23. Оптимизация на портфейла по Марковиц

Хари Марковиц (роден през 1927 г.) получава нобелова награда за икономика през 1990 г. за предложената от него теория на портфейлните инвестиции. Той пръв в икономическата наука предлага схема за оптимизация по Парето на непрекъснато множество от фондови портфейли в рамките на вероятностната парадигма.

Нека са дадени N на брой финансови актива $A_1, \dots A_i, \dots, A_N$, всеки отличчаващ се със своята доходност r_i и риск (средно квадратично отклонение) σ_i. Наред с това е дадена матрицата (cov_{ij}), измерваща корелативността (връзката) между тези финансови инструменти. На всеки възможен портфейл P съответстват теглата $(n_1, \dots, n_i, \dots, n_N)$ на съответните активи, като

$$n_1 + \cdots + n_i + \cdots + n_N = 1.$$

Предполага се, че пространството на теглата е непрекъснато. Поради това множеството от всевъзможните портфейли е непрекъснато и неизброими.

Доходността r_P и рискът σ_P на портфейла $P(n_1, \dots, n_i, \dots, n_N)$ се пресмятат по формулите

$$r_P = \sum_{i=1}^{N} n_i r_i$$

и

$$\sigma_P = \left(\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} n_i n_j \, cov_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Задачата за оптимизиране по Парето предполага, че решаването ѝ може да се осъществи по една от двете възможности:

а) избор на портфейл с максимална доходност;

б) избор на портфейл с минимален риск.

Невъзможно е да вървим едновременно по двата пътя; единият от критериите трябва да играе ролята на целева функция, а другият – на ограничение. Така се появяват двете взаимно дуални задачи на Марковиц.

По такъв начин, правата оптимизационна задача на Марковиц има следната формулировка: да се определи тегловия вектор $(n_1, \dots, n_i, \dots, n_N)$, максимализиращ целевата функция r_P при зададено ограничение за нивото на риск σ или

$$r_P \to \max \ \text{ при } \ \sigma_P = \sigma = const$$

Очевидно, горната задача има смисъл при $\sigma_{min} \le \sigma \le \sigma_{max}$, където σ_{min} е рискът на портфейла с минимален риск, а $\sigma_{max} = max\{\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_N\}$. Ограничението за риска $\sigma_P = \sigma$ показва какъв е профила на инвеститора: при малки стойности на σ, близки до σ_{min} очевидно става дума за консервативни инвеститори, с нарастването на σ профилът на инвеститора става все по-агресивен (по-висока доходност при по-висок риск).

Дуалната задача на оптимизацията по Марковиц е такава, при която рискът σ_P играе ролята на целева функция, а очакваната доходност – на ограничение. Тя се формулира така: да се определи теглови вектор $(n_1, \dots, n_i, \dots, n_N)$, минимизиращ целевата функция σ_P при зададено ниво на доходност r или

$$\sigma_P \to \min \ \text{ при } \ r_P = r = const$$

Тук очевидно $r \in [r_{min}, r_{max}]$, където r_{min} и r_{max} са най-малката и най-голяма доходности на дадените финансови инструменти $A_1, \dots A_i, \dots, A_N$.

Доказва се, че правата и дуална задача имат едно и също решение, в смисъл: ако ограничението на правата задача е $\sigma_P = \sigma_0$ и намереният оптимален портфейл е с доходност r_0, то поставяйки това r_0 в ограничението на дуалната задача, при решаването ѝ ще получим портфейл с риск σ_0 (и обратното).

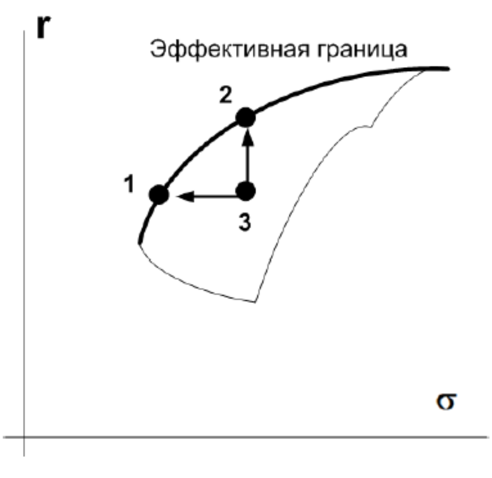

Рис. 1. Ефективна граница за инвестиране

Тъй като множеството от всички портфейли е непрекъснат портфейлен облак (плоска фигура в координатната равнина доходност – риск), то решенията на всевъзможните задачи (прави и дуални) са разположени върху ефективната граница за инвестиране. Тя е вдлъбната крива (в общия случай) и се явява северозападна граница на портфейлния облак. На рис. 1 портфейлната точка 3 се доминира от точка 2 по доходност, а от точка 1 – по риск. Очевидно е, че тази ефективна граница за инвестиране е подмножеството на Парето за множеството от всевъзможните портфейли.

При $N = 2$ двете оптимизационни задачи на Марковиц губят смисъл: от ограничението

$$\sigma_P{}^2 = n_A{}^2\sigma_A{}^2 + n_B{}^2\sigma_B{}^2 + 2n_An_Bcov(A,B) = \sigma^2$$

и $n_A + n_B = 1$ можем да намерим еднозначно n_A и n_B и оттам доходността $r_P = n_Ar_A + n_Br_B$ и няма целева функция за максимализиране. При $N \geq 3$ оптимизационните задачи на Марковиц се решават посредством метода на вариране на множителите на Лагранж, което ще илюстрираме с пример.

Пример. Дадени са трите вида акции A, B и C с параметрите от пример 8. Да се намерят:

а) структурата на портфейл, съставен от трите вида акции с доходност от 15% и минимален риск;

б) структурата на портфейл, съставен от трите вида акции с риск $\sigma_P = 20\%$ и максимална доходност.

Решение:

а) Тъй като портфейла, съставен от трите вида акции трябва да има доходност 15, то трябва да е изпълнено съотношението

$$r_P(n_A, n_B) = 25 - 15n_A - 10n_B = 15$$

От това съотношение получаваме, че n_A и n_B в този случай не са независими променливи и можем да изразим едното чрез другото. Получаваме

$$n_B = 1 - 1{,}5n_A$$

Като заместим така полученото n_B във формулата за дисперсията при портфейл от трите вида акции, получаваме, че при доходност $r_P = 15$ D_P е функция на една променлива n_A:

$$D_P(n_A) = 196 - 224n_A + 295n_A{}^2$$

Портфейла с наложеното изискване за доходност ще бъде с минимален риск за такава стойност на n_A при която

$$D_P{}' = -224 + 590n_A = 0 \Leftrightarrow n_A = 0{,}38$$

За структурата на портфейла получаваме $n_A = 0{,}38$ и $n_B = 0{,}43$ $(n_C = 0{,}19)$. При тази структура ще имаме риск, измерващ се с $D_P = 149{,}48$ $(\sigma_P = 12{,}2)$. Можем да отбележим, че така получения портфейл има същата доходност както акциите B, но по-малък риск, въпреки че в структурата му с тегло от 19% присъстват високорисковете акции C (всъщност той има по-нисък риск от всичките му съставящи).

б) Във формулата за дисперсия на портфейл, съставен от три акции трябва да заместим $D_P(n_A, n_B)$ с 400. Получаваме

$$D_P(n_A, n_B) = 1600 - 3592n_A - 2864n_B + 2188{n_A}^2 + 1460{n_B}^2 + 3452n_A n_B = 400$$

или

$$1200 - 3592n_A - 2864n_B + 2188{n_A}^2 + 1460{n_B}^2 + 3452n_A n_B = 0$$

Така задачата за намиране структурата на портфейл с фиксиран риск и максимална доходност се свежда до

$$r_P(n_A, n_B) = 25 - 15n_A - 10n_B \to max$$

при наличие на горното ограничение.

Такива задачи за условен екстремум на функция на две и повече променливи се решават по метода на множителите на Лагранж. Съставяме функцията на Лагранж

$$\mathcal{L}(n_A, n_B, \lambda) = 25 - 15n_A - 10n_B + \lambda(1200 - 3592n_A - 2864n_B + 2188{n_A}^2 + 1460{n_B}^2 + 3452n_A n_B)$$

Неизвестните n_A, n_B и спомагателният множител λ се намират от нулирането на първите частни производни по всички три променливи. Имаме

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial n_A} = -15 + \lambda(-3592 + 4376n_A + 3452n_B) = 0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial n_B} = -10 + \lambda(-2864 + 2920n_B + 3452n_A) = 0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda} = 1200 - 3592n_A - 2864n_B + 2188{n_A}^2 + 1460{n_B}^2 + 3452n_A n_B = 0$$

От първото и второто уравнение на горната система изразяваме n_A и n_B чрез λ:

$$n_A = 0{,}644 + 0{,}0105\frac{1}{\lambda} \quad \text{и} \quad n_B = 0{,}222 - 0{,}00895\frac{1}{\lambda}$$

Заместваме тези изрази в третото уравнение и получаваме квадратно уравнение за λ

$$0{,}04\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - 3{,}76\frac{1}{\lambda} - 276 = 0$$

С корени $\left(\frac{1}{\lambda}\right)_1 = 142{,}5$ и $\left(\frac{1}{\lambda}\right)_2 = -48{,}5$. Сега заместваме в изразите за n_A и n_B чрез λ. От първия корен не получаваме допустимо решение (получава се $n_A > 2$), а от втория намираме $n_A = 0{,}135$, $n_B = 0{,}656$ и $n_C = 0{,}209$. При такава структура на портфейла за максималната доходност се получава $(r_P)_{max} = 16{,}415$.