

(продължение)

От последното уравнение на системата (4) може да изразим целевата функция чрез новите свободни променливи:

$$z = z'_0 - \Delta'_1 x_1 - \Delta'_{m+1} x_{m+1} - \dots - \Delta'_{s-1} x_{s-1} - \\ - \Delta'_{s+1} x_{s+1} - \dots - \Delta'_n x_n,$$

с помощта на които можем да изследваме новото решение за оптималност по същия начин, както преди.

Може да се каже, че решението на ЗЛО се свежда до съставяне на спомагателната система (3) и преобразуването ѝ до спомагателната система (4) и продължаване на този процес до достигане на оптималното решение. Разширената матрица на системата (4) със съответните допълнения се нарича втора симплекс таблица, аналогично се определя третата симплекс таблица и т. н. Решението на конкретната ЗЛО се свежда до съставяне на първата симплекс таблица, до преобразуването ѝ във втора симплекс таблица (чрез рекурентното пресмятане на a'_{ij} , b'_i и Δ'_j чрез a''_{ij} , b''_i и Δ''_j , както е показано по-горе) ~~и~~ като използваме подходящ разрешаващ елемент. Процесът на решаване на ЗЛО се записва като последователност от поредици симплекс таблици.

По този начин прехода към ново решение

продължава докато не бъде получено оптималното решение или не бъде доказана неограничеността на целевата функция върху множеството от ограничения. Но това твърдение е справедливо само ако разглежданата ЗЛО е неизродена, т.е. не трябва на някакъв етап някой от свободните ^{членове} променливи да приема нулева стойност.

При $b_i \neq 0$ новото значение на целевата функция е строго по-голямо от предишното и след краен брой стъпки достигаме до оптималното решение или доказваме неразрешимостта за ЗЛО (броят на стъпките не може да надхвърля

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

В изродения случай при дадена стъпка ~~е да~~ (или повече) ~~от~~ свободните ~~членове~~ ~~ста~~-~~ва~~ 0 на разрешаващото уравнение става 0. Тогава значението на целевата функция се запазва (да припомним, че то се приема по формулата

$$Z_0' = Z_0 - \Delta_s \frac{b_s}{a_{rs}}).$$

Това води до за циклане, т.е. връщане към същото решение. Тогава ЗЛО не може да се реши.

Пример. Да реши ЗЛО

$$Z = -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 17x_4 - x_5 \rightarrow \max$$

при ограниченията

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 5 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

$$(x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0)$$

Решение:

Избираме базово неотрицателно решение:

$$x_1 = 5, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$$

Това решение съответства на значение на целевата функция

$$Z_0 = -3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 - 5 \cdot 0 + 17 \cdot 0 - 0 = -11$$

Горната система има предпозитан вид, от който лесно може да се намери нейното общо решение:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - x_3 + 2x_4 - 4x_5 \\ x_2 = 1 + x_3 - 3x_4 - x_5 \end{cases}$$

Изразяваме целевата функция чрез свободните неизвестни x_3, x_4 и x_5 като изключваме дъ-зобите x_1 и x_2 чрез общото решение:

$$\begin{aligned} Z &= -3(5 - x_3 + 2x_4 - 4x_5) + 4(1 + x_3 - 3x_4 - x_5) - 5x_3 + 17x_4 - x_5 = -15 + 3x_3 - 6x_4 + 12x_5 + 4 + 4x_3 - 12x_4 - 4x_5 - 5x_3 + 17x_4 - x_5 \\ &= -11 + 2x_3 - x_4 + 7x_5. \end{aligned}$$

$$Z = -11 + 2x_3 - x_4 + 7x_5$$

или

$$Z - 2x_3 + x_4 - 7x_5 = -11$$

Попълваме първата симплекс таблица, ~~за припопълване~~

$\tilde{C}$	База	θ	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
C_1	x_1	b_1	1	0	a_{13}	a_{14}	a_{15}
C_2	x_2	b_2	0	1	a_{23}	a_{24}	a_{25}
		$Z_0 - Z$	0	0	Δ_3	Δ_4	Δ_5

Тъй като C_i е коефициента пред x_i в целевата функция, то $C_1 = -3$, $C_2 = 4$, $C_3 = -5$, $C_4 = 17$, $C_5 = -1$. b_j са свободните членове на j -тото ограничително уравнение $\Rightarrow b_1 = 5$, $b_2 = 1$. a_{ij} е коефициентът пред x_j в i -тото уравнение $\Rightarrow$

$$a_{13} = 1, a_{14} = -2, a_{15} = 4$$

$$a_{23} = -1, a_{24} = 3, a_{25} = 1$$

$Z_0, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5$ пресмятаме по формулите

$$Z_0 = \sum_{i=1}^m C_i b_i = C_1 b_1 + C_2 b_2 = (-3) \cdot 5 + 4 \cdot 1 = -11$$

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^m C_i a_{ij} - C_j$$

$$\Delta_3 = C_1 a_{13} + C_2 a_{23} - C_3 = (-3) \cdot 1 + 4 \cdot (-1) - (-5) = -2$$

$$\Delta_4 = C_1 a_{14} + C_2 a_{24} - C_4 = (-3) \cdot (-2) + 4 \cdot 3 - 17 = 1$$

$$\Delta_5 = C_1 a_{15} + C_2 a_{25} - C_5 = (-3) \cdot 4 + 4 \cdot 1 - (-1) = -7$$

Нанасяме всички пресметнати коефициенти и получаваме първата симплекс таблица:

$\tilde{C}$	Базис	b	-3	4	-5	17	-1
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	x_1	5	1	0	1	-2	4
4	x_2	1	0	1	-1	3	1
-11 $-Z$	x_3	-11 $-Z$	0	0	-2	1	-7

Първата симплекс таблица може да се разглежда като разширена матрица на системата

$$\begin{array}{l}
 x_1 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 5 \\
 x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 1 \quad (*) \\
 Z + 2x_3 - x_4 + 7x_5 = -11
 \end{array}$$

Полученото базово решение не е оптимално, защото нараства при нарастването на свободните променливи x_3 и x_5 (при фиксиране на другите). За припомняне, се

$$\frac{\partial Z}{\partial x_j} = -\Delta_j$$

В последния ред на първата симплекс таблица има отрицателни коефициенти $\Delta_3 = -2$ и $\Delta_5 = -7$ пред x_3 и x_5 съответно, като пред всяко от тези неизвестни има поне един положителен коефициент в системата от уравнения.

Приемаме x_5 за разрешаваща неизвестна (защото Δ_5 е ~~най~~-отрицателно Δ_j с най-голям модул). Тъй като

$$\begin{aligned}
 \min \left\{ \frac{b_1}{a_{15}}, \frac{b_2}{a_{25}} \right\} &= \min \left\{ \frac{5}{4}, \frac{1}{1} \right\} = \\
 &= \min \{ 1.25; 1 \} = 1,
 \end{aligned}$$

в calitate на разрешаваща x -е ще вземем вто-

рото уравнение. Изключваме неизвестната x_5 от всички уравнения на спомагателната система без второто (т.е. в първото). Неизвестната x_5 става базова, а x_2 – свободна. От второто уравнение на системата (*) имаме

$$x_5 = 1 - x_2 + x_3 - 3x_4,$$

заместваме в първото:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 - 2x_4 + 4(1 - x_2 + x_3 - 3x_4) &= \\ = x_1 + x_3 - 2x_4 + 4 - 4x_2 + 4x_3 - 12x_4 &= \\ = x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 14x_4 + 4 = 5 &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 14x_4 = 1$$

Целевата функция:

$$\begin{aligned} z &= -11 + 2x_3 - x_4 + 7(1 - x_2 + x_3 - 3x_4) = \\ &= -11 + 2x_3 - x_4 + 7 - 7x_2 + 7x_3 - 21x_4 = \\ &= -4 - 7x_2 + 9x_3 - 22x_4 \end{aligned}$$

Новото базово решение (базови неизвестни – x_1, x_5 ; свободни – x_2, x_3, x_4) е

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$$

Пресмятаме новата стойност на $z_0' = -4$.

Това решение отново не е оптимално, защото $\frac{\partial z}{\partial x_3} = 9 > 0$ (при $x_2 = x_4 = 0$),

което позволява подобрение.

Да попълним втората симплекс таблица. Разрешаващия елемент е a_{25} (той е ограден в първата симплекс таблица). Използваме формулите

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{is} \frac{a_{rj}}{a_{rs}}, \quad b'_i = b_i - a_{is} \frac{b_r}{a_{rs}}, \quad i \neq r$$

$$a'_{rz} = \frac{a_{rz}}{a_{rs}}, \quad b'_r = \frac{b_r}{a_{rs}}$$

Тъй като $r=2, s=5$ (индексите на разрешаващия елемент):

$$a'_{11} = a_{11} - a_{15} \frac{a_{21}}{a_{25}} = 1 - 4 \cdot \frac{0}{1} = 1$$

$$a'_{12} = a_{12} - a_{15} \frac{a_{22}}{a_{25}} = 0 - 4 \cdot \frac{1}{1} = -4$$

$$a'_{13} = a_{13} - a_{15} \frac{a_{23}}{a_{25}} = 1 - 4 \cdot \frac{(-1)}{1} = 5$$

$$a'_{14} = a_{14} - a_{15} \frac{a_{24}}{a_{25}} = -2 - 4 \cdot \frac{3}{1} = -14$$

$$a'_{15} = 0 \quad (x_5 \text{ е базова})$$

$$b'_1 = b_1 - a_{15} \frac{b_2}{a_{25}} = 5 - 4 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$a'_{21} = \frac{a_{21}}{a_{25}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$a'_{22} = \frac{a_{22}}{a_{25}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$a'_{23} = \frac{a_{23}}{a_{25}} = \frac{(-1)}{1} = -1$$

$$a'_{24} = \frac{a_{24}}{a_{25}} = \frac{3}{1} = 3$$

$$a'_{25} = 1$$

$$b'_2 = \frac{b_2}{a_{25}} = \frac{1}{1} = 1$$

Фактически
всички елементи
на ~~р~~ втората
симплекс-таблица
от разрешаващия
ред се получават
чрез разделяне на
старите съответни
елементи
с разрешаващия
елемент

Поправяме втората симплекс таблица
(без елементите Δ'_j)

$\tilde{C}$	База	θ	-3	4	-5	17	-1
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	x_1	1	1	-4	5	-14	0
-1	x_5	1	0	1	-1	3	1
	$z_0 - z$	$-4 - z$					

Сега пресмятаме

$$\Delta'_1 = (-3) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 - (-3) = 0$$

$$\Delta'_2 = (-3)(-4) + (-1) \cdot 1 - 4 = 7$$

$$\Delta'_3 = (-3) \cdot 5 + (-1)(-1) - (-5) = -9$$

$$\Delta'_4 = (-3) \cdot (-14) + (-1) \cdot 3 - 17 = 22$$

$$\Delta'_5 = (-3) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 - (-1) = 0$$

и ги нанасяме в свободните клетки

$\tilde{C}$	θ	θ	-3	4	-5	17	-1
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	x_1	1	1	-4	5	-14	0
-1	x_5	1	0	1	-1	3	1
		$-4 - z$	0	7	-9	22	0

Тъй като $\Delta'_3 = -9 < 0$ и в третата колонка има още един (в случая тогъво един) положителен

коэффициент, и това решение не е оптимално. Сега нямаме избор, тъй като в разрешаващия стълб (където е $\Delta'_3 = -9$) само един коэффициент $a_{13} = 5$ е положителен - той ще бъде разрешаващ елемент. Полуглавим елементите от първия (разрешаващ) ред на третата симплекс таблица чрез разделяне на $a_{13} = 5$ на елементите от първия ред на втората симплекс таблица:

$$b_1'' = \frac{1}{5}; a_{11}'' = \frac{1}{5}; a_{12}'' = -\frac{4}{5}; a_{13}'' = \frac{5}{5} = 1; a_{14}'' = -\frac{14}{5}$$

$$\text{и } a_{15}'' = \frac{0}{5} = 0.$$

Коэффициентите от втория ред пресмятаме по формулите

$$a_{2j}'' = a_{2j}' - a_{23}' \frac{a_{1j}'}{a_{13}'}, \quad b_2'' = b_2' - a_{23}' \frac{b_1'}{a_{13}'}$$

Но забележаваме, че $\frac{a_{1j}'}{a_{13}'} = a_{1j}''$ и $\frac{b_1'}{a_{13}'} = b_1''$, така че

$$a_{2j}'' = a_{2j}' - a_{23}' a_{1j}'' \quad \text{и} \quad b_2'' = b_2' - a_{23}' b_1''$$

Тъй като $a_{23}' = -1$, то

$$a_{2j}'' = a_{2j}' + a_{1j}'' \quad \text{и} \quad b_2'' = b_2' + b_1''$$

Така полуглавиме $a_{21}'' = 0 + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$;

$$a_{22}'' = 1 + (-\frac{4}{5}) = \frac{1}{5}; a_{23}'' = -1 + 1 = 0$$

$$a_{24}'' = 3 + (-\frac{14}{5}) = \frac{1}{5}; a_{25}'' = 1 + 0 = 1$$

Да отбележим, че тъй като аз е разрешаващ елемент, x_1 и x_3 си сменят местата — при третото решение базовите променливи са x_3 и x_5 , а свободните — x_1 , x_2 и x_4 . Ползваме третата симплекс таблица, като коефициентите Δ_j'' (и z_0'') пресмятаме по същия начин:

	Б	В	-3	4	-5	17	-1
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-5	x_3	1/5	1/5	-4/5	1	-14/5	0
-1	x_5	6/5	1/5	1/5	0	1/5	1
	$z_0 - z$	-11/5 - z	9/5	-1/5	0	-16/5	0

Имаме $\Delta_2'' = -\frac{1}{5} < 0$ и $\Delta_4'' = -\frac{16}{5} < 0$,

което показва, че решението е неоптимално ($\frac{\partial z}{\partial x_2} > 0$ и $\frac{\partial z}{\partial x_4} > 0$). Избираме по-

големия по модул от двете — Δ_4'' , следователно стъпът, съответстващ на свободната променлива x_4 ще бъде разрешаващ. Отново нямаме избор, защото само $a_{24}'' = \frac{1}{5}$ е положително ($a_{14} = -\frac{14}{5} < 0$). Из-

бираме a_{24}'' за разрешаващ елемент и го окуражаваме. Това означава, че неизвестните x_4 и x_5 си сменят местата — x_4 от свободна променлива става базова, а x_5 от базова — свободна. Елементите от втория (разрешаващ) ред на четвъртата симплекс табли-

за се получават от съответните елементи от третата таблица, разделями с $a_{24}'' = \frac{1}{5}$, т. е. умножаваме по 5.

Коефициентите от първия ред на четвъртата симплекс таблица се пресмятат по формулите

$$a_{1j}''' = a_{1j}'' - a_{14}'' \frac{a_{2j}''}{a_{24}''} = a_{1j}'' - a_{14}'' a_{2j}''' = a_{1j}'' - \left(-\frac{14}{5}\right) a_{2j}''' =$$

$$= a_{1j}'' + \frac{14}{5} a_{2j}'''$$

$$и \quad b_1''' = b_1'' - a_{14}'' \frac{b_2''}{b_{24}''} = b_1'' - a_{14}'' b_2''' = b_1'' + \frac{14}{5} b_2'''$$

Тъй като за коефициентите на втория ред имаме

$b_2''' = 6$; $a_{21}''' = 1$; $a_{22}''' = 1$; $a_{23}''' = 0$; $a_{24}''' = 1$; $a_{25}''' = 5$,
то за коефициентите на първия ред получаваме

$$b_1''' = b_1'' + \frac{14}{5} b_2''' = \frac{1}{5} + \frac{14}{5} \cdot 6 = \frac{85}{5} = 17$$

$$a_{11}''' = a_{11}'' + \frac{14}{5} a_{21}''' = \frac{1}{5} + \frac{14}{5} \cdot 1 = \frac{15}{5} = 3$$

$$a_{12}''' = a_{12}'' + \frac{14}{5} a_{22}''' = -\frac{7}{5} + \frac{14}{5} \cdot 1 = \frac{10}{5} = 2$$

$$a_{13}''' = a_{13}'' + \frac{14}{5} a_{23}''' = 1 + \frac{14}{5} \cdot 0 = 1$$

$$a_{14}''' = a_{14}'' + \frac{14}{5} a_{24}''' = -\frac{14}{5} + \frac{14}{5} \cdot 1 = 0$$

$$a_{15}''' = a_{15}'' + \frac{14}{5} a_{25}''' = 0 + \frac{14}{5} \cdot 5 = 14$$

Ползваме четвъртата симплекс таблица, като коефициентите Δ_j''' (и z_0''') пресмя-

таме по съответния начин:

	Б	в	-3	4	-5	17	-1
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-5	x_3	17	3	2	1	0	14
17	x_4	6	1	1	0	1	5
	$z_0 - z$	$17 - z$	5	3	0	0	16

Тъй като всички коефициенти A_j''' са неотрицателни, то решението е оптимално. Четвъртото неотрицателно базисно решение е

$$x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 17; x_4 = 6; x_5 = 0,$$

$$\text{като } z_{\max} = z_0''' = 17$$

7. Метод на изкуствения базис (М-метод)

Метода на изкуствената база се прилага за решаването на ЗЛО в общия случай, когато системата от ограничения няма предпозитен вид.

Да разгледаме ЗЛО:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \max$$

при ограничения

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Към тази задача не може непосредствено да се приложи симплекс метода, защото тя не е в предпозитан вид. Затова към лявата част на уравненията на системата (1) ще добавим за всяко уравнение една изкуствена неотрицателна неизвестна и ще получим нова система от m уравнения с $n+m$ неизвестни;

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + s_{n+1} &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + s_{n+2} &= b_2 \\ \vdots &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + s_{n+m} &= b_m \end{aligned} \quad (2)$$

Очевидно, неизвестните $s_{n+1}, s_{n+2}, \dots, s_{n+m}$ образуват база, която ще наричаме изкуствена база.

Освен това образуваме линейната функция

$$t = -s_{n+1} - s_{n+2} - \dots - s_{n+m} \quad (3)$$

и формулираме нова оптимизационна задача; да се намери максимумът на t от (3) при система от ограничения (2).

За решаването на спомагателната задача (2)-(3) може да се приложи симплекс метода, защото тя има предпозитан вид и изкуствените неизвестни $s_{n+1}, s_{n+2}, \dots, s_{n+m}$ са базови, а десните части (свободните коефициенти $b_1, b_2, \dots, b_m$) — неотрицателни. В процеса на решаването на последната задача ще се извършат симплексни преобразувания, при които изкуствените неизвестни постепенно ще се пре-

взрнат в свободни, а част от неизвестните $x_1, x_2, \dots, x_n$ ще станат базови. На даден етап задачата (4) вспомагателната задача (3) - (2) на задачата (1) ще достигне до такъв предпозитан вид, който ще отговаря на оптималното решение. При това максималната стойност на целевата функция t ще бъде или отрицателна или 0, тъй като t е линейна комбинация от неотрицателни променливи с отрицателни коефициенти.

Теорема (критерий за неразрешимост на ЗЛО (1)). Ако максималната стойност на вспомагателната целева функция t е строго по-малка от 0, то ЗЛО (1) не притежава решение (поради несъвместимост на ограничителните условия).

Доказателство: Действително, ако допуснем, че ЗЛО (1) притежава неотрицателно решение $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$, то вспомагателната задача (2) - (3) ще има решение $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n, s_{n+1} = 0, \dots, s_{n+m} = 0 \Rightarrow t = 0$, което противоречи на предположението, че $t < 0$.

Ако $t_{\max} = 0$, то оптималното решение на вспомагателната задача (3) - (2) трябва да има вида $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, \dots, 0)$, тъй като от условието $t = 0 \Rightarrow s_{n+1} = \dots = s_{n+m} = 0$. Първите n компоненти на това решение образуват неотрицателно решение на ЗЛО (1), то се явява базово по построение - измехду

$x_1, x_2, \dots, x_m$ не повеќе от m на број се строго положителни. В този случај в полусејката предпоставена форма на спомагателната система (2) - (3) се отхвърлят всички изкуствени променливи ($s_{n+1}, s_{n+2}, \dots, s_{n+m}$) и се ползува предпоставен еквивалент на изходната система (1).

На практика, вместо да максимализираме последователно двете целеви функции t и z , разгледаме нова комбинирана целева функция

$$W = Z + Mt = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n - M(s_{n+1} + s_{n+2} + \dots + s_{n+m}), \quad (4)$$

където M е положително число, по-голямо от което и да било число, срецано в задачата. Тогав решаваме задачата за максимализиране на комбинираната целева функция (4) при ограничения, разпространиени върху неизвестните $x_1, x_2, \dots, x_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \dots, s_{n+m}$, зададени с (2). Поради това, че използваме много големото число M , методът на изкуствената база често се нарича в литературата M -метод.

Пример (задача за диетата). Симпатична девойка наугава от женско списание, че за да стане косата „копринена“, организъмът трябва да приема ежедневно не по-малко от 40г. от веществото А, не по-малко от 4г. от Б и не по-малко от 30г. от В. Девойката знае, че 1 кг. ябълки съдържа 10г. от Б и 50г. от В, а 1 кг. краставици - 40г. от А, 20г.

от Б и 20 г. от В. Цената на ябълките е 6 лв./кг., а на краставиците - 5 лв./кг. Трябва да помогнем на девойката да състави диета, подпомагаща косата ѝ, при това - на най-ниска цена.

Решение:

Означаваме с x_1 и x_2 количеството, консумирани от девойката ябълки и краставици (в г.). Тогава общото количество от веществото А ще бъде $40x_2$, от веществото Б - $10x_1 + 20x_2$, от веществото В - $50x_1 + 20x_2$. Общата стойност на закупуените от девойката ябълки и краставици ще възлиза на $z = 6x_1 + 5x_2$. По този начин получаваме следната ЗЛО:

$$z = 6x_1 + 5x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 40x_2 \geq 40 \\ 10x_1 + 20x_2 \geq 4 \\ 50x_1 + 20x_2 \geq 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

За да превърнем системата от ограничения от система от неравенства в система от уравнения, трябва да се въведат новите неизвестни x_3 , x_4 и x_5 :

$$z = 6x_1 + 5x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 40x_2 - x_3 = 40 \\ 10x_1 + 20x_2 - x_4 = 4 \\ 50x_1 + 20x_2 - x_5 = 30 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

Въведените променливи x_3 , x_4 , x_5 не могат да са базови, защото те съответстват на решения с отрицателни координати.

Поради това въвеждаме изкуствените базови променливи s_1, s_2 и s_3 и разглеждаме задачата:

$$\begin{aligned} Z &= -6x_1 - 5x_2 - Ms_1 - Ms_2 - Ms_3 \rightarrow \max \\ 40x_2 - x_3 + s_1 &= 40 \\ 10x_1 + 20x_2 - x_4 + s_2 &= 4 \\ 50x_1 + 20x_2 - x_5 + s_3 &= 30 \end{aligned}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0$
Процесът на решаване на тази ЗЛО е в следната поредица от симплекс таблици

$\tilde{C}$	Б	b	-6	-5	0	0	0	-M	-M	-M
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	s_2	s_3
-M	s_1	40	0	40	-1	0	0	1	0	0
-M	s_2	4	10	20	0	-1	0	0	1	0
-M	s_3	30	50	20	0	0	-1	0	0	1
	Z_0	-74M	-60M+4	-80M+5	M	M	M	0	0	0
-M	s_1	32	-20	0	-1	2	0	1	-2	0
-5	x_2	1/5	1/2	1	0	-1/20	0	0	1/20	0
-M	s_3	26	40	0	0	1	-1	0	-1	1
	Z_0	-58M-1	-20M+7/2	0	M	-3M+1/4	M	0	4M-1/4	0
-M	s_1	40	0	40	-1	0	0	1	0	0
-6	x_1	2/5	1	2	0	-1/10	0	0	1/10	0
-M	s_3	10	0	-80	0	5	-1	0	-5	1
	Z_0	-50M-12/5	0	40M-7	M	-5M+6/10	M	0	6M-6/10	0
-M	s_1	40	0	40	-1	0	0	1	0	0
-6	x_1	0,6	1	0,4	0	0	-0,02	0	0	0,02
0	x_4	2	0	-16	0	1	-1/5	0	-1	0,2
	Z_0	-40M-3,6	0	-40M+2,6	M	0	0,12	0	M	M-0,12
-5	x_2	1	0	1	-1/40	0	0	1/40	0	0
-6	x_1	0,2	1	0	0,01	0	-0,02	-0,01	0	0,02
0	x_4	18	0	0	-0,4	1	-0,2	0,4	-1	-0,2
	Z_0	-6,9	0	0	13/200	0	0,12	M-13/20	M	M-0,12

Пояснения за попълване на симплекс таблици:

1. Последният ред на всяка симплекс таблица ще наричаме ред на оценките, а числата Z_0 и Δ_j , $j=1, 2, \dots, n+m$ - оценки.

- Z_0 (оценка на стълб b) = скаларното произведение на стълб $\tilde{c}$ със стълб b

- Δ_j (оценката на j -я стълб) = скаларното произведение на стълб $\tilde{c}$ с j -я стълб - (минус) елемента на първия ред от стълб j .

2. Избор на разрешаващ елемент a_{rs} .

Нуждата от такъв се явява, ако симплекс таблицата не е последна, т.е. от оценките Δ_j на стълбовете, съответстваща на неизвестните има поне една отрицателна. Тогава разрешаващият стълб (с номер s) съответства на тази измежду отрицателните оценки (Δ_s), която е с най-голяма абсолютна стойност измежду всички отрицателни оценки.

Избор на разрешаващ ред: от разрешаващият стълб разделяме всички компоненти $a_{is} > 0$ и за тях образуваме частните
$$\frac{b_i}{a_{is}}$$

Вземаме за разрешаващ ред (с номер r) този, при който това частно е минимално. Значението на j -я разрешаващ стълб с r -я разрешаващ ред ни дава разрешаващия елемент a_{rs} .

3. Смяна на базата.

Тъй като a_{rs} е разрешаващ този означава, че неизвестната, намираща се на r -я ред преставя да бъде базова и се сменя с неизвестната от j -я стълб.

4. Пресмятане на новите компоненти от разрешаващия ред:

$$\text{нова компонента} = \frac{\text{стара компонента}}{\text{разрешаващ елемент}}$$

5. Пресмятане на новите компоненти от другите редове

$$\text{нова компонента} = \boxed{\begin{array}{l} \text{стара комп.,} \\ \text{разположена} \\ \text{на същото} \\ \text{место} \end{array}} - \boxed{\begin{array}{l} \text{стара} \\ \text{комп.,} \\ \text{разпо-} \\ \text{ложена} \\ \text{на същия} \\ \text{ред, но} \\ \text{от} \\ \text{разре-} \\ \text{шава-} \\ \text{щия} \\ \text{стълб} \end{array}} \cdot \boxed{\begin{array}{l} \text{нова} \\ \text{комп.,} \\ \text{разпо-} \\ \text{ложена} \\ \text{на същия} \\ \text{стълб,} \\ \text{но от} \\ \text{разре-} \\ \text{шава-} \\ \text{щия} \\ \text{ред} \end{array}}$$

Коментар на решението

Вижда се, че в реда на оценките на петата симплекс таблица липсват отрицателни оценки Δ_j , следователно е получено оптималното решение. То е:

$$x_1 = 0,2; x_2 = 1; x_3 = 0; x_4 = 18; x_5 = 0; s_1 = s_2 = s_3 = 0$$

Това ще имаме

$$(6x_1 + 5x_2)_{\min} = 6 \cdot 0,2 + 5 \cdot 1 = 6,2$$

Това, че в решението получаваме $x_4 = 18$ означава, че тази диета ще набави на девоичката 22 г. от веществото Б (с 18 г. повече от необходимия минимум).