15. Анализ на дислокацията на нови производствени и търговски обекти

Всеки нов завод, производствен или търговски склад е свързан с появата на ново разпределение на превозите на стоките, зависещо от производствените, транспортните или други логистични разходи.

Пример 1. Заводите на една компания, намиращи се в пунктовете A и B снабдяват дистрибуционните центрове C и D. Информацията за мощностите на заводите (доставчиците), търсенето на дистрибуционните центрове (потребителите), както и транспортните тарифи са приведени в таблицата

	$C, 50$	$D, 80$
$A, 40$	2	3
$B, 60$	5	4

За да покрие цялото търсене, компанията решава да построи още един завод в един от двата пункта: E или F. Стойността на превоза на единица стока от пункта E (F) до пунктовете C и D е равна на 5 и 2 (3 и 4). Да се определи вариант, при който общата стойност на транспортните разходи е минимална.

Решение:

Мощността на новия завод е 50 + 80 – (40 + 60) = 30. За всеки от пунктовете E и F (като потенциални дислокации на новия завод) ще решим отделни транспортни задачи.

В случай на построяване на нов завод в пункта E транспортната задача ще има вида

	50	80
40	2	3
60	5	4
30	5	2

Изготвяме начален опорен транспортен план по метода на северозападния ъгъл. Той има вида

	50	80

40	2 40	3
60	5 10	4 50
30	5	2 30

За този план правим оценки на редовете и стълбовете

	50	80	v_i
40	2 40	3	-2
60	5 10	4 50	-5
30	5	2 30	-3
v^j	0	1	

Матрицата на оценките ще има вида

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

което показва, че началният опорен план е оптимален. За общите транспортни разходи ще имаме

$$TC_{min}^{E} = 2.40 + 5.10 + 4.50 + 2.30 = 80 + 50 + 200 + 60 = 390$$

Сега да разгледаме транспортната задача, свързана с изграждането на новия завод в пункт F. Тя има вида

	50	80
40	2	3
60	5	4
30	3	4

Разбира се началният опорен план е същият. Правим оценки на редовете и стълбовете

	50	80	v_i
40	2 40	3	-2

60	5 10	4 50	-5
30	3	4 30	-5
v^j	0	1	

и матрица на оценките

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Поради наличието на отрицателно число (оценката на клетка (3,1) е -2) този опорен план е неоптимален и се налага неговото подобряване. Правим преразпределителен цикъл: $\big((3,1) - \text{празна}\big)^+ \rightarrow \big((2,1) - 10\big)^- \rightarrow \big((2,2) - 50\big)^+ \rightarrow \big((3,2) - 30\big)^- \rightarrow \big((3,1) - \text{празна}\big)^+$. Тъй като клетките със знак „–“ са $(2,1)$ с превоз 10 и $(3,2)$ с превоз 30 и $min\{10{,}30\} = 10$ от тези клетки се изважда 10, а към клетките със знак „+“ (това са клетки $(3,1)$ и $(2,2)$) се прибавя 10. Това води до нов транспортен план

	50	80
40	2 40	3
60	5	4 60
30	5 10	2 20

Оценките на редовете и стълбовете са

	50	80	v_i
40	2 40	3	-2
60	5	4 60	-3
30	3 10	4 20	-3
v^j	0	-1	

а матрицата на оценките

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

което показва, че транспортният план е оптимален. Тогава минимумът на общите транспортни разходи ще бъде

$$TC_{min}^{F} = 2.40 + 4.60 + 3.10 + 4.20 = 80 + 240 + 30 + 80 = 430$$

Тъй като

$$TC_{min}^{E} = 390 < 430 = TC_{min}^{F},$$

то новият завод трябва да бъде построен в пункт E.

В пример 1 търсенето превъзхожда предлагането. По аналогичен начин се решава въпроса когато производствените мощности надвишават капацитетите на търсене в пунктовете за дистрибуция – решават се няколко транспортни модели за алтернативни дистрибуционни центрове.

16. Унгарски метод за решаване на задачата за назначенията

Алгоритъма на така наречения унгарски метод за решаване на задачата за назначенията е следния:

1) Във всеки ред намираме минимален елемент и го изваждаме от всички елементи в реда;
2) Във всеки стълб на получената матрица намираме минимален елемент и го изваждаме от всички елементи на стълба;
3) Намираме ред с една нула. Тази нула заграждаме в кръгче 0 и наричаме отбелязана. В стълба, в който е отбелязаната нула всички останали нули се зачеркват и повече не се разглевдат. Тази стъпка продължаваме докато е възможно.
4) Намираме стълб с една нула и я отбелязваме. В реда, в който е отбелязаната нула се зачеркват всички останали нули. Тази стъпка продължава докато е възможно.
5) Ако след стъпки 3) и 4) има още неотбелязани нули, то отбелязваме коя да е от тях, а в реда и стълба, в която е отбелязаната нула всички останали нули се зачеркват.
6) Ако всеки ред и стълб съдържа по една отбелязана нула, то оптималното решение е намерено. Всяка от отбелязаните нули указва съответствието между доставчик и потребител. В противен случай прекарваме минималния възможен брой пресичащи се вертикални и хоризонтални линии през всички нули. Сред останалите не зачеркнати елементи намираме минималния, изваждаме го от всички не зачеркнати елементи и го

прибавяме към всички елементи, намиращи се на пресечните точки на линиите. Към получената матрица прилагаме алгоритъма, започвайки от 3).

Пример 2. Има четири бази A_1, A_2, A_3 и A_4 и четири търговски точки B_1, B_2, B_3 и B_4. Разстоянията между базите и търговските точки са зададени с матрицата

10	20	12	5
3	14	9	1
13	8	6	9
7	15	8	10

Трябва да се намери взаимно еднозначно съответствие между бази и търговски точки, така че сумата от разстоянията да е минимална.

Решение:

Намираме минимумите по редове и ги изваждаме от всички елементи на съответния ред

10	20	12	5	-5	$\rightarrow$	5	15	7	0
3	14	9	1	-1	$\rightarrow$	2	13	8	0
13	8	6	9	-6	$\rightarrow$	7	2	0	3
7	15	8	10	-7	$\rightarrow$	0	8	1	3

Намираме минимумите по стълбовете на получената матрица и ги изваждаме от всички елементи на съответния стълб

10	20	12	5	→	5	13	7	0
3	14	9	1	→	2	11	8	0
13	8	6	9	→	7	0	0	3
7	15	8	10	→	0	6	1	3
-0	-2	-0	-0					

Първият и четвъртият ред са с по една нула. Получаваме

5	13	7	0
2	11	8	~~0~~
7	0	0	3
0	6	1	3

Вторият и третият стълб са с по една нула. Ако изберем втория, получаваме

5	13	7	0
2	11	8	~~0~~
7	0	~~0~~	3
0	6	1	3

Назначителният план е неоптимален (има само три отбелязани нули). Минималният брой линии, зачеркващи всички нули е 3 – третия ред, първия и четвъртия стълб. Получаваме

5	13	7	0
2	11	8	~~0~~
7	0	~~0~~	3
0	6	1	3

Тъй като $min\{13,7,11,8,6,1\} = 1$, то получаваме нива матрица на назначенията

5	12	6	0
2	10	7	0
8	0	0	4
0	5	0	3

която преработваме по същия начин и получаваме

5	12	6	0
2	10	7	~~0~~
8	0	~~0~~	4
0	5	~~0~~	3

Имаме $min\{5,12,6,2,10,7\} = 2$ и получаваме нов назначителен план

3	10	4	0
0	8	5	$\cancel{0}$
8	0	$\cancel{0}$	6
$\cancel{0}$	5	0	5

Във всеки ред и стълб на горната назначителна матрица има по една отбелязана нула. Това е оптималното разпределение. Възможно е то да не е единствено. Съответствията (назначенията) са $A_1 \leftrightarrow B_4$, $A_2 \leftrightarrow B_1$, $A_3 \leftrightarrow B_2$ и $A_4 \leftrightarrow B_3$. Сумарните разстояния са (от първоначално зададения вид на матрицата)

$$c_{14} + c_{21} + c_{32} + c_{43} = 5 + 3 + 8 + 8 = 24.$$

17. Линейна разпределителна задача

Съществената отлика на линейната разпределителна задача (РЗ) от ТЗ е това, че в РЗ дейностите и ресурсите се измерват в различни измервателни единици.

Входящи (дадени) величини на ТЗ (екзогенни величини на модела):

1) n на брой изпълнители $A_1, A_2, \dots, A_n$ и m на брой дейности $B_1, B_2, \dots, B_m$;
2) a_i – запас от ресурса на изпълнителя A_i, $i = 1,2, \dots, n$. Тези величини се измерват в единици на ресурса;
3) b_j – обем от дейността B_j, която трябва да бъде извършена; $j = 1,2, \dots, m$. Тези величини се измерват в единици на дейността;
4) p_{ij} – интензивност (технологична норма) на изпълнението на дейността B_j от изпълнителя A_i – измерва се в единици на дейността/единици на ресурса.

Изходящи (търсени) величини на ТЗ (ендогенни величини на модела):

1) x_{ij} – планираното количество от ресурса на изпълнителя A_i за изпълнение на дейността B_j, така че общите изразходени ресурси да са минимални. Тези величини се измерват в единици на ресурса;
2) $F(X)$ – общото количество изразходени ресурси на изпълнителите.

Търсените величини x_{ij} трябва да изпълняват следните ограничения:

1) Всички дейности трябва да бъдат извършени в планирания обем:
$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij}x_{ij} = b_j \quad \text{за } j = 1,2,\dots,m.$$

2) Не трябва да се превишават ресурсите на изпълнителите:
$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq a_i \quad \text{за } i = 1,2,\dots,n.$$

При така наложените ограничения, трябва да се минимализира сумата от вложените планови ресурси на всички изпълнители за извършване на всички дейности, т.е.

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \to min$$

Обобщена разпределителна задача. Предполага се, че може да се направи остойностяване: нека c_{ij} разхода за извършване на единица от дейността B_j от изпълнителя A_i, измерена в лв. за единица от дейността. Тогава общите разходи ще бъдат

$$F_1(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}p_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}y_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} s_{ij}x_{ij}\,,$$

където $y_{ij} = p_{ij}x_{ij}$ е обема на дейността B_j, извършена от изпълнителя A_i (измерва се в единици от дейността), а $s_{ij} = c_{ij}p_{ij}$ е разхода за влагане на единица от ресурса на изпълнителя A_i за извършване на дейността B_j (измерва се в лв за единица от ресурса). Тогава под обобщена разпределителна задача (ОРЗ) ще разпираме минимализирането на общите разходи за извършването от всички дейности, т.е.

$$F_1(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}p_{ij}x_{ij} \to min$$

при наличието на всички ограничения като в РЗ. Разбира се, ако ресурсите и дейностите се измерват в една и съща единица и всички интензивности съвпадат, то ОРЗ се превръща в ТЗ.

Забележка. Горните три форми на записване на целевата функция на ОРЗ са еквивалентни. Може да се използва коя да е от тях, като съответно се калкулират финансови показатели на единица от дейността (при c_{ij}) или на единица от ресурса (при s_{ij}).

Системата от ограничения за РЗ и ОРЗ е много близка до тези при ТЗ. Единственото отличие от ТЗ е наличието на технологични коефициенти (интензивности) p_{ij}. Ако те са пропорционални, т.е. технологичната матрица

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nm} \end{pmatrix}$$

е с пропорционални редове, РЗ (и ОРЗ) може да бъде сведена до ТЗ, в противен случай има методи за решаване на РЗ, различни от тези за ТЗ. РЗ (в общия случай) е промеждутъчна по трудност между ТЗ и общата задача на линейното програмиране (решаваща се със симплекс метод).

РЗ се използва често при решаването на различни логистични модели:

1) за разпределението на товари в различни видове вагони, контейнери, товарни автомобили, самолети, речни и морски плавателни съдове;
2) за разпределението на машинно, строително и друго оборудване по видове дейности и изделия;
3) за разпределението на многономенклатурни производствени програми между предприятията на един холдинг.

18. Решаване на РЗ по метода на разрешаващите множители

Методът на разрешаващите множители се прилага в случаите, когато редовете на технологичната матрица $P = (p_{ij})$ са непропорционални.

Алгоритъмът на метода на разрешаващите множители се състои в следното. Отначало се съставя разпределителен план, обезпечаващ минимум на целевата функция, но неотговарящ на ограниченията на задачата. След това се търси допустим оптимален план. За целта:

1) Във всеки стълб се намира клетка с максимална интензивност. В нея се поставя целия обем на дейността за този стълб и необходимия ресурс за изпълнението ѝ, принадлежащ на изпълнителя, намиращ се на този ред (според въпросната интензивност).
2) Пресмятат се сумите от ресурси, техните излишъци или дефицити по редове. Задачата се счита за решена, ако всички редове са с еднакви знаци

– „–“, съответстващ на недостиг на ресурс или „+“, съответстващ на излишък. В случай, че това не е така, се прави корекция на началния план за разпределение на дейностите по изпълнители.

3) За тази корекция за всеки стълб се намира разрешаващ множител λ_j, пресмятащ се по формулата

$$\lambda_j = \frac{p_j^{*(-)}}{p_j^{max(+)}}$$

където $p_j^{*(-)}$ е интензивността в заета клетка с недостиг на ресурс; $p_j^{max(+)}$ - максималната интензивност на клетките в редовете с излишък на ресурс. Разрешаващите множители за всички стълбове се сравняват помежду си и за

следващите разчети се взема минималния разрешаващ множител.

4) Всички интензивности в редовете с „+“ (излишък на ресурс) се умножават с разрешаващия множител. Чрез клетките, при които се получава изравняване на интензивностите се прави преразпределение на обемите от дейности и ресурси. Тези корекции се извършват съобразно истинските интензивности и така, че сумата от излишък и недостиг да е минимална.
5) Ако задачата не е решена, се повтарят всички стъпки, започвайки от 2).

Пример 3. Разполагаме с три вида вагони A_1, A_2 и A_3, на които трябва да се натоварят четири вида стоки B_1, B_2, B_3 и B_4. В следващата таблица са дадени: наличните ресурси (брой вагони от всеки вид), плановите дейности (тонове от всяка стока, които трябва да се натоварят на вагоните) и интензивностите (колко тона от всеки вид стока могат да бъдат натоварен на всеки тип вагони).

Количество вагони (брой)		Количество стоки за натоварване (тона)			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		100	120	150	150
A_1	10	10	11	13	15
A_2	15	12	14	10	11
A_3	20	13	10	11	12

Да се намери оптимален разпределителен план за натоварване на всички количества стоки, като се използват наличните вагони.

Решение:

В първия стълб най-голямата интензивност е на A_3 – 13; за да може цялото количество от първата стока да бъде натоварено във вагони от третия вид, ще ни трябват $100/13 = 7{,}69$ вагона. Тъй като вагоните са неделими, ще използваме 8 вагона и в клетка (3,1) записваме 8/100. Във втория стълб най-високата интензивност е тази на A_2 – 14, за цялото колияество от втората стока са необходими $120/14 = 8{,}57$ вагона от втория вид, затова в клетка (2,2) записваме 9/120. По аналогичен начин в клетка (1,3) ще трябва да запишем 12/150, а в клетка (1,4) – 10/150. Така получаваме началния оптимален план

Количество вагони (брой)		Количество стоки за натоварване (тона)			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		100	120	150	150
A_1	10	^{10}	^{11}	^{13} 12/150	^{15} 10/150
A_2	15	^{12}	^{14} 9/120	^{10}	^{11}
A_3	20	^{13} 8/100	^{10}	^{11}	^{12}

Сега ще трябва да оценим излишъците/дефицитите по редове. За първия ред – използвани са $12 + 10 = 22$ вагона при налични 10, следователно ще имаме недостиг от 12 вагона от първия вид и в новия най0десен стълб на разпределителната таблица ще запишем -12. За вагоните от втория вид при този разпределителен план ще има излишък от 6 вагона, затова в последния стълб за втори ред записваме $+6$. Аналогично за третия вид вагони излишъкър е 12, записваме $+12$. Така получаваме таблицата

Количество вагони (брой)		Количество стоки за натоварване (тона)				Излишъци Или дефицити
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		100	120	150	150	
A_1	10	^{10}	^{11}	^{13} 12/150	^{15} 10/150	-12
A_2	15	^{12}	^{14} 9/120	^{10}	^{11}	$+6$
A_3	20	^{13} 8/100	^{10}	^{11}	^{12}	$+12$

Сега чрез разрешаващите множители λ_j стоки от вагоните A_1 (с недостиг) към вагоните A_2 и A_3 (с излишък). Преди това да отбележим, че стойността на целевата функция е

$$F(X) = x_{13} + x_{14} + x_{22} + x_{31} = 12 + 10 + 9 + 8 = 39$$

но ограниченията на разпределителната задача не са изпълнени. Ще трябва да пресметнем разрешаващите множители λ_3 и λ_4. За λ_3 имаме $p_3^{*(-)} = p_{13} = 13$; $p_3^{max(+)} = max\{p_{23}, p_{33}\} = max\{10{,}11\} = 11$, следователно $\lambda_3 = 13/11 = 1{,}182$. Аналогично за λ_4 имаме $p_4^{*(-)} = p_{14} = 15$; $p_4^{max(+)} = max\{p_{24}, p_{34}\} = max\{11{,}12\} = 12$ и $\lambda_4 = 15/12 = 1{,}25$. В новата разпределителна таблица добавяме още един ред за разрешаващите множители и получаваме

Количество вагони (брой)		Количество стоки за натоварване (тона)				Излишъци Или дефицити
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		100	120	150	150	
A_1	10	10	11	13 12/150	15 10/150	-12
A_2	15	12	14 9/120	10	11	$+6$
A_3	20	13 8/100	10	11	12	$+12$
λ_j		-	-	$\lambda_3 = 1{,}182$	$\lambda_4 = 1{,}25$	

За разрешаващ множител в случая ще вземем по-малкия - $\lambda_3 = 1{,}182$. Всички интензивности от втория и третия ред (с излишъци) умноваваме с $\lambda_3 = 1{,}182$ и получаваме

Количество вагони (брой)		Количество стоки за натоварване (тона)				Излишъци Или дефицити
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		100	120	150	150	
A_1	10	10	11	13 12/150	15 10/150	-12
A_2	15	14,18	16,55 9/120	11,82	13	$+6$
A_3	20	15,37 8/100	11,82	13	14,18	$+12$

Изравняване на новите интензивности по стълбове (като следим запълнените клетки от първия ред) имаме при клетки (1,3) – запълнена и (3,3) – празна. Следователно ще трябва да преразпределяме товари и вагони от клетка (1,3) към клетка (3,3). Това преразпределяне е на базата на истинските (дадени по условие) интензивности. Нека x на брой вагони от първия вид да заменим с вагони от третия вид, тогава (като имаме пред вид, че истинските интензивности на вагоните от първи и трети вид по отношение на третата стока са 13 и 11 съответно) вагоните от третия вид ще бъдат $\frac{13}{11}x$ на брой. При това положение дисбалансът при вагоните от първия вид ще бъде $12 - x$ за $0 < x \leq 12$(дефицит), а дисбалансът при вагоните от третия вид - $\left|12 - \frac{13}{11}x\right|$. Минимумът на общия дисбаланс $12 - x + \left|12 - \frac{13}{11}x\right|$ се достига при $\left|12 - \frac{13}{11}x\right| = 0$ или $x = 10{,}15$. Понеже ни трябва целочислен брой вагони, вземаме най-близкото цяло число, следователно $x = 10$. Тогава (за третата стока) намаляме вагоните от първия вид с 10, а увеличашаме вагоните от втория тип с 12. Ако използваме пълния капацитет на вагоните от третия вид, то в тях може да сложим 132 тона от третата стока, тогава за двата вагона от първия вид остават 18 тона (капацитетът им е 26 тона). Така получаваме новата разпределителна таблица

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">Количество
вагони (брой)</td><td colspan="4">Количество стоки за натоварване (тона)</td><td rowspan="3">Излишъци
Или
дефицити</td></tr>
<tr><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>B_4</td></tr>
<tr><td>100</td><td>120</td><td>150</td><td>150</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>10</td><td>10</td><td>11</td><td>13
2/18</td><td>15
10/150</td><td>-2</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>15</td><td>14,18</td><td>16,55
9/120</td><td>11,82</td><td>13</td><td>$+6$</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>20</td><td>15,37
8/100</td><td>11,82</td><td>13
12/132</td><td>14,18</td><td>0</td></tr>
</table>

От новата таблица се вижда, че оценката на третия ред е 0 (липса както на излишък, така и на дефицит), така че може да забравим за него. Може да продължим да преразпределяме по метода на разрешаващите множители, но може и да забележим, че тези 18 тона, поставени във вагоните от първи вид могат да се поберат и в два вагона от втори вид (тъй като при истинска интензивност по отношение на третата стока 10, техния капацитет е 20 тона). Така получаваме допустимото разпределение

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">Количество
вагони (брой)</td><td colspan="4">Количество стоки за натоварване (тона)</td><td rowspan="3">Излишъци
Или
дефицити</td></tr>
<tr><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>B_4</td></tr>
<tr><td>100</td><td>120</td><td>150</td><td>150</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>10</td><td>10</td><td>11</td><td>13</td><td>15
10/150</td><td>0</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>15</td><td>14,18</td><td>16,55
9/120</td><td>11,82
2/18</td><td>13</td><td>$+4$</td></tr>
</table>

A_3	20	15,37 8/100	11,82	13 12/132	14,18	0

Стойността на целевата функция е

$$F(X) = x_{14} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{33} = 10 + 9 + 2 + 8 + 12 = 41.$$

Това е решението на задачата – първата стока се товари на 8 вагона от трети вид, втората – на 9 вагона от втори тип, третата – на 2 вагона от втори тип и на 12 вагона от трети, четвъртата – на 10 вагона от първи вид, като 4 вагона от втори вид са излишни.

Пример 4. Едно предприятие разполага с три машини A_1, A_2 и A_3, с които трябва да се произведат четири детайла B_1, B_2, B_3 и B_4 в количества от 800, 1000, 600 и 400 бройки съответно. Свободното машинно време на машините (поради натовареността им и с производството на други детайли) е 2, 3 и 4 часа съответно. В таблица са дадени интензивностите на всяка от машините по отношение на всеки от детайлите, измерени в брой детайли за една минута машинно време

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	3	4
A_2	3	4	5	2
A_3	5	6	4	3

Да се състави план за производство на детайлите в необходимите бройки, като се използват машините в рамките на капацитетите им от машинно време.

Решение:

Съставяме оптимален план, оценяваме дисбалансите по редове и пресмятаме разрешаващите множители

Машини със съответното им машинно време в мин.		Детайли, които трябва да се произведат в бр.				Излишъци Или дефицити
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		800	1000	600	400	
A_1	120	1	2	3	4 100/400	$+20$
A_2	180	3	4	5 120/600	2	$+60$
A_3	240	5 160/800	6 167/1000	4	3	-87
λ_j		$\lambda_1 = 1{,}67$	$\lambda_2 = 1{,}5$	-	-	

Вземаме по-малкия от двата разрешаващи множителя $\lambda_2 = 1{,}5$ и с негова помощ преизчисляваме всички интензивности в първи и втори ред. Получаваме

Машини със съответното им машинно време в мин.		Детайли, които трябва да се произведат в бр.				Излишъци Или дефицити
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		800	1000	600	400	
A_1	120	1,5	3	4,5	6 100/400	$+20$
A_2	180	4,5	6	7,5 120/600	3	$+60$
A_3	240	5 160/800	6 167/1000	4	3	-87

Изравняване на интензивностите имаме в клетките (2,2) и (3,2), така че трябва да преразпределяме детайли от втори вид от третата машина към първата. Ако от третата машина отнемем x мин. машинно време, то към втората нашина ще трябва да прибавим $1{,}5x$ мин. (на базата на истинските им интензивности за втория детайл, които са 6 бр./мин. за третата и 4 бр./мин за втората). Тогава общия дисбаланс за двете машини ще бъде $87 - x + |60 - 1{,}5x|$ при $x \leq 87$. Минимален дисбаланс се получава ако $|60 - 1{,}5x| = 0$ или $x = 40$. Така получаваме нов разпределителен план със съответните дисбаланси и разрешаващи множители

Машини със съответното им машинно време в мин.		Детайли, които трябва да се произведат в бр.				Излишъци Или дефицити
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		800	1000	600	400	
A_1	120	1,5	3	4,5	6 100/400	$+20$
A_2	180	4,5	6 60/240	7,5 120/600	3	0
A_3	240	5 160/800	6 127/760	4	3	-47
λ_j		$\lambda_1 = 3{,}33$	$\lambda_2 = 2$	-	-	

Вземаме $\lambda_2 = 2$ и преизчисляваме интензивностите от първия ред

Машини със съответното им машинно време в мин.		Детайли, които трябва да се произведат в бр.				Излишъци Или дефицити
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		800	1000	600	400	
A_1	120	3	6	9	12 100/400	$+20$
A_2	180	4,5	6 60/240	7,5 120/600	3	0
A_3	240	5 160/800	6 127/760	4	3	-47

Изравнените интензивности между пълна и празна клетка във втори стълб са в клетки (3,2) и (1,2), така че ще прехвърляме бройки от второя детайл от третата към първата машина. Ако от третата машина отнемем x мин. машинно време, то към първата нашина ще трябва да прибавим $3x$ мин. (на базата на истинските им интензивности за втория детайл, които са 6 бр./мин. за третата и 2 бр./мин за първата). Тогава общия дисбаланс за двете машини ще бъде $47 - x + |20 - 3x|$ при $x \leq 47$. Минимален дисбаланс се получава ако $|20 - 3x| = 0$ или $x = 6{,}67$. Вземаме най-близкото цяло число (приели сме машинното време да се пресмята в цели минути), така че $x = 7$. Получаваме следния разпределителен план

Машини със съответното им машинно време в мин.		Детайли, които трябва да се произведат в бр.				Излишъци Или дефицити
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		800	1000	600	400	
A_1	120	3	6 20/40	9	12 100/400	0
A_2	180	4,5	6 60/240	7,5 120/600	3	0
A_3	240	5 160/800	6 120/720	4	3	-40

който не подлежи на подобряване. Така че производствения план не мове да бъде изпълнен – необходимо е още 40 мин. машинно време на втората машина. В рамките на съществуващите капацитети на машините трябва да се избира мевду две възможности – да не се произведат 200 броя от планираните 800 броя от първия детайл или да не се произведат 240 броя от планираните 1000 броя за втория детайл.

19. Решаване на ОРЗ чрез свеждането ѝ до ТЗ

Това може да стане само в случаите, когато матрицата на интензивностите

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nm} \end{pmatrix}$$

е с пропорционални редове.

Етапи на решаване на ОРЗ.

I. Преобразуване на ОРЗ в ТЗ

1) Избор на базов изпълнител. От всички номера на изпълнителите $i = 1,2,\dots,n$ фиксираме един, например $i = k$; тогава пресмятаме нормираните интензивности

$$\lambda_i = \frac{p_{ij}}{p_{kj}}$$

Припомняме, че интензивностите са пропорционални, т.е. $\frac{p_{i1}}{p_{k1}} = \cdots = \frac{p_{ij}}{p_{kj}} = \dots = \frac{p_{in}}{p_{kn}}$.

2) Преизчисляване на запасите от ресурси на изпълнителите по формулата

$$a_i' = \lambda_i a_i$$

3) Преизчисляване на планираните обеми на дейностите по формулата

$$b_j' = \frac{b_j}{p_{kj}}$$

Тъй като b_j се измерват в единици от дейността, а p_{kj} – в единици от дейността/единци от ресурса, то величините b_j' ще се измерват в единици от ресурса. Следователно a_i' и b_j' ще се измерват в едни и същи единици (така, както е при ТЗ).

4) Преизчисляване на тарифните коефициенти по формулата

$$c_{ij}' = p_{kj} c_{ij}$$

Да припомним, че c_{ij} се измерват в лв/единица дейност, а p_{kj} – в единици от дейност/единци от ресурс, то новите тарифни коефициенти c_{ij}' ще се измерват в лв/единица ресурс.

Така вече всички екзогенни величини на модела са приведени към ресурси, следователно ОРЗ се е превърнала в ТЗ.

II. **Проверка на баланса**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i' = \sum_{j=1}^{m} b_j'$$

и построяване на транспортна таблица.

III. **Намиране на оптималното решение на съответната ТЗ**

$$X' = \left(x_{ij}'\right)$$

IV. **Преобразуване на оптималното решение на ТЗ в оптимално решение на ОРЗ** по формулата

$$x_{ij} = \frac{x_{ij}'}{\lambda_i}$$

Тъй като x_{ij}' се измерват в единици ресурс, а λ_i е нормиращ множител, то x_{ij} ще се измерва в единици ресурс.

V. **Определяне на обемите дейности, които трябва да бъдат извършени от изпълнителите** по формулата

$$y_{ij} = p_{ij} x_{ij}$$

VI. **Пресмятане на целевата функция на ОРЗ.**

Пример 5. Във фабрика се експлоатират три типа тъкачни станове и се произвеждат четири типа тъкани. Известни са следните данни за производството:

1) Производителността на становете по тъкани в м./ч.

$$\left(p_{ij}\right) = \begin{vmatrix} 24 & 30 & 18 & 42 \\ 12 & 15 & 9 & 21 \\ 8 & 10 & 6 & 14 \end{vmatrix}$$

2) Себестойността на тъканите по станове в лв./м.

$$\left(c_{ij}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

3) Машинното време на становете: 90, 220 и 180 ч.
4) Планирания обем производство на тъканите: 1200, 900, 1800 и 840 м.

Трябва да се разпределят тъканите по станове, така че всички тъкани да бъдат произведени в планираните обеми с минимални разходи.

Решение:

Нека x_{ij} е времето през което i-ят стан трябва да произвежда j-тата тъкан. Разпределителната таблица ще изглежда така

Станове със съответното им машинно време в мин.		Тъкани, които трябва да се произведат в м.			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		1200	900	1800	840
A_1	90	2 24	1 30	3 18	1 42
A_2	220	3 12	2 15	4 9	1 21
A_3	180	6 8	3 10	5 6	2 14

Целевата функция ще има вида

$$\begin{aligned} F(X) = {} & 2.24.x_{11} + 1.30.x_{12} + 3.18.x_{13} + 1.42.x_{14} + 3.12.x_{21} + 2.15.x_{22} \\ & + 4.9.x_{23} + 1.21.x_{24} + 6.8.x_{31} + 3.10.x_{32} + 5.6.x_{33} + 2.14.x_{34} \\ & = 48x_{11} + 30x_{12} + 54x_{13} + 42x_{14} + 36x_{21} + 30x_{22} + 36x_{23} + 21x_{24} \\ & + 48x_{31} + 30x_{32} + 30x_{33} + 28x_{34} \to min \end{aligned}$$

Ограниченията ще са

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 90$$

$$x_{21} + x_{22} + 36 + x_{24} \leq 220$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 180$$

$$24x_{11} + 12x_{21} + 8x_{31} = 1200$$

$$30x_{12} + 15x_{22} + 10x_{32} = 900$$

$$18x_{13} + 9x_{23} + 6x_{33} = 1800$$

$$42x_{14} + 21x_{24} + 14x_{34} = 840$$

Преобразуваме ОРЗ в ТЗ, т.е. представяме задачата във вида, при който всички тъкани се произвеждат от един стан – базовия и всички параметри на задачата са съгласувани с неговите характеристики. В качеството на базов стан може да се избере всеки, например стана с най-висока производителност A_1. Определяме интензивностите λ_i, нормирани по базовия стан.

$$\lambda_1 = \frac{p_{1j}}{p_{1j}} = 1;\ \lambda_2 = \frac{p_{2j}}{p_{1j}} = \frac{1}{2};\ \lambda_3 = \frac{p_{3j}}{p_{1j}} = \frac{1}{3}$$

Преизчисляваме запасите от време (все едно, че всички станове работят с производителността на първия стан)

$$a_1' = \lambda_1 a_1 = 1.90 = 90;\ a_2' = \lambda_2 a_2 = \frac{1}{2} \cdot 220 = 220;\ a_3' = \lambda_3 a_3 = \frac{1}{3} \cdot 180 = 60$$

Преизчисляваме планираните обеми в часове, необходими за първият стан да ги произведе

$$b_1' = \frac{b_1}{p_{11}} = \frac{1200}{24} = 50;\ b_2' = \frac{b_2}{p_{12}} = \frac{900}{30} = 30;\ b_3' = \frac{b_1}{p_{13}} = \frac{1800}{18} = 100;\ b_4' = \frac{b_4}{p_{14}} = \frac{840}{42}$$

Преизчисляване на тарифните коефициенти по формулата

$$c_{ij}' = p_{1j} c_{ij}$$

и получаваме транспортната таблица

Станове		Тъкани			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		50	30	100	20
A_1	90	48	30	54	42
A_2	110	72	60	72	42
A_3	60	144	90	90	84

Извършваме проверка за балансираност на така получения транспортен модел

$$a_1' + a_2' + a_3' = 90 + 110 + 60 = 260$$

$$b_1' + b_2' + b_3' + b_4' = 50 + 30 + 100 + 20 = 200$$

Моделът е небалансиран, следователно трябва да въведем още една (фиктивна) тъкан B_5 с общ ресурс $b_5' = 60$ и нулеви коефициенти c_{i5}' и получаваме транспортната таблица

Станове		Тъкани				
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		50	30	100	20	60
A_1	90	48	30	54	42	0
A_2	110	72	60	72	42	0
A_3	60	144	90	90	84	0

Решаваме ТЗ и получаваме оптималния транспортен план

$$X' = \left(x'_{ij}\right) = \begin{vmatrix} 50 & 30 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 90 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 60 \end{vmatrix}$$

Да припомним, че x'_{ij} означава колко часа трябва да работи i-я стан за да произвежда j-тата тъкан, ако има производителността на първия (базов) стан.

Сега пресмятаме x_{ij} по формулата $x_{ij} = \frac{x'_{ij}}{\lambda_i}$ с което получаваме яасовете работа на становете по тъкани

$$X = \left(x_{ij}\right) = \begin{vmatrix} 50 & 30 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 180 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 180 \end{vmatrix}$$

По такъв начин първият стан трябва да работи 50 ч. за да произвежда първата тъкан, 30 ч. за производството на втората тъкан и 10 ч. за производството на третата. Вторият стан ще е ангажиран 180 ч. за производството на третата тъкан и 40 ч. за производството на четвъртата. Третият стан няма да работи (защото му се пада да произвежда с целия си ресурс петата, фиктивна тъкан).

Може да пресметнем и по колко м. от тъканите ще произведат всички станове (по формулата $y_{ij} = p_{ij}x_{ij}$). Получаваме

$$Y = \left(y_{ij}\right) = \begin{vmatrix} 1200 & 900 & 180 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1620 & 840 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - \end{vmatrix}$$