = 0\}$;
- в) множеството на матриците от вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a + c \end{pmatrix}$, $(a, b, c \in R)$;
- г) множеството на матриците от вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 2 & a - c \end{pmatrix}$, $(a, b, c \in R)$.

Определете размерността на векторните пространства.

5. Нека $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ е координатна система в пространството. Да се докаже, че правата AB пресича равнината CDE , ако $\vec{OA} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$, $\vec{OB} = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$, $\vec{OC} = \vec{e}_2$, $\vec{OD} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{OE} = \vec{e}_3 + \vec{e}_2$. Да се намерят координатите на пресечната им точка M спрямо K .

6. Ако $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, да се пресметнат $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{a}^2$, $\vec{b}^2$, $(\vec{a} - \vec{b})^2$, $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - 3\vec{b})$.

7. Да се пресметне $(\vec{a} + \vec{b})(3\vec{a} - \vec{b})$, ако $\vec{a}(1, -1, 0)$, $\vec{b}(-2, 0, 3)$ относно декартова координатна система. Да се намери косинусът на ъгъла между векторите $\vec{p} = (\vec{a} + \vec{b})$ и $\vec{q} = (3\vec{a} - \vec{b})$.

8. Ако $\angle(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, да се намери $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi$.

9. Докажете, че множеството $R_2[x]$ снабдено с действието:

$$\vec{P} = a_2x^2 + a_1x + a_0, \vec{Q} = b_2x^2 + b_1x + b_0 \rightarrow \vec{P}\vec{Q}, \vec{P}\vec{Q} = 4a_0b_0 + (a_2 + a_1)b_1 + (a_1 + 2a_2)b_2$$

е евклидово векторно пространство. Пресметнете косинуса на ъгъла между $\vec{P}_1 = x^2 + x$, $\vec{Q}_1 = -x^2 + x - 1$.