11. Транспортна задача

Разпределителните модели възникват в икономическите ситуации, когато наличните ресурси не достигат за изпълнението на всички набелязани дейности и е необходимо ресурсите да се разпределят по дейности съгласно набелязаните критерии за оптималност.

11.1. Стандартна транспортна задача.

Транспортната задача (ТЗ) се явява основен пример за линейна разпределителна задача. В ТЗ дейностите и необходимите за тях ресурси се измерват с едни и същи единици (имат еднаква размерност). Ш тези задачи ресурсите могат да се разпределят между дейностите и отделните дейности могат да се изпълняват с различни комбинации от ресурси. Пример за типична ТЗ се явява задачата за разпределението (транспортирането) на продукция, намираща се в складове на доставчици до обекти на потребители.

Стандартната ТЗ се определя като задача за разработването на най-икономичен план за транспортиране на продукция от един вид от няколко входни пунктове (доставчици или производители) до други изходни пунктове (потребители).

Входящи (дадени) величини на ТЗ (екзогенни величини на модела):

1) n на брой доставчици $A_1, A_2, \dots, A_n$ и m на брой потребители $B_1, B_2, \dots, B_m$;
2) a_i – запас от стоката ш пункта на доставчика A_i, $i = 1,2, \dots, n$;
3) b_j – търсене на стоката от потребителя B_j, $j = 1,2, \dots, m$;
4) c_{ij} – стойността на превоза на единица количество от стоката от доставчика A_i до потребителя B_j.

Изходящи (търсени) величини на ТЗ (ендогенни величини на модела):

1) x_{ij} – количеството стока, което трябва да се транспортира от доставчика A_i до потребителя B_j, така че общите транспортни разходи да са минимални;
2) $L(X)$ – общите минимални транспортни разходи.

Математическият модел на ТЗ може да се запише така:

$$L(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to min$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \, , i = 1,2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \;, j = 1,2, \dots , m$$

Целевата функция $L(X)$ са общите транспортни разходи по досташката на стоката от пунктовете на доставчиците до пунктовете на потребителите. Първата група от n ограничения означава, че всички запаси от стоката, намиращи се при доставчиците трябва да бъдат изчерпани. Втората група от m ограничения означава, че търсенето на всички потребители трябва да бъде задоволено. Нагледна форма за представчне на ТЗ се явява транспортната таблица

Пунктове на доставчици	Пунктове на потребители					Запаси на доставчици
	B_1		B_j		B_m	
A_1	c_{11}		c_{1j}		c_{1m}	a_1
A_i	c_{i1}		c_{ij}		c_{im}	a_i
A_n	c_{n1}		c_{nj}		c_{nm}	a_n
Търсене на потребители	b_1		b_j		b_m	$\sum a_i = \sum b_j$

Ако сумата от запасите на всички доставчици е равна на сумата от потребностите на всички потребители, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j \;,$$

ТЗ се нарича затворена (балансирана). Това е стандартната ТЗ. Тя е основен пример за двуиндексна задача на линейното програмиране.

11.2. Модификации на ТЗ.

Първата възможност за модифициране на стандартната ТЗ, това е **отворената (небалансирана) ТЗ**. Получава се когато горното балансово равенство се превърне в неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \neq \sum_{j=1}^{m} b_j \;.$$

В случай, че сумарните запаси на доставчиците превишат сумарното търсене на потребителите

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j$$

се въвежда допълнителен (фиктивен) потребител B_{m+1} с търсене равно на излишъка от запасите

$$b_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j$$

и така моделът става балансиран.

Ако сумарните запаси са недостатъчни за задоволяване на сумарното търсене

$$\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j$$

се въвежда допълнителен (фиктивен) доставчик A_{n+1} с количество на запаси равно на реално съществуващия дефицит от стоката

$$a_{n+1} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i$$

За въведените фиктивни доставчици или потребители се въвеждат и съответните фиктивни тарифи c_{im+1} или c_{n+1j} които (обикниввенно) са равни на нули.

Така двата варианта на отворена (небалансирана) ТЗ се свеждат до затворена (балансирана) ТЗ, която се решава. В първия случай, товарът предназначен за фиктивния потребител остава при доставчиците, а във втория случай, търсенето на потребителите, които трябва да получат стока от фиктивния доставчик остава незадоволено.

Друга възможност за модифициране на стандартната ТЗ идва от **недопустимите превози.** Понякога в определено направление, например $A_k \rightarrow B_l$ транспортирането на продукцията е невъзможно (например поради ремонт на пътя). Такива ситуации се моделират с помощта на така наречените забранителни тарифи c_{kl}. Те трябва да направят неизгодни превозите в съответното направление. Това става, ако забранителната тарифа е много по-голяма от всички други тарифи: $c_{kl} \gg max\{c_{ij}, i \neq k, j \neq l\}$. Аналогичен е случаят с приоритетните превози. Тогава се въвежда приоритетна тарифа c_{kl} много по-малка от останалите тарифи: $c_{kl} \ll min\{c_{ij}, i \neq k, j \neq l\}$.

При многопродуктовите ТЗ от всеки пункт на доставчиците кън всеки пункт на потребителите могат да се транспортиран няколко различни стоки. При свеждането на многопродуктовия модел до стандартна ТЗ може да се използва един от следните варианти:

- За всеки вид стока се съставя отделна ТЗ;
- За всички видове стоки се използва обща транспортна матрица, като се използват забранителни тарифи в клетките, свързващи различни видове продукция.

Някога се срещат транспортни модели, изискващи максимализирането на целевата функция $L(X)$, например когато става дума за общ доход, общи на печалби, обем на продажби и др. Ш такива случаи вместо исканата целева функция де разглежда целевата функция $L_1(X) = -L(X)$, в която тарифите се умножават с -1. По такъв начин максимализирането на $L(X)$ ще съответства на минимализиране на $L_1(X)$.

Задача за назначенията. Тя е частен случай на ТЗ, в която броят на входящите пунктове е равен на броя на изходящите пунктове ($n = m$). Обемът на потребностите и предлагането във всички тези пунктове е единица. Типичен пример за задача за назначенията е задачата за разпределениeто на n на брой работници на същия брой работни места (дейности), ако са даден времената c_{ij} за които i-я работник изпълнява j-тата дейност и трябва да се минимализира общото време за изпълнение на всички дейности. Търсените величини на задачата за назначенията са определени по следния начин

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ако } i - \text{я работник е разпределен на } j - \text{тата дейност} \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{в противен случай} \end{cases}$$

12. Примери за задачи, водещи до ТЗ

Пример 1. Заводите на една автомобилна компания са разположени в градовете A, B, C. Основните центрове за дистрибуция са в градовете D и E. Обемите на производство на трите завода са 1000, 1300 и 1200 автомобила съответно. Обемите на търсене са 2300 и 1400 автомобила. Стойностите на превозите за един автомобил са както следва

	D	E
A	80	215
B	100	108
C	102	68

Да се построи математически модел, позволяващ да се определят броя на автомобилите, транспортирани от всеки завод до всеки дистрибуционен център, така че общите транспортни разходи да са минимални.

Съответната транспортна таблица има вида

Заводи	Дистрибуционни центрове		Мощности на заводите
	D	E	
A	80	215	1000
B	100	108	1300
C	102	68	1200
Фиктивен завод	0	0	200
Търсене	2300	1400	3700

Целевата функция е

$$L(X) = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32} + 0x_{41} + 0x_{42} \to min$$

Ограниченията, свързани с мощностите на заводите са

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} &= 1000 \\
x_{21} + x_{22} &= 1300 \\
x_{31} + x_{32} &= 1200 \\
x_{41} + x_{42} &= 200
\end{aligned}$$

Ограниченията, свързани с търсенето от страна на дистрибуционните центрове са

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 2300 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 1400
\end{aligned}$$

Пример 2. При условията от пример 21 се въвежда допълнително изискване: за всеки не доставен автомобил в разпределителните центрове D и E се налагат глоби от 200 и 300 парични единици съответно. Освен това от завод A не трябва да се доставят автомобили в разпределителен център E.

Ясно е, че не доставените автомобили до D и E са автомобилите, „доставени“ до D и E от фиктивния завод. За това тарифите за превоз от фиктивния завод до разпределителни центрове D и E стават 200 и 300 съответно. Забраната за доставка по направление $A \rightarrow E$ се решава със забранителна тарифа: от 215 тази тарифа може да стане например 1000. Така получаваме транспортната таблица

Заводи	Дистрибуционни центрове		Мощности на заводите
	D	E	
A	80	1000	1000
B	100	108	1300
C	102	68	1200
Фиктивен завод	200	300	200
Търсене	2300	1400	3700

Пример 3. Автомобилна компания произвежда автомобили от четири различни марки M, N, P, Q. В завод A се произвеждат автомобили от марките P и Q, в B - M, N и Q, а в C – M и N. Търсенето в разпределителните центрове D и E и производството в заводите A, B и C са дадени в следната таблица

	Марки автомобили			
заводи	M	N	P	Q
A			700	300
B	500	600		400
C	800	400		
центрове				
D	700	500	500	600
E	600	500	200	100
общо	1300	1000	700	700

Цените на превозите са същите както в пример 1. Да се състави модел на стандартна ТЗ.

Под доставчик ще разбираме съчетанията между завод и марка, следователно доставчиците ще са $AP, AQ, BM, BN, BQ, CM, CN$ или общо 7 на брой. Аналогично под потребител ще разбираме съчетанието между разпределителен център и марка - $DM, DN, DP, DQ, EM, EN, EP, EQ$. Тогава, имайки пред вид и тарифите, транспортната таблица на стандартната ТЗ ще бъде:

доставчици	потребители								мощности
	DM	DN	DP	DQ	EM	EN	EP	EQ	
AP	80	80	80	80	215	215	215	215	700
AQ	80	80	80	80	215	215	215	215	300
BM	100	100	100	100	108	108	108	108	500
BN	100	100	100	100	108	108	108	108	600
BQ	100	100	100	100	108	108	108	108	400
CM	102	102	102	102	68	68	68	68	800
CN	102	102	102	102	68	68	68	68	400
търсене	700	500	500	600	600	500	200	100	3700

Пример 4. Три енергогенериращи станции с мощности от 25, 40, 30 мВт/ч предоставят електроенергия в три града. Максималното потребление на градовете е 30, 35 и 25 мВт/ч. Цените за мВт/ч са дадени в таблица

станция	град		
	1	2	3
1	600	700	400
2	320	300	350
3	500	480	450

През месец август потреблението във всеки от градовете нараства с 20%. Недостатъкът от електроенергия може да бъде компенсиран от друга електростанция по цена от 800 за 1 мВт/ч за всеки от градовете, като третият град не може да се превключи към тази станция. Да се формулира задачата за енергоснабдяването на трите града през месец август в термините на ТЗ.

Пример 5. Една компания притежава три ферми, в които се отглежда зелен фасул и два хладилни завода, в които фасула се замразява. Компанията продава замразения фасул по 300 лв за тон. В таблица 7 са дадени производствените разходи по отглеждането и преработването на фасула във фермите и заводите, а в таблица 8 – транспортните разходи между фермите и заводите.

Таблица 7.

		Производствени разходи в лв/т	Производствен капацитет в т
ферми	1	90	2000
	2	95	3000
	3	87	1500
заводи	1	20	3750
	2	23	3250

Таблица 8.

ферми	заводи	
	1	2
1	10	15
2	12	12
3	18	9

Да се формулира задачата за максимализиране на печалбата на компанията в термините на ТЗ.

Пример 6. Фирма произвежда туристически раници. Търсенето им през месеците март, април, май и юни е 100, 200, 180 и 300 броя съответно. В течение на тези месеци фирмата може да произведе 50, 180, 280 и 270 броя съответно (, защото обемът на производството на раници зависи и от производството на други изделия). През всеки месец търсенето може да се удовлетвори за сметка на:

1) производството от текущия месец;
2) производството от предишни месеци;
3) производството от следващите месеци.

Раницата се продава за 300 лв. Във втория случай се начисляват разходи за съхранение от 10 лв за една раница на месец, а в третия – 30 лв глоба за просрочие на една раница за един месец. Да се построи транспортен модел за максимализиране на печалбата на фирмата от продажба на раници.

Пример 7. Един от бизнесите на дадена компания е свързан с изкупуване, замразяване и продажба на замразени къпини. Изкупната кампания е през месеците юли, август и септември. През юли се изкупуват 120 т къпини по 800 лв./т, през август – 80 т по 900 лв./т, а през септември – 50 т по 1050 лв./т. Капацитетите на хладилния завод за замразяване на къпините (съобразно другите плодове за замразяване) по месеци са както следва: юли – 40 т, август – 80 т, септември – 0 т, октомври – 80 т и ноември – 80 т. Разходите за съхранение на незамразените къпини са юли 100 лв./т, а през другите месеци – с по 10 лв./т по-малко в сравнение с предходния месец. Разходите за замразяване са 100 лв./т, а разходите за съхранение на замразените къпини са 50 лв./т за един месец. През месеците август, септември, октомври, ноември и декември компанията има възможност да реализира по 60 т замразени къпини, като цената е 1800 лв./т през август, а всеки следващ месец цената се покачва с 100 лв./т. Да се построи транспортен модел за максимализиране на печалбата на фирмата от бизнеса с къпините.

Пример 8. Съществуват 4 бази A_1, A_2, A_3, A_4 и 4 търговски пункта B_1, B_2, B_3, B_4. Разстоянията между базите и търговските пунктове са зададени с матрицата

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 & 12 & 5 \\ 3 & 14 & 9 & 1 \\ 13 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 15 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Необходимо е да се намери такова взаимноеднозначно съответствие между бази и търговски пунктове, при което сумата от разстоянията да е минимална.

Пример 9. Съществуват 4 машини A_1, A_2, A_3, A_4 и 4 изделия B_1, B_2, B_3, B_4. Производителността на машините по отношение на изделията (по колко броя от всяко изделие могат да се произведат от всяка от машините за единица време) е зададена с матрицата

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 7 & 11 \\ 5 & 8 & 8 & 4 \\ 6 & 12 & 15 & 9 \end{bmatrix}$$

Необходимо е да се намери такова взаимноеднозначно съответствие между машини и изделия, при което сумата от произведените от машините изделия да е минимална.

Примерите 8 и 9 са типични примери за задачата за назначенията – пример 8 е стандартна задача за назначенията, при която целевата функция се минимализира, докато при пример 9 трябва елементите на матрицата да се вземат със знак „$-$" – това привежда задачата към стандартен вид с целева функция, подлежаща на минимализиране.

13. Метод на северозападния ъгъл за построяване на начален опорен план на стандартната ТЗ

Под опорен план на ТЗ ще разбираме всеки план за превози от доставчиците до потребителите, който е възможен. Измежду всички опорни планове на една стандартна ТЗ има такъв (такива) който е оптимален. Решаването на ТЗ се състои в намирането на оптимален опорен план. За това се минава през следните процедури:

1) Намиране на начален опорен план;
2) Проверка за оптималност на опорния план;
3) Ако оптималността е налице задачата е решена, ако не е – опорния план се подобрява и се връщаме към стъпка 2).

Има много методи за построяване на начален опорен план. Ние ще се спрем на метода на северозападния ъгъл.

Пример 10. При доставчиците A_1, A_2 и A_3 са съсредоточени съответно количества от 30, 190 и 250 единици от хомогенна стока, които е необходимо да се доставят до потребителите B_1, B_2, B_3 и B_4 в размер на 70, 120, 150 и 130 количествени единици съответно. Стойността по доставката на единица продукция от доставчиците за потребителите се задава с матрицата

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Да се построи начален опорен план по метода на северозападния ъгъл.

Решение:

Тъй като сумарната мощност на доставчиците е

$$30 + 190 + 250 = 470,$$

а сумарното търсене на потребителите е

$$70 + 120 + 150 + 130 = 470,$$

то дадената ТЗ е от затворен тип и можем да продължаваме (в противен случай я привеждаме към затворен тип чрез евентуалното добавяне на фиктивен доставчик или потребител).

Нанасяме всички данни в специална транспортна таблица

	70	120	150	130
30	4	7	2	3
190	3	1	2	4
250	5	6	3	7

В първия стълб са указани мощностите на доставчиците, а в първия ред – търсенето на потребителите. Числата в десния горен ъгъл на клетките са транспортните разходи от съответния доставчик до съответния потребител, т.е. значенията от дадената в условието матрица.

За да считаме, че сме намерили начален опорен план, трябва празната част на $3 \cdot 4 = 12$-те клетки да бъде запълнена, и то така, че сумите на елементите на всеки ред да са равни на числото от първия стълб на съответния ред и сумите на елементите от всеки стълб да са равни на числото от първия ред в съответния стълб.

Северозападният ъгъл на таблицата е нейния ляв горен ъгъл, т.е. клетката (1,1). Затова разглеждаме първия доставчик A_1 и първия потребител B_1. Намираме $min\{a_1, b_1\} = min\{30,70\} = 30$ и записваме в клетката (1,1) числото 30. Така, доставчикът A_1 е изразходвал цялото си количество и се изключва от нанатъшното разглеждане. Следователно всички други клетки (1,2), (1,3) и (1,4) от първия ред (съответстващ на A_1) остават празни. След първата стъпка нашата таблица добива вида

	70	120	150	130
30	4 30	7	2	3
190	3	1	2	4
250	5	6	3	7

Северозападният ъгъл в новата таблица е клетката (2,1). Мощността на A_2 е 190, а остатъчното търсене на B_1 - $70 - 30 = 40$. Имаме $min\{190,40\} = 40$ и записваме в тази клетка числото 40. По такъв начин се изчерпва търсенето на B_1 и клетка (3,1) остава празна. Сега таблицата добива вида

	70	120	150	130
30	4 30	7	2	3
190	3 40	1	2	4
250	5	6	3	7

Северозападният ъгъл на новата таблица е клетка (2,2). Остатъчната мощност на A_2 е $190 - 40 = 150$, а търсенето на B_2 – 120. Тъй като $min\{150{,}120\} = 120$, записваме числото 120 в тази клетка и изчерпваме търсенето на B_2, следователно клетка (3,2) остава празна и таблицата добива вида

	70	120	150	130
30	4 30	7	2	3
190	3 40	1 120	2	4
250	5	6	3	7

Северозападният ъгъл на ново получената таблица е клетка (2,3). Остатъчната мощност на A_2 е $190 - 40 - 120 = 30$, а търсенето на B_3 – 150. Тъй като $min\{30{,}150\} = 30$, записваме 30 в клетка (2,3), а клетка (2,4) остава празна (изчерпана е мощността на A_2). Новата таблица изглежда така

	70	120	150	130
30	4 30	7	2	3
190	3 40	1 120	2 30	4
250	5	6	3	7

Северозападният ъгъл на новата таблица е клетка (3,3). Мощността на A_3 е 250, а остатъчното търсене на B_3 - $150 - 30 = 120$, затова записваме числото $120 = min\{250{,}120\}$ в тази клетка, а в клетка (3,4) – 130. Така получаваме последната таблица

	70	120	150	130
30	4 30	7	2	3
190	3 40	1 120	2 30	4
250	5	6	3 120	7 130

С това ние сме получили един начален опорен план, който на следващ етап (евентуално) ще подобряваме. При него доставчикът A_1 доставя целия си запас от 30 ед. на потребителя B_1; A_2 доставя 40 ед. на B_1, 120 ед. на B_2 и 30 ед. на B_3; A_3 доставя 120 ед. на B_3 и още 130 ед. на B_4.

След изпълнението на поредната стъпка ние изключваме от разглеждане или ред или стълб (само при последната стъпка отпадат ред и стълб едновременно). Затова при попълване на таблицата трябва да е изпълнено съотношението: броя на попълнените клетки = броя на редовете + броя на стълбовете – 1. В нашият случай това е така: $6 = 3 + 4 - 1$. Ако горното съотношение не е изпълнено, възниква така нареченият особен случай, който ще бъде разгледан отделно.

Да пресметнем сумарните разходи $TC = 4.30 + 3.40 + 1.120 + 2.30 + 3.120 + 7.130 = 120 + 120 + 120 + 60 + 360 + 910 = 1690$.

Особен случай.

Пример 11. Нека е зададена ТЗ с транспортната таблица

	30	20	50
50	1	3	5
30	3	3	2
20	4	1	2

Да намерим начален опорен план по метода на северозападния ъгъл.

Стъпка 1. За клетка (1,1) имаме $min\{50,30\} = 30$, следователно в нея записваме числото 30. А клетки (2,1) и (3,1) оставаме празни. Таблицата добива вида

	30	20	50
50	1 30	3	5
30	3	3	2
20	4	1	2

Стъпка 2. Северозападният ъгъл е клетка (1,2). Тъй като $min\{50 - 30{,}20\} = 20$ и ако поставим в тази клетка числото 20, едновременно ще отпаднат първи ред и втори стълб и няма да бъде изпълнено съотношението: брой на запълнени клетки $=$ брой на редовете $+$ брой на стълбовете – 1. Затова слагаме в клетка (2,2) символичен превоз 0. Таблицата добива вида

	30	20	50
50	1 30	3 20	5
30	3	3 0	2
20	4	1	2

и въпросното съотношение ще бъде налице. Така се постъпва винаги, когато при поредната стъпка отпадат едновременно ред и стълб. Разбира се, окончателният вид на таблицата е

	30	20	50
50	1 30	3 20	5
30	3	3 0	2 30
20	4	1	2 20

14. Разпределителен метод за решаване на ТЗ

Основната част от разпределителния метод са оценките на клетките: оценка на клетката $(i, j) =$ оценката на ред $i +$ оценката на стълб $j +$ числото в горния десен ъгъл на клетката или

$$v_i^j = v_i + v^j + c_i^j.$$

Оценките на редовете и стълбовете се правят така, че оценките на всички попълнени клетки да са равни на нула. След като се направят оценки на всички клетки, те се записват в матрица на оценките. Ако тази матрица не съдържа отрицателни числа, значи е получен оптимален план на превозите. В противен случай се прави подобряване на опорния план. Движейки се от клетка с отрицателна оценка през попълнени клетки (като е забранено да се правят два последователни хода в един и същи ред или стълб) се създава така наречения преизчислителен цикъл. Вътре в този цикъл се преразпределят превозите. За ново получената транспортна таблица се намира матрицата на оценките и т. н., докато се получи оптимален транспортен план.

Пример 12. Да се намери решение (оптимален транспортен план) за ТЗ от пример 10.

По метода на северозападния ъгъл бяхме намерили начален опорен план със съответната транспортна таблица

	70	120	150	130
30	30 / 4	7	2	3
190	40 / 3	120 / 1	30 / 2	4
250	5	6	120 / 3	130 / 7

Може да се започне от произволен ред или стълб. Нека да започнем с първия стълб, като му припишем оценка 0, т.е. $v^1 = 0$ (при първата стъпка може да му се припише произволна оценка). Ш първият стълб има две попълнени клетки – (1,1) и (2,1). Техните оценки трябва да са нулеви, т.е. $v_1^1 = 0$ и $v_2^1 = 0$. При това положение, на база оценката на първия стълб можем да направим оценки на първия и втория ред: $v_1^1 = v_1 + v^1 + c_1^1$ или $0 = v_1 + 0 + 4 \Rightarrow v_1 = -4$ и $v_2^1 = v_2 + v^1 + c_2^1$ или $0 = v_2 + 0 + 3 \Rightarrow v_2 = -3$.

Нанасяме получените оценки на редове и стълбове в нова транспортна таблица, като оценките на стълбовете ги записваме в нов ред отдолу, а оценките на редовете – в нов стълб отдясно.

	70	120	150	130	v_i
30	30 / 4	7	2	3	-4
190	40 / 3	120 / 1	30 / 2	4	-3
250	5	6	120 / 3	130 / 7	
v^j	0				

Сега трябва да намерим запълнена клетка, за която е известна оценката на съдържащ я ред или стълб. Такава е клетката (2,2). Имаме $v_2^2 = v_2 + v^2 + c_2^2$ или $0 = -3 + v^2 + 1 \Rightarrow v^2 = 2$. Така получаваме новата транспортна таблица

	70	120	150	130	v_i
30	30 (4)	(7)	(2)	(3)	-4
190	40 (3)	120 (1)	30 (2)	(4)	-3
250	(5)	(6)	120 (3)	130 (7)	
v^j	0	2			

За запълнената клетка (2,3) ще имаме $v_2^3 = v_2 + v^3 + c_2^3$ или $0 = -3 + v^3 + 2 \Rightarrow v^2 = 1$. Новата транспортна таблица е

	70	120	150	130	v_i
30	30 (4)	(7)	(2)	(3)	-4
190	40 (3)	120 (1)	30 (2)	(4)	-3
250	(5)	(6)	120 (3)	130 (7)	
v^j	0	2	1		

За попълнената клетка (3,3) равенството на оценките има вида $v_3^3 = v_3 + v^3 + c_3^3$ или $0 = v_3 + 1 + 3 \Rightarrow v_3 = -4$, което нананасяме в транспортната таблица и получаваме

	70	120	150	130	v_i
30	30 (4)	(7)	(2)	(3)	-4
190	40 (3)	120 (1)	30 (2)	(4)	-3
250	(5)	(6)	120 (3)	130 (7)	-4
v^j	0	2	1		

Оценката на последния, четвърти стълб получаваме от попълнената клетка (3,4): $v_3^4 = v_3 + v^4 + c_3^4$ или $0 = -4 + v^4 + 7 \Rightarrow v^4 = -3$. Окончателният вид на транспортната таблица със всички оценки на редове и стълбове за този опорен план ще има вида

	70	120	150	130	v_i
30	4 30	7	2	3	-4
190	3 40	1 120	2 30	4	-3
250	5	6	3 120	7 130	-4
v^j	0	2	1	-3	

Получените оценки на редовете и стълбовете ни позволяват да направим оценки за всички не попълнени клетки. Например, за клетката (1,2) ще имаме $v_1^2 = v_1 + v^2 + c_1^2$ или $v_1^2 = -4 + 2 + 7 = 5$; за клетка (1,3): $v_1^3 = v_1 + v^3 + c_1^3$ или $v_1^3 = -4 + 1 + 2 = -1$; за клетка (1,4): $v_1^4 = v_1 + v^4 + c_1^4$ или $v_1^4 = -4 - 3 + 3 = -4$ и т.н. Окончателно получаваме следната матрица на оценките

$$V = \left(v_i^j\right) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тъй като тази матрица съдържа отрицателни елементи, то началният опорен транспортен план е неоптимален и подлежи на подобряване.

Подобряване на опорния транспортен план. Избираме клетката с най-малка оценка, в случая, това е клетка (1,4), нейната оценка е -4. Целта е да построим преизчислителен цикъл. Изхождайки от клетка (1,4) и движейки се само през запълнени клетки, трябва да се върнем пак в същата клетка. При това е забранено да правим два последователни хода в един и същи ред или стълб. Например, подходящ е цикъла $\big((1,4) - \text{празна}\big) \to \big((1,1) - 30\big) \to \big((2,1) - 40\big) \to \big((2,3) - 30\big) \to \big((3,3) - 120\big) \to \big((3,4) - 130\big) \to \big((1,4) - \text{празна}\big)$. На стартовата клетка поставяме знак „+“ и след това редуваме знаците: $\big((1,4) - \text{празна}\big)^+ \to \big((1,1) - 30\big)^- \to \big((2,1) - 40\big)^+ \to \big((2,3) - 30\big)^- \to \big((3,3) - 120\big)^+ \to \big((3,4) - 130\big)^- \to \big((1,4) - \text{празна}\big)^+$. Сред клетките от цикъла със знак „–“ (това са клетките $(1,1)$, $(2,3)$ и $(3,4)$) намираме минималния превоз: $min\{30,30,130\} = 30$. След това в клетките със знак „–“ намаляваме превозите с 30, а в клетките със знак „+“ ги увеличаваме също с 30. Получаваме нов опорен план

	70	120	150	130
30	4	7	2	3 / 30
190	3 / 70	1 / 120	2 / 0	4
250	5	6	3 / 150	7 / 100

По такъв начин клетката (1,4) ще стане запълнена клетка. Ако се получи само една клетка с нулев превоз, тя ще остане незапълнена. Ако това са две клетки (както в случая са клетките (1,1) и (2,3)), незапълнена ще остане клетката с по-голяма тарифа (тарифата на (1,1) е 4, а тарифата на (2,3) е 2, следователно (1,1) ще остане незапълнена). В другата клетка (в случая (2,3)) ще нанесем нулев превоз и те ще се считa за запълнена“ това се прави за да е изпълнено съотношението: брой на запълнените клетки = брой на редове + брой на стълбове – 1. Така получаваме нов опорен план на превозите. Нужно е да се следи, дали сумите на превозите по редове и стълбове съвпадат с мощностите на доставчиците и с търсенето на потребителите съответно. За този нов опорен план извършваме оценки на редовете и стълбовете

	70	120	150	130	v_i
30	4	7	2	3 / 30	0
190	3 / 70	1 / 120	2 / 0	4	-3
250	5	6	3 / 150	7 / 100	-4
v^j	0	2	1	-3	

Новата матрица на оценките има вида

$$V = \left(v_i^j\right) = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Наличието в нея на отрицателна оценка (това е оценката $v_2^4 = -2$ на клетката (2,4)) показва, че транспортният план все още не е оптимален.

Построяваме преизчислителен цикъл $\left((2{,}4) - \text{празна}\right)^+ \to \left((2{,}3) - 0\right)^- \to \left((3{,}3) - 150\right)^+ \to \left((3{,}4) - 100\right)^- \to \left((2{,}4) - \text{празна}\right)^+$. Клетките от цикъла със знак „–“ са $(2{,}3)$ и $(3{,}4)$ с превози 0 и 100 съответно. Тъй като $min\{0{,}100\} = 0$, клетка (2,4) става запълнена (с превоз 0), а клетка (2,3) – празна. Получаваме нова транспортна таблица за новия опорен план

	70	120	150	130
30	4	7	2	3 30
190	3 70	1 120	2	4 0
250	5	6	3 150	7 100

Извършваме оценки на редовете и стълбовете

	70	120	150	130	v_i
30	4	7	2	3 30	-2
190	3 70	1 120	2	4 0	-3
250	5	6	3 150	7 100	-6
v^j	0	2	3	-1	

Въз основа на тези оценки получаваме нова матрица на оценките:

$$V = \left(v_i^j\right) = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Все още този опорен план е неоптимален – в матрицата на оценките има отрицателна оценка, това е $v_3^1 = -1$. Построяваме преизчислителен цикъл, започващ от клетката (3,1) с отрицателна оценка: $\big((3,1) - \text{празна}\big)^+ \rightarrow \big((3,4) - 100\big)^- \rightarrow \big((2,4) - 0\big)^+ \rightarrow \big((2,1) - 70\big)^- \rightarrow \big((3,1) - \text{празна}\big)^+$. Клетките от цикъла със знак „–“ са $(3,4)$ и $(2,1)$ с превози 100 и 70 съответно. Тъй като $min\{100,70\} = 70$, към превозите в клетките със знак „+“ се прибавя 70, а от превозите в клетките със знак „–“ – се изважда 70. Получаваме нова транспортна таблица за новия опорен план

	70	120	150	130
30	4	7	2	3 30
190	3	1 120	2	4 70
250	5 70	6	3 150	7 30

Извършваме оценки на редовете и стълбовете

	70	120	150	130	v_i
30	4	7	2	3 30	-1
190	3	1 120	2	4 70	-2
250	5 70	6	3 150	7 30	-5
v^j	0	1	2	-2	

Въз основа на тези оценки получаваме нова матрица на оценките:

$$V = \left(v_i^j\right) = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тъй като в нея няма отрицателни оценки, полученият опорен транспортен план е оптимален. Минималните транспортни разходи са $TC_{min} = 3.30 + 1.120 + 4.70 + 5.70 + 3.150 + 7.30 = 90 + 120 + 280 + 350 + 450 + 210 = 1500.$ Да отбележим, че транспортните разходи за началния опорен план бяха 1690.