8. Теория на двойствеността в линейното оптимиране

Задачата за оптималното планиране на производството се състои в намиране на такъв план за производство на продукция

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T,$$

позволяващ да се получи максимален оборот

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \to max$$

чрез използване на линейна технология на производство и с отчитане на ограниченията на намиращите се в предприятието ресурси

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m \end{array} \right. \quad (1)$$

(c_j – пазарните цени на произвежданите стоки; b_i – намиращите се в предприятието запаси от ресурси; a_{ij} – разхода на i-я ресурс за производството на j-тата стока).

При оптималния план някои от ресурсите се използват напълно (наричат се дефицитни), а част от количеството на другите ресурси остава (излишни). Освен това, различните ресурси се оказват неравностойни (в процеса на производство) и в друг смисъл – незначително увеличение на обема на един дефицитен ресурс може да повлияе силно на увеличение на приходите, а увеличението на обема на друг дефицитен ресурс – много по-слабо.

В рамките на моделите на линейното оптимиране трябва да съществува вътрешна система за оценка на ресурсите, използвани в процеса на производство. Тези оценки са свързани с технологичните особености на производството, зададени от технологичната матрица A, със структурата на наличните ресурси, описвана от вектор b и със структурата на външните (продажни) цени – вектор c. Тези оценки ще наричаме разчетни оценки на ресурсите. Разчетната оценка на единица количество от даден ресурс няма нищо общо с пазарната цена по която предприятието купува ресурса. Тя показва само сравнителната ценност на дадения ресурс за предприятието при дадени конкретни условия.

Как да намерим тези разчетни оценки?

Да означим с y_i оценката на единица от i-я ресурс,

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_m) -$$

вектор на оценките.

За j-тата произвеждана стока ще изразходваме (за една количествена единица) a_{1j} от първия ресурс; a_{2j} – от втория; ...; a_{mj} – от m-тия, следователно сумарната оценка за j-тата стока ще бъде

$$a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + \dots + a_{mj} y_m.$$

Очевидно, сумарната разчетна оценка на ресурсите, необходими за производството на единица от j-тата стока не може да бъде по-малка от продажната ѝ цена:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_2 \\ \vdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n \end{cases}$$

Освен това, за да бъдат тези разчетни оценки обективни, трябва да минимализираме сумарната оценка на наличните ресурси $b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$. Разбира се, разчетните оценки трябва да са неотрицателни.

Така получихме нова задача на линейното оптимиране: Да се намери вектор на оценките $y(y_1, y_2, \dots, y_m)$, минимализиращ сумарната оценка на всички налични ресурси

$$f = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to min$$

при условията (2)

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

като $y_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$

Получаното ЗЛО (2) се нарича двойствена задача на ЗЛО (1). Разчетните оценки на ресурсите, съответстващи на оптималния производствен план служат за компоненти на оптималното решение на двойствената задача. Затова компонентата y_i на оптималното решение на двойствената задача се нарича

двойнствена (дуална) оценка на i-я ресурс.
Нека е дадена ЗЛО с максимализиране на целевата функция и с ограничителни неравенства от вида „≤". Дуална (двойнствена) задача на тази задача се нарича ЗЛО, получаваща се по следния начин:

- на всяко ограничително неравенство на правата задача се поставя в съответствие променлива на дуалната задача;
- матрицата от коефициенти пред неизвестните се транспонира;
- десните части на ограниченията в правата задача преминават в коефициенти на целевата функция на дуалната задача;
- коефициентите на целевата функция на правата задача се превръщат в десни части на ограниченията в дуалната задача;
- знаците на неравенствата се заменят с противоположните („≥");
- от максимализиране на целевата функция се преминава към минимизиране.

Казва се, че ЗЛО (1) и (2) образуват симетрична двойка.
Ако в правата ЗЛО има ограничения от вида „≥", то се умножава с (−1), по сгщия начин се постъпва, ако в правата задача целевата функция трябва да се минимизира.
Ако в правата задача има ограничения както от типа на неравенства „≤", така и на равенства, то в дуалната задача променливите, съответстващи на ограниченията – неравенства тряб-

ва да са неотрицателни, а тези, които съответстват на ограничения – равенства могат да бъдат и неположителни (защото равенството може да се разглежда като сечение на две неравенства с противоположна посока). Така двойката дуални задачи може да се запише по следния начин:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = k+1, k+2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, l$$

$$f = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to min$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, l$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j, \quad j = l+1, l+2, \dots, n$$

$$y_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, k$$

Такава двойка дуални задачи се нарича несиметрична.

Основно неравенство в теорията на двойствеността.

За кои да е допустими решения $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ на правата и дуалната

ЗЛО е в сила неравенството:

$$cx = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = yb$$

Заб.: Основното неравенство е справедливо както за симетричните, така и за несиметричните двойки дуални задачи.

Доказателство (в случай на симетрична двойка)

$$cx = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Но $c_j \le \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$, $j = 1, 2, \dots, n$ – това са ограниченията на дуалната задача. Тогава

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i$$

Но $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ са ограниченията на правата задача. Получаваме

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = yb.$$

Теорема 1. (Малка теорема на двойствеността). За съществуването на оптимално решение на коя да е от задачите от дуална двойка е необходимо и достатъчно съществуването на допустимо решение на всяка от тях.

Доказателство:
Нека $Y=(y_1, y_2, \dots, y_m)$ е произволно допустимо решение на дуалната задача. Тогава кое да е допустимо решение $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на правата задача удовлетворява неравенството
$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \le \cancel{c_1x_1^* + c_2x_2^* + \dots + c_nx_n^* = t^*} \; b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m = yb$$
От това следва, че линейната функция
$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$
е ограничена отгоре върху непразното множество от допустимите планове на правата задача. Решавайки тази задача на линейното оптимиране чрез симплекс метода, получаваме редица от допустими решения за които целевата функция нараства.
Тогава са възможни два случая: или дадената ЗЛО има оптимално решение, до което ще достигнем чрез симплекс метода, или задачата няма решение поради неограниченост на целевата функция върху множеството от допустими решения. И това също ще стане ясно на даден етап от прилагане на симплекс метода.
В нашия случай втората възможност отпада поради ограничеността отгоре на целевата функция. Следователно, чрез симплекс метода ще се достигне до оптималното решение.
Чрез аналогични разсъждения се доказва разрешимостта на дуалната задача.
Теорема 2. Достатъчно условие за оптималност на решението на двойка взаимно дуални задачи.
Ако за някои допустими решения $X^*=(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$

и $y^*=(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$ на двойка дуални ЗЛО е в сила равенството

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*,$$

то векторите x^* и y^* са оптимални решения на съответните задачи на линейното оптимиране.

Доказателство:

И наистина, съгласно малката теорема на двойствеността (Т1), всяко решение на правата задача удовлетворява неравенството

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

Използвайки условието на теоремата, получаваме

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*$$

и тъй като горното съотношение е справедливо за всяко допустимо решение $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то x^* е оптималното решение на правата задача. Аналогично се доказва, че $y^*=(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$ е оптималното решение на дуалната задача. Следователно $c_1x_1^*+c_2x_2^*+\ldots+c_nx_n^*=b_1y_1^*+b_2y_2^*+\ldots+b_my_m^*$ е достатъчно условие векторите x^* и y^* да са оптимални решения на съответните задачи.

По такъв начин, производственият план и векторът на оценките на ресурсите са оптимални, ако цената на цялата произведена продукция и сумарната оценка на ресурсите съвпада II.

Теорема 3. Основна теорема на двойствеността. Ако една от задачите от дуалната двойка ЗЛО има оптимално решение, то и другата има оптимално решение, като екстремалните значения на целевите функции съвпадат; ако целевата функция на една от задачите е неограничена, то системата от условия на другата задача е противоречива.
(без доказателство)

Заб.1: Ако в една от задачите системата от ограничения е противоречива, то в дуалната задача тя също може да се окаже противоречива, т.е. последното твърдение на основната теорема на двойствеността не може да се обърне.

Пример:

Права задача	Дуална задача
$z = 5x_1 - x_2 \to max$	$f = 2y_1 - 4y_2 \to min$
$3x_1 - 3x_2 \leq 2$	$3y_1 - 3y_2 \geq 5$
$-3x_1 + 3x_2 \leq -4$	$-3y_1 + 3y_2 \geq -1$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$

Заб.2: Връзката между дуална двойка ЗЛО е по-дълбока отколкото е указано в Т3. Оказва се, че симплекс метода, приложен към една от задачите, автоматично води до решението и на другата задача.

Икономическото съдържание на основната теорема на двойствеността се състои в това, че (в термините за оценките) тя може да се формулира така: ако задачата за определяне на оптимален план, максимизиращ приходите от продукцията е разрешима, то разрешена е и задачата за определяне на минимална оценка на ресурсите, като ~~цената на~~ общият оборот от произведените стоки съвпада със сумарната оценка на ресурсите.

Теорема 4. Необходими и достатъчни условия за оптималност на допустимите решения

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} \quad и \quad y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$$

са:

$$y_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

т.е. ако някое неравенство от ограничителната система на правата задача не се обръща в точно равенство, то съответната компонента на оптималното решение на дуалната задача е нула; ако коя да е компонента на оптималното решение на една от задачите е положителна, то съответното ограничение в дуалната ѝ задача се обръща в точно равенство. С други думи, ако $y_i^* > 0$ за някое i, то

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i.$$

Ако
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i, \text{ то } y_i^* = 0.$$
Ако $x_j^* > 0$ за някое j, то
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j,$$
а ако
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i^* > c_j, \text{ то } x_j^* = 0.$$

Доказателство:

Необходимост.

Нека $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ и $y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$ са оптимални решения на дуалната двойка ЗЛО. Тогава ще са изпълнени
$$cx^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \le \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* x_j^* \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = y^* b.$$
Но от основната теорема на двойствеността ще имаме
$$cx^* = y^* b.$$
Тогава ще са изпълнени строгите равенства
$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* x_j^* \quad \text{и}$$
$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* x_j^*$$

От първото от последните две равенства следва, че

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) = 0$$

Но всички x_j^* и всички изрази в скобите са неотрицателни, следователно

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j^* - c_j\right) = 0, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

Аналогично, от второто равенство получаваме

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^* \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*\right) = 0$$

и поради неотрицателността на y_i^* и изразите в скобите ще имаме

$$y_i^* \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*\right) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, m$$

Достатъчност.

Нека са изпълнени равенствата

$$y_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i\right) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

и

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j^* - c_j\right) = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Сумираме първите равенства по i, а вторите по j и получаваме

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j^* y_i^* \text{ и}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* x_j^*,$$

откъдето се вижда, че значенията на целевите функции на дуалната двойка ЗЛО в точките x^* и y^* съвпадат. Тогава (съгласно достатъчното условие за оптималност) x^* и y^* са оптимални решения на дуалната двойка.

Да разгледаме икономическата интерпретация на втората теорема на двойствеността.

1.

$$y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i\right) = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

Ако при оптималния план за производство x^* разхода на i-я ресурс $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*$ е строго по-малък от запаса b_i, то оценката на този ресурс y_i^* е равна на 0. Ако оценката му е по-голяма от нула то разходът на този ресурс е равна на запаса от него:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$$

По такъв начин оценките в оптималния план могат да се възприемат като мерки за дефицитност на ресурсите. Дефицитните ресурси, изразходени напълно в оптималния ~~план~~ производствен план имат положителни оценки, а недефицитните (от които е останало част от запаса) имат нулева оценка.

2.

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Ако сумарната оценка на ресурсите, необходими за производството на j-тата стока $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*$ ~~е~~ строго по-голяма от цената ѝ c_j, то според оптималния производствен план тази стока няма да бъде произведена $\Rightarrow x_j^* = 0$.
Ако според оптималния производствен план j-тата стока се произвежда, т.е. $x_j^* > 0$, то сумарната оценка на ресурсите, изразходвани за производството ѝ съвпада с цената ѝ:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j$$

По такъв начин оценките на оптималния план могат да се използват като инструмент за определяне на ефективността на производствените технологии на отделните стоки. Дадена технология се използва само тогава, когато сумарната оценка на използваните ресурси съвпада с продажната ѝ цена.
Теорема 5. Оценка на влиянието на ресурсите върху приходите от производството.
Значението на променливата y_i^* в оптималното решение на дуалната задача е равно на ~~оценка~~ влиянието на изменението на количеството на i-я ресурс b_i върху максимума на целевата функция, т.е.

$$\frac{\partial Z^*}{\partial b_i} = y_i^*$$

(без доказателство)
Икономическата интерпретация на тази

теорема е очевидна: дуалната оценка на ресурса е нарастването на приходите от продукцията за единица изменение на количеството на този ресурс. Поради това, изгодно е допълнителното закупуване на този ресурс само тогава, когато пазарната му цена p_i е по-малка от дуалната му оценка y_i^*. Да отбележим, че тук става дума за достатъчно малко изменение на b_i; от дадено място нагоре, изменението на b_i ще доведе до промяна и на y_i^*.

9. Двойствен симплекс метод

Разглеждаме дуалната задача

$$f = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j; \; j = 1, 2, \ldots, n$$

$$y_i \geq 0; \; i = 1, 2, \ldots, m$$

Разписваме ограниченията във вид на равенства чрез добавяне на още n на брой неизвестни $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_{m+n}$:

$$\left|\begin{array}{l} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{m1} y_m - y_{m+1} = c_1 \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{m2} y_m - y_{m+2} = c_2 \\ \ldots \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \ldots + a_{mn} y_m - y_{m+n} = c_n \end{array}\right.$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \ldots, y_m \geq 0, y_{m+1} \geq 0, y_{m+2} \geq 0, \ldots, y_{m+n} \geq 0$$

Ясно е, че симплекс методът (за целевата функция $(-f)$) не е приложим веднага – трябва да се въведат още n на брой фиктивни неизвестни $s_1, s_2, \dots, s_n$ и общият брой неизвестни става $m+2n$.

Обаче дуалната задача на тази задача е

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_j \ ; \ i = 1, 2, \dots, m$$

и с добавяне на фиктивните (и базови) неизвестни $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ задачата е с $n+m$ на брой неизвестни. Тя се решава чрез симплекс метода като в последната симплекс таблица в реда на оценките се съдържа оптималното решение на дуалната задача:

$$y_1^* = \Delta_{n+1}, y_2^* = \Delta_{n+2}, \dots, y_m^* = \Delta_{n+m}$$

Пример 1. Да се реши задачата за диетата (от. 7) чрез решаване на дуалната ѝ задача.

Решение:

Задачата за диетата имаше вида

$$z = 60x_1 + 50x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 40x_2 \ge 40 \\ 10x_1 + 20x_2 \ge 4 \\ 50x_1 + 20x_2 \ge 30 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$$

Съставяме дуалната ѝ задача

$$f = 40y_1 + 4y_2 + 30y_3 \to max$$

$$\begin{cases} 10y_2 + 50y_3 \le 60 \\ 40y_1 + 20y_2 + 20y_3 \le 50 \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, \ y_2 \ge 0, \ y_3 \ge 0$$

За да я решим чрез симплекс метода, въвеждаме новите неизвестни y_4 и y_5 и неравенствата добиват вид на равенства:

$$10y_2 + 50y_3 + y_4 = 60$$
$$40y_1 + 20y_2 + 20y_3 + y_5 = 50$$

По-долу са дадени последователните симплекс таблици, водещи до решението на дуалната задача.

$\tilde{c}$	База	в	40	4	30	0	0
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
0	y_4	60	0	10	50	1	0
0	y_5	50	$\boxed{40}$	20	20	0	1
	f_0	0	−40	−4	−30	0	0
0	y_4	60	0	10	$\boxed{50}$	1	0
40	y_1	1,25	1	0,5	0,5	0	1/40
	f_0	50	0	16	−10	0	1
30	y_3	1,20	0	0,2	1	0,02	0
40	y_1	0,65	1	0,4	0	−0,01	1/40
	f_0	62	0	18	0	0,2	1

При третата симплекс таблица е достигнато оптималното решение на дуалната задача. От него (в последния ред на оценките на последната симплекс таблица) откриваме решението на първоначалната задача:

$$x_1^* = 0,2 \; ; \; x_2^* = 1$$

Да отбележим, че екстремалното ~~реш~~ значение на целевата функция е същото:

$$z^* = f^* = f_0 = 62$$

Ясно е, че това решение е по-бързо (изисква по-малко симплекс таблици) от решението на същата задача чрез метода на изкуствената база (М-метода).

Двойствен симплекс метод. Той се основава на същата идея, но се прилага към първоначалната задача, без да се съставя дуалната задача в явен вид.

Процесът започва при наличие на базово решение, удовлетворяващо условието за оптималност (всички $\Delta_j \geq 0$), което не е допустимо, поради наличието на отрицателни компоненти $x_j \leq 0$.

При всяка следваща стъпка отначало се намира разрешаващ ред с номер r, съответстващ на най-голямото по модул отрицателно b_r:

$$\min_{i=1,2,\dots,m} (b_i \leq 0) = b_r$$

След това намираме разрешаващият стълб s по правилото

$$\max_{j=1,2,\dots,n} \left\{ \frac{\Delta_j}{a_{rj} < 0} \right\} = \frac{\Delta_s}{a_{rs}}$$

Процесът продължава до намирането на оптимално допустимо базово решение или до установяване на неразрешимостта на задачата.

Пример 2. Да се реши задачата за диетата (от 7.) чрез двойствения симплекс метод.

Решение.

Умножаваме целевата функция и ограничителните неравенства с (-1) и въвеждаме балансовите неизвестни x_3, x_4, x_5. Тогава задачата добива вида

$$-z = -60x_1 - 50x_2 \rightarrow max$$
$$-40x_2 + x_3 = -40$$
$$-10x_1 - 20x_2 + x_4 = -4$$
$$-50x_1 - 20x_2 + x_5 = -30$$
$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0.$$

Процесът на решаване на тази задача чрез симплекс таблица е даден по-долу:

$\tilde{c}$	База	b	-60	-50	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	-40	0	$\boxed{-40}$	1	0	0
0	x_4	-4	-10	-20	0	1	0
0	x_5	-30	-50	-20	0	0	1
	$-z_0$	0	60	50	0	0	0
-50	x_2	1	0	1	-1/40	0	0
0	x_4	16	-10	0	-0,5	1	0
0	x_5	-10	$\boxed{-50}$	0	-0,5	0	1
	$-z_0$	-50	60	0	1,25	0	0
-50	x_2	1	0	1	-1/40	0	0
0	x_4	18	0	0	-0,4	1	-0,2
-60	x_1	0,2	1	0	0,01	0	-0,02
	$-z_0$	-62	0	0	0,65	0	1,2

В последната симплекс таблица намираме решението на първоначалната задача:

$$x_1^* = 0,2; \; x_2^* = 1.$$