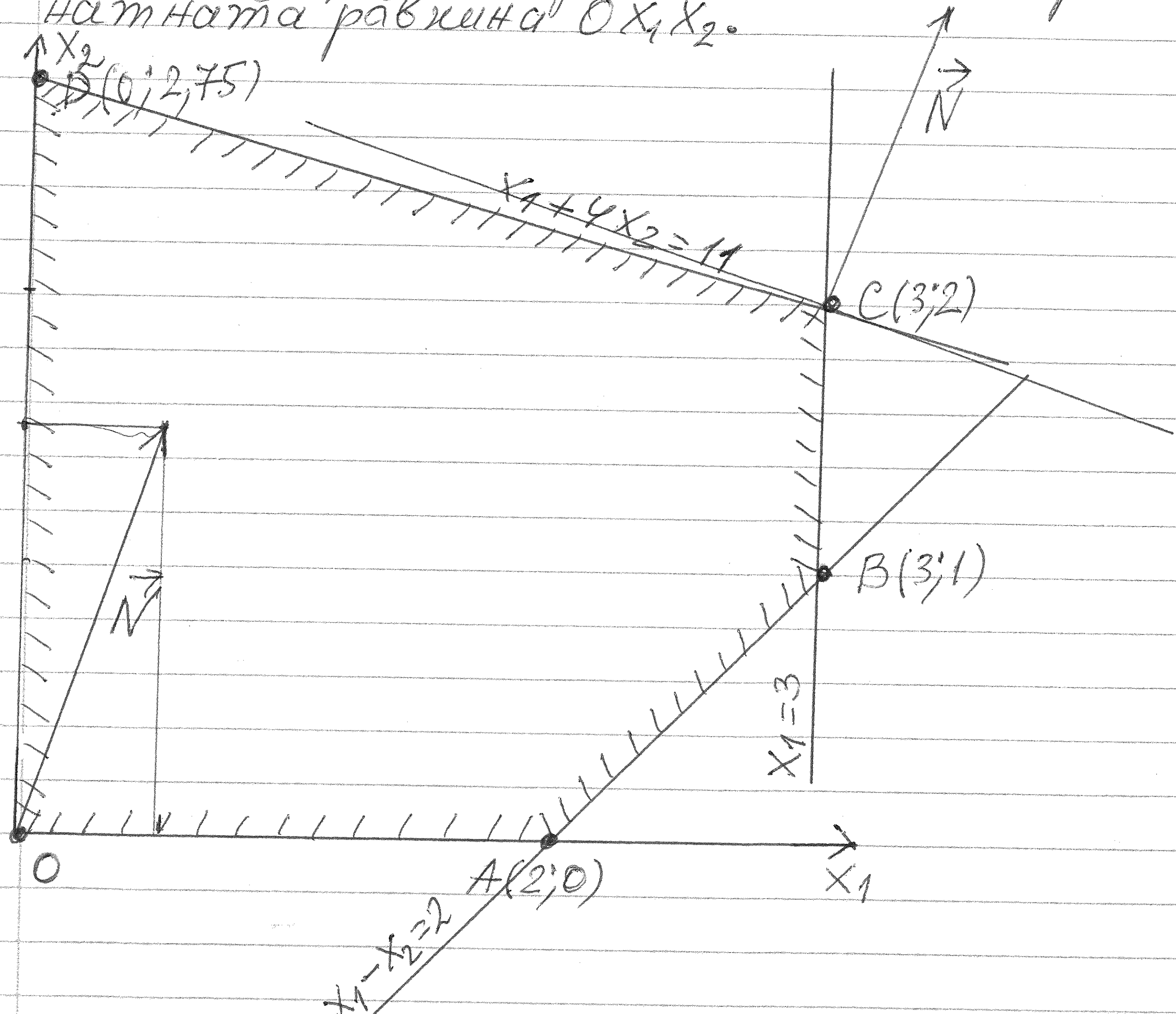
3. Графичен метод за решаване на оптимизационни задачи

Пример 1. Да се максимализира линейната целева функция

$$f(X) = X_1 + 3X_2 \rightarrow max$$

при ограниченията: $X_1 + 4X_2 \leq 11$; $X_1 - X_2 \leq 2$; $X_1 \leq 3$; $X_1 \geq 0$ и $X_2 \geq 0$.

Тъй като броят на променливите е 2, можем да изобразим ограниченията в координатната равнина OX_1X_2.



Черт. 1

На черт. 1 е показано, че всяко от ограничителните неравенства определя една полуравнина. Сечението на тези полуравнини е изпъкналия петоъгълник OABCD. Поведението на линейната целева функция $f(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2$ може да се характеризира с фамилията от успоредни прави $x_1 + 3x_2 = c$; $c \geq 0$ с общ нормален вектор $\vec{N}(1; 3)$. Този нормален вектор $\vec{N}$ показва направлението на най-бързото нарастване на функцията $f(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2$. Ясно е, че тази фамилия от успоредни прави „напуска" ограничителната област в т. $C(3; 2) \Rightarrow f_{max} = f(3, 2) = 3 + 3.2 = 9$.

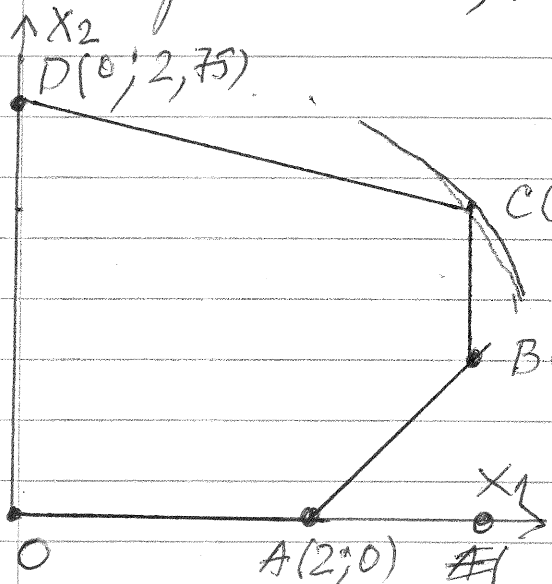
По аналогичен начин може да се реши и задачата за минимизиране на линейна целева функция на две независими променливи.

При всяко положение, при 2 променливи, множеството от допустимите планове на линейната оптимизационна задача се представя като някакъв многоъгълник в координатната равнина Ox_1x_2. Това представяне в литературата е ~~до~~ получило названието „първа геометрична интерпретация на задачата на линейното програмиране." Когато сечението на всички ограничителни полуравнини е празното множество, задачата няма решение. Във всички други случаи, решението е единствено.

В случаите, когато или целевата функция е нелинейна или ограничителната област е нелинейна (или и двете), също можем да решим съответната задача от нелинейното оптимиране по графичен начин. Особено удачно е това, когато градиентът на целевата функция е положителен, т.е

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) \geq (0, 0)$$

Пример 2. Да се реши графично задачата на нелинейното оптимиране за целева функция $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \to max$ при същите ограничения, като в пример 1.



черт. 2.

Поведението на нелинейната целева функция $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ може да се характеризира с фамилията концентрични окръжности (с център началото на к.с.) $x_1^2 + x_2^2 = c$, $c > 0$ с радиуси $\sqrt{c}$.

Ясно е, че $\nabla f = (2x_1, 2x_2) \geq (0, 0)$ в първи квадрант. Тази фамилия от концентрични окръжности „напуска" ограничителната област в т. C(3, 2), за това

$$f_{max} = f(3, 2) = 3^2 + 2^2 = 13.$$

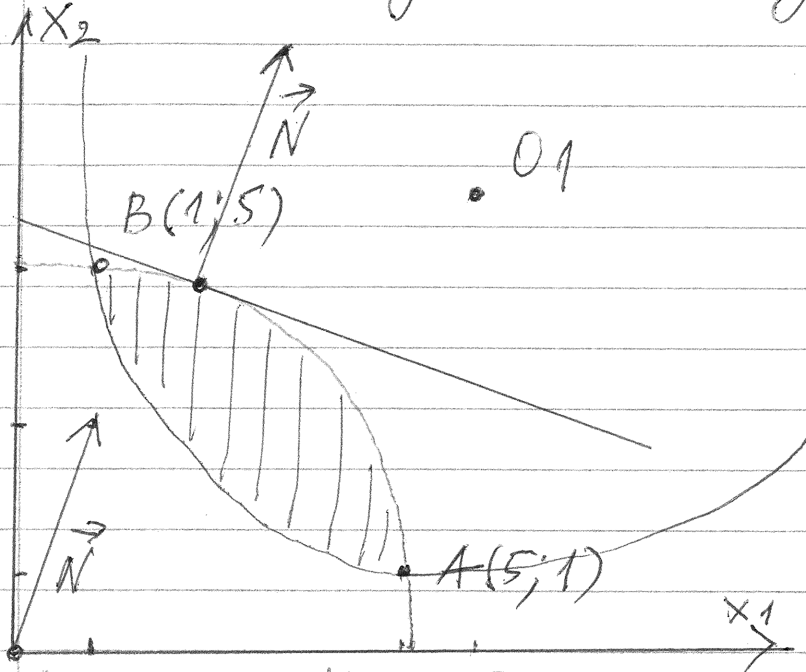
Пример 3. Да се реши графично задачата на нелинейното оптимиране

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2 \Rightarrow max$$

при ограничения:

$$x^2 + y^2 \le 26$$

$$x^2 + y^2 - 12x - 12y + 46 \le 0$$



Черт. 3

Първото ограничение $x^2+y^2 \le 26$ представлява сектора от окръжността $x^2+y^2=26$ (с ц-р $(0,0)$ и р-с $-\sqrt{26}$) в първи квадрант. Чрез допълване до точен квадрат: $x^2 - 12x + 36 - 36 + y^2 - 12y + 36 - 36 + 46 \le 0 \Rightarrow (x-6)^2 + (y-6)^2 \le 26$

Виждаме, че второто ограничение представлява кръг с център $O_1(6;6)$ и радиус $\sqrt{26}$. Намираме точките на пресичане на двете окръжности като решим системата

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ x^2 + y^2 - 12x - 12y + 46 = 0 \end{cases}$$

Като заместим във второто уравнение x^2+y^2 с 26 (от първото) получаваме

$$72 - 12x - 12y = 0 \Rightarrow x + y = 6 \Rightarrow$$

$y = 6 - x$. Заместваме $y = 6 - x$ в първото ур-е и получаваме квадратното ур-е

$$x^2-6x+5=0$$

с корени $x_1=5$ и $x_2=1$. Като заместим в $x^2+y^2=26$ получаваме $y_1=1$ и $y_2=5$. Следователно (черт. 3) ограничителната област е с граница: 1) ~~окръжността~~ дъгата от окръжността $x^2+y^2=26$ от т. $A(5;1)$ до т. $B(1;5)$ и 2) дъгата от окръжността $(x-6)^2+(y-6)^2=26$ между същите точки. Тъй като трябва да максимализираме функцията $f(x,y)=x+3y$, то ~~то~~ екстремалната точка ще бъде разположена на дъгата от окръжността $x^2+y^2=26$. Разглеждаме свцията фамилия прави $x+3y=c$ (като в пример 1). Максимум ще се достига, когато права от тази фамилия (с нормален вектор $\vec{N}(1;3)$) е допирателна на въпросната окръжност. Нормалният вектор към точка от тази окръжност означаваме с $\vec{n}$. Ще имаме

$$\vec{n}=\nabla h=\left(\frac{\partial h}{\partial x},\frac{\partial h}{\partial y}\right)=(2x,2y),$$

където $h=x^2+y^2-26$.

За да бъде правата допирателна на окръжност е необходимо векторите $\vec{N}$ и $\vec{n}$ да са колинеарни:

$$\vec{N}\parallel\vec{n}\iff\vec{n}=\lambda\vec{N} \text{ или } (2x;2y)=$$
$$=\lambda(1;3).$$

Т.е. ще имаме $2x=\lambda \Rightarrow x=\frac{\lambda}{2}$ и $2y=3\lambda$ $\Rightarrow y=\frac{3\lambda}{2}$. За да намери екстремалната точка от дъгата на окръжността, заместваме $x=\frac{\lambda}{2}$ и $y=\frac{3\lambda}{2}$ в уравнението:

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2+\left(\frac{3\lambda}{2}\right)^2=26 \Leftrightarrow \frac{10}{4}\lambda^2=26,\ \lambda^2=\frac{52}{5}$$

$\lambda=2\sqrt{\frac{13}{5}}$. Така получаваме $x=\sqrt{\frac{13}{5}}$ и $y=3\sqrt{\frac{13}{5}}$. Тогава максималната стойност на целевата функция ще бъде

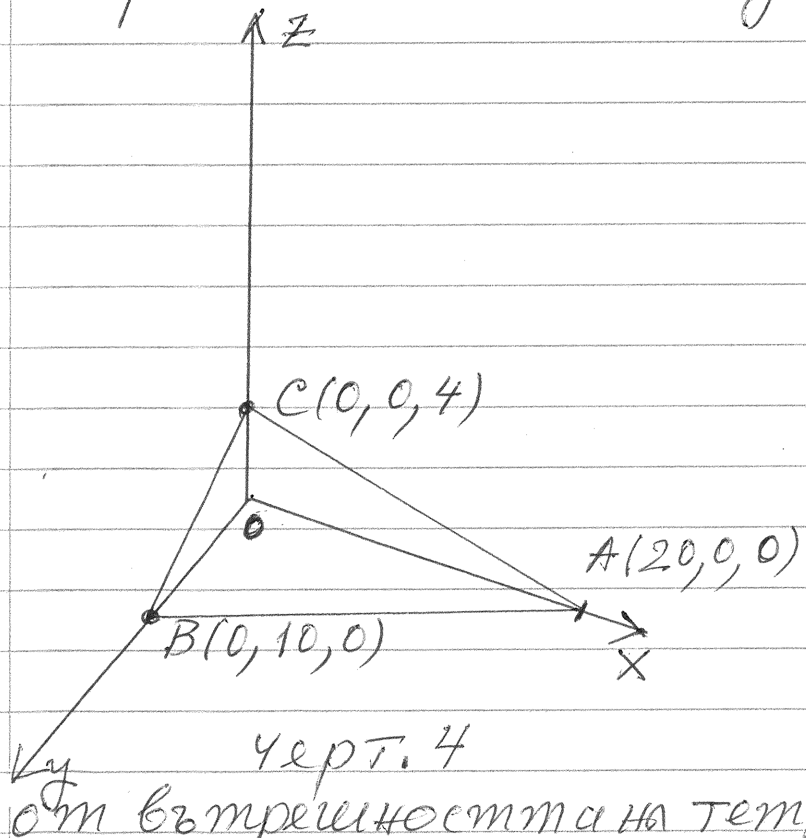
$$f_{max}=f\left(\sqrt{\frac{13}{5}};3\sqrt{\frac{13}{5}}\right)=\sqrt{\frac{13}{5}}+3.3\sqrt{\frac{13}{5}}=10\sqrt{\frac{13}{5}}.$$

Като използваме геометрични съображения можем да решаваме и оптимизационни задачи с 3 променливи.

Пример 4. Да се реши геометрично задачата на линейното оптимиране

$$f(x,y,z)=2x+y+3z$$

с ограничението $x+2y+5z\leq 20$



черт. 4

Зад.: В условията на оптимизационните задачи ограниченията за неотрицателност на променливите се подразбират.

Ясно е, че ограничителната област в $\mathbb{R}^3_+$ се състои от вътрешността на тетраедъра OABC.

Максимумът може да бъде достигнат в някой от върховете A, B и C на този тетраедър (ако f има равни стойности в две от тези точки, значи максимумът се достига във всички точки от съответния ръб на тетраедъра, а ако f има равни стойности и в трите точки, максимумът се достига във всички точки от стената ABC. Последното е налице, ако градиентът на f е колинеарен с нормалния вектор на ограничителната равнина).
Пресмятаме стойността на f в точките A, B и C:

$$f(A)=f(20,0,0)=2.20+0+3.0=40$$
$$f(B)=f(0,10,0)=2.0+10+3.0=10$$
$$f(C)=f(0,0,4)=2.0+0+3.4=12$$
$$\Rightarrow f_{max}=f(A)=f(20,0,0)=40.$$

Пример 5. Намерете максимума и минимума на функцията $f(x,y,z)=x+2y+3z$ при ограниченията

$$9x-11y-4z\le -17$$
$$21x-11y-13z\le -14$$
$$24x-11y-7z\ge -5$$
$$6x-11y-10z\ge -59$$

Първата ограничителна равнина с уравнение $9x-11y-4z+17=0$ я означаваме с α; втората $21x-11y-13z+14=0$ с β; третата $24x-11y-7z+5=0$ с γ и четвъртата $6x-11y-10z+59$ с δ.
Нека $A=\alpha\cap\beta\cap\gamma$; $B=\alpha\cap\beta\cap\delta$; $C=\alpha\cap\gamma\cap\delta$

и $D = \beta \cap \gamma \cap \delta$. След решаване на системата

$$\begin{cases} 9x - 11y - 4z + 17 = 0 \\ 21x - 11y - 13z + 14 = 0 \\ 24x - 11y - 7z + 5 = 0 \end{cases}$$

намирахме координатите на т. $A(1, 2, 1)$;
на системата

$$\begin{cases} 9x - 11y - 4z + 17 = 0 \\ 21x - 11y - 13z + 14 = 0 \\ 6x - 11y - 10z + 59 = 0 \end{cases}$$

— на т. $B(4, 3, 5)$;
на системата

$$\begin{cases} 9x - 11y - 4z + 17 = 0 \\ 24x - 11y - 7z + 5 = 0 \\ 6x - 11y - 10z + 59 = 0 \end{cases}$$

— на т. $C(2, 1, 6)$
и на системата

$$\begin{cases} 21x - 11y - 13z + 14 = 0 \\ 24x - 11y - 7z + 5 = 0 \\ 6x - 11y - 10z + 59 = 0 \end{cases}$$

на т. $D(3, 7, 0)$.
Така получаваме тетраедъра $ABCD$.
За да може една линейна функция, каквато е f да има максимум и минимум, то ограничителната област трябва да бъде ограничена, т.е. да се състои от вътрешността на тетраедъра. Това ще бъде така, ако т. G (медицентър на тетраедъра), такава че

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$$

се намира в ограничителната област. (Тя със сигурност е във вътрешността на тетраедъра). За координатите на т. G (средно аритметични на координатите на върховете A, B, C и D) ще имаме

$$G\left(\frac{10}{4}, \frac{13}{4}, \frac{12}{4}\right)$$

Проверяваме дали са изпълнени ограниченията:

$$9\cdot\frac{10}{4} - 11\cdot\frac{13}{4} - 4\cdot\frac{12}{4} = \frac{90-143-48}{4} = -\frac{101}{4} \le -17$$

$$21\cdot\frac{10}{4} - 11\cdot\frac{13}{4} - 13\cdot\frac{12}{4} = \frac{210-143-156}{4} = -\frac{89}{4} \le -14$$

$$24\cdot\frac{10}{4} - 11\cdot\frac{13}{4} - 7\cdot\frac{12}{4} = \frac{240-143-84}{4} = \frac{13}{4} \ge -5$$

$$6\cdot\frac{10}{4} - 11\cdot\frac{13}{4} - 10\cdot\frac{12}{4} = \frac{60-143-120}{4} = -\frac{203}{4} \ge -59$$

Следователно ограничителната област е вътрешността на тетраедъра, тогава екстремалните стойности на линейната целева функция могат да се достигат във върховете на тетраедъра. Пресмятаме

$$f(A) = f(1,2,1) = 1+2.2+3.1 = 8$$

$$f(B) = f(4,3,5) = 4+2.3+3.5 = 25$$

$$f(C) = f(2,1,6) = 2+2.1+3.6 = 22$$

$$f(D) = f(3,7,0) = 2+2.7+3.0 = 16$$

Така получаваме

$$f_{min} = f(A) = f(1,2,1) = 8$$

$$f_{max} = f(B) = f(4,3,5) = 25$$

4. Задача на линейното оптимиране

В общ вид задачата на линейното оптимиране (ЗЛО) може да бъде формулирана като задача за намиране на максимума на линейната целева функция

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = cx \rightarrow max$$

върху някакво множество $D \subset \mathbb{R}_+^n$, удовлетворяващо системата от ограничения

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

Трябва да се отбележи, че ако в системата от ограничения се срещат неравенства с противоположна посока, то при умножение на двете страни с (-1) се получават неравенства, при които лявата страна е не по-голяма от дясната. От друга страна, характера на екстремума също е относителен – задачата за намиране на максимум на функцията

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = cx$$

е еквивалентна на задачата за намиране на минимум на функцията

$$-f(x) = \sum_{j=1}^{n} (-c_j)x_j = (-c)x$$

Удобно е, задачата да се представя в матрична форма:

$$f(x) = cx \to max,\ Ax \leq b,$$

където $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n_+$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Ако всички ограничения са записани във вид на равенства, то задачата се нарича задача на линейното оптимиране в канонична форма:

$$f(x) = cx \to max \quad Ax = b$$

Под план на ЗЛО ще разбираме всеки вектор $x \in \mathbb{R}^n_+$. Допустим план ще наричаме всеки план $x \in \mathbb{R}^n_+$, удовлетворяващ ограниченията, т.е. $x \in D$. Оптимален план ще наричаме вектора $x^* \in D$, при който целевата функция достига своя максимум:

$$\max_{x \in D} f(x) = f(x^*)$$

Величината $f^* = f(x^*)$ се нарича оптимална стойност на целевата функция. Решение на ЗЛО се нарича двойката (x^*, f^*), а процесът на решаване на ЗЛО се състои в намирането на множеството от всички решения.

Преходът към канонична форма на една ЗЛО се състои от две прости правила:

(1) ограниченията от тип неравенства се преобразуват в ограничения от тип равенства чрез добавяне на нови (фиктивни) неотрицателни променливи $x_i' \ (i=\overline{1,m})$, които влизат в целевата функция с коефициент 0 (т.е. не влияят на нейните стойности);

(2) променливи, на които не са наложени условия за неотрицателност се представят като разлика от две неотрицателни нови променливи:

$$x_j = \overline{x}_j - \overline{\overline{x}}_j \ (\overline{x}_j \geq 0, \overline{\overline{x}}_j \geq 0)$$

Пример: Дадена е задачата на линейното оптимиране

$$f(x) = 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 \to max$$

с ограничения

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 7$$
$$-3x_2 + 4x_3 - 5x_4 - 4x_5 \leq 2$$
$$3x_1 - 5x_3 + 6x_4 - 2x_5 \leq 4$$
$$x_1 \geq 0 \qquad x_3 \geq 0$$

Тогава, във връзка с формулираните по-горе правила, задачата добива вида:

$$\overline{f}(\overline{x}) = 5x_1 + 3\overline{x}_2 - 3\overline{\overline{x}}_2 + x_3 + 2\overline{x}_4 - 2\overline{\overline{x}}_4 - 2\overline{x}_5 + 2\overline{\overline{x}}_5 + 0x_2' + 0x_3' \to max$$

при ограничения

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 7$$

$$2x_1 + 4\bar{x}_2 - 4\bar{\bar{x}}_2 + 5x_3 = 7$$
$$-3\bar{x}_2 + 3\bar{\bar{x}}_2 + 4x_3 - 5\bar{x}_4 + 5\bar{\bar{x}}_4 - 4\bar{x}_5 + 4\bar{\bar{x}}_5 + x_2' = 2$$
$$3x_1 - 5x_3 + 6\bar{x}_4 - 6\bar{\bar{x}}_4 - 2\bar{x}_5 + 2\bar{\bar{x}}_5 + x_3' = 4$$
$$x_1 \geq 0,\ \bar{x}_2 \geq 0,\ \bar{\bar{x}}_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ \bar{x}_4 \geq 0,\ \bar{\bar{x}}_4 \geq 0,\ \bar{x}_5 \geq 0,$$
$$\bar{\bar{x}}_5 \geq 0,\ x_2' \geq 0,\ x_3' \geq 0.$$

Вижда се, че преходът от обща форма на ЗЛО към канонична форма се „заплаща" – нараства размерността на пространството, което (при равни други условия) усложнява процеса на решаване на задачата.