# III. СТАТИЧНИ МОДЕЛИ НА ПАЗАРА НА СЪРВЪРНИ ОПЕРАЦИОННИ СИСТЕМИ

**Приложение 4. Математическа теория на пазарите на потребителски стоки**

Разглеждаме една стока, предназначена за крайно потребление. Означаваме с $x$ количеството от тази стока, което потребителите, участващи в даден пазар на тази стока (национален, регионален или друг) биха желали да закупят от нея. Естествено е, че $x$ ще зависи от много фактори (или на математически език $x$ ще е функция на много променливи) – цените на други стоки (заместващи или допълващи потреблението на тази стока), потребителския доход, вкусове, предпочитания, модни тенденции и др. Пренебрегваме всички тези фактори, защото преди всичко количеството на потреблението на стоката $x$ ще зависи от нейната цена $p$. Така получаваме функцията на пазарно потребителско търсене на тази стока $x = x(p)$. Трябва да отбележим, че всички, които биха купили стоката на цена $p$ (с удоволствие) биха я купили и на цена по-ниска от $p$, следователно функцията $x(p)$ е монотонно намаляваща, значи $x'(p) < 0$.

Наличието на потребителско търсене на стоката формира (микроикономически) стоков пазар. Логично е на този пазар да се появят и тези, които ще прдлагат стоката – нейните производители. (В микроикономиката под производител се разбира всеки, който предлага дадена стока). Означаваме с $y$ количеството от стоката, което би било предложено от производителите на този пазар. Естествено е, че и $y$ (подобно на $x$) ще зависи от много и разнородни фактори – цените на ресурсите на производство, технологията по която се произвежда стоката, политическата и икономическа конюнктура и други. Най-важният фактор обаче е (отново) цената на стоката $p$. Тази функция на една променлива $y = y(p)$ ще наричаме функция на пазарно предлагане на стоката. Тя е растяща функция на аргумента си: тези които продават стоката при цена $p$ биха се радвали да я продават и по-скъпо. Така, че $y'(p) > 0$.

Така, на пазара на тази стока се срещат двете страни – потребители и производители, снабдени със своите функци $x(p)$ и $y(p)$ съответно. Те трябва „да се разберат“ за такава цена на стоката $p = p_E$, при която пазарното търсене и пазарното предлагане да се изравнят и по този начин производителите ще предложат точно това количество $q_E = x(p_E) = y(p_E)$, което потребителите търсят. Така се получава частичния равновесен модел. При всякакво отклонение от него се получават излишъци (при $p > p_E \Longrightarrow y(p) > x(p)$) или дефицити (при $p < p_E \Longrightarrow y(p) < x(p)$). Няма да коментирами необходимите условия за съществуване на частично (по една стока) пазарно равновесие, неговата единственост, устойчивост и др.

От тук нататък ще предполагаме, че по един или друг начин потребителите са генерирали своята функция на пазарно търсене на стоката $x = x(p), x'(p) < 0$. (Начинът по който става това е обект на изучаване от математическата теория за поведението на потребителите). Ще се концентрираме в производителите, като ще се опитаме да дадем отговори на въпросите:

- при какви условия и как производителите генерират функция на предлагане?;
- ако тези условия не са налице, то по какъв начин се определят пазарните цена и количество на стоката?

Отговорът на тези въпроси е свързан с класификацията на пазарите, свързана със структурата на предлагане на стоката. Те се делят на пазари на:

- съвършенна конкуренция (с достатъчно много на брой предлагащи стоката);
- монополизъм (с една фирма-монополист на пазара);
- монополистична конкуренция (с доста на брой фирми, предлагащи различни търговски марки от стоката);
- олигополна конкуренция (с няколко играча на пазара, които все пак се конкурират помежду си);
- олигополен картел (с няколко фирми, които за да избегнат олигополната конкуренция правят тайно съглашение да действат като една фирма-монополист, но някои от тях е възможно да нарушават това съглашение).

Най-интересни са двете крайности – пазарите на съвършенна конкуренция и на монополизъм, другите пазарни модели са в някаква степен тяхна комбинация.

Отговорът на горните въпроси може да бъде даден само въз основа на предположението за рационалност в поведението на фирмата на пазара. Това означава две неща: първо, че тя прави разчети за своята дейност и второ, че тя, при всяко положение, се стреми да максимализира печалбата си. Ако означим печалбата с П, приходите от продажби с $R,$ а разходите от производство с $C,$ то очевидно

$$\Pi = R - C$$

Функцията на приходите (от количеството $q$) е хомогенна линейна функция на $q$ или $R = pq$. Естествено е, да разглеждаме разходите за производство като функция на произведеното количество: $C = C(q)$ – фукция на разходите (или разходна функция). При това тази функция е монотонно растяща: производството на допълнително количество от стоката изисква да бъдат направени допълнителни парични разходи. Тогава ще имаме

$$\Pi = \Pi(q) = pq - C(q) \quad \text{като} \quad C'(q) > 0$$

Това е най-простият и ясен модел на фирмата – модел с функция на разходите.

Нека сега да моделираме поведението на пазара на фирма, която се явява съвършен конкурент. Това означава, че в отрасъла (под отрасъл разбираме множеството от фирми, които произвеждат една и съща стока за едни и същи потребители) действат достатъчно много фирми, които се конкурират помежду си(липсва възможност да съгласуват пазарното си поведение). С други думи, фирмата-конкурент не разполага с пазарната власт да определя цената на стоката, която продава – тя я възприема за дадена. От друга страна, тази фирма, дори да знае каква е функцията на отраслово търсене $x = x(p)$, няма представа какъв ще бъде нейния пазарен дял от продажбата на стоката. При тези условия, за да максимализира печалбата си, фирмата трябва да произведе такова количество $q$, за което $\Pi'(q) = 0$ (нарича се условие от първи ред) и $\Pi''(q) < 0$ (условие от втори ред). Това води до

$$p = C'(q) \quad \text{като} \quad C''(q) > 0$$

В микроикономиката производната на разходната функция $C'(q)$ се нрича функция на маргиналните разходи. Тогава горното равенство се изказва така: конкурентната фирма предлага такова количество от стоката, за което маргиналните разходи по производството му се изравняват с цената на продажбата. На математически език горното неравенство означава, че разходната функция трябва да е изпъкнала (при това $q$). Тъй като фирмата би продавала стоката си и при по-високи цени от $p$, функцията $C(q)$ трябва да е изпъкнала и за количества по-големи от това $q$. На икономически език това означава, че от дадено количество нагоре разходите за производство нарастват по-бързо от нарастването на произвежданото количество, с други думи, налице е преразход (а не икономия) от мащаба. Сега нека да погледнем на цената $p$ като на променлива, тогава равенството $p = C'(q)$ се превръща във функция на $p$ от $q$. Тази функция притежава обратна функция (за $p \geq p_0 \geq 0$ и $q \geq q_0 \geq 0$), защото от $C''(q) = \left(C'(q)\right)' > 0$ следва, че $C'(q)$ е също монотонно растяща функция. Тази обратна функция означаваме с $y_1 = y_1(p){:}\, p = C'\left(y_1(p)\right)$. Тази функция $y_1(p)$ е функцията на предлагане на фирмата-конкурент.

Нека на отрасловия пазар да функционират $n$ на брой конкурентни фирми със съответните функции на предлагане $y_i = y_i(p), i = 1,2, \ldots, n$ (получени въз основа на разходните им функции). Тогава чрез агрегиране на тези фирмени функции на предлагане се получава отрасловата функция на предлагане

$$Y(p) = \sum_{i=1}^{n} y_i(p)$$

Да отбележим, че агрегирането (сумиране на икономически функции) е различно от математическата сума, доколкото при математическата сума някои от събираемите могат да приемат отрицателни стойности, а при икономическото сумиране всички събираеми трябва да са положителни (виж пример 1).

Тогава отрасловото равновесие се определя от изравняването на функциите на отраслово търсене $x = x(p)$ (функция, която считаме за зададена) и предлагане $Y(p)$. Това пазарно равновесие определя две величини: цената $p_C$, на която ще се продава стоката и количеството от нея - $q_C$. Ще имаме

$$x(p_C) = Y(p_C) = q_C$$

Сега, ако се върнен към конкретната фирма, то за нея функцията на търсене ще бъде $p = p_C = const$ и тя ще трябва да произведе количество $q_i = y_i(p_C)$. Очевидно

$$q_C = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

и за някои от фирмите може да се случи да не произведат нищо. Ако за тези фирми това е валидно за сравнително дълъг период от време, то те ще трябва да напуснат пазара. Това важи също и за фирмите, които при така зададените разходни функции, цена и количество, поучават отрицателни печалби (загуби). Така, че в дългосрочен план, изглежда има тенденция към окрупняване на всеки от отрасловите пазари. Това, разбира се, може да доведе до преобразуване на съвършенно конкурентните пазари в пазари с ограничена конкуренция (монополни, олигополни и пазари на монополистичната конкуренция).

**Пример 1.** В един отрасъл с функция на търсене $x = 32 - 5p$ функционират три групи фирми: 10 фирми , всяка от които има функция на разходите $C_1 = q_1 + 0{,}5{q_1}^2$; 10 фирми с функции на разходите $C_2 = 2q_2 + {q_2}^2$ и 15 фирми с функции на разходите $C_3 = 3q_3 + 1{,}5{q_3}^2$.

а) Да се намерят функциите на предлагане на фирмите и отрасловата функция на предлагане.

б) Да се намери цената на стоката и общото реализирано количество от нея при условие на съвършенна конкуренция в отрасъла.

в) Да се намерят произведените количества от всяка от фирмите, приходите, разходите и печалбите им.

**Решение.** Обратната функция на предлагане за всяка от фирмите от първата група ще бъде $p = {C_1}' = 1 + q_1$. Тогава функцията на фирмено предлагане е $q_1 = -1 + p$. Тъй като фирмите са общо 10 на брой с еднакви фирмени функции на предлагане, то общото предлагане за фирмите от първата група е $Y_1 = -10 + 10p$. Аналогично за всяка от фирмите от втората група получаваме обратна функция на фирмено предлагане $p = {C_2}' = 2 + 2q_2$, функция на фирмено предлагане $q_2 = -1 + 0{,}5p$ и фукция на общо предлагане за фирмите от групата $Y_2 = -10 + 5p$. За фирмите от третата група имаме $p = {C_3}' = 3 + 3q_3$, $q_3 = -1 + \frac{1}{3}p$ и $Y_3 = -15 + 5p$.

За да получим функцията на отраслово предлагане чрез агрегиране на функциите на групови предлагания $Y_1, Y_2$ и $Y_3$ трябва да отбележим, че $Y_1 \geq 0$ за $p \geq 1$; $Y_2 \geq 0$ за $p \geq 2$ и $Y_3 \geq 0$ за $p \geq 2$ (с други думи, фирмите от втората група предлагат стоката, ако цената ѝ е над 2 парични единици, за по-ниска цена – не предлагат).

Тогава за функцията на отраслово предлагане получаваме

$$Y(p) = \begin{cases} Y_1 = -10 + 10p \ \text{ при } p \in [1, 2) \\ Y_1 + Y_2 = -20 + 15p \ \text{ при } p \in [2, 3) \\ Y_1 + Y_2 + Y_3 = -35 + 20p \ \text{ при } p \in [3, +\infty) \end{cases}$$

За да получим равновесните цена и количество ще трябва да приравним полученото отраслово предлагане с отрасловото търсене. Ще разгледаме отделно трите интервала за $p$.

При $p \in [1, 2)$ имаме $x(p) = 32 - 5p = -10 + 10p = Y(p) \Rightarrow p = 2{,}8 \notin [1, 2)$.

При $p \in [2, 3)$ $x(p) = 32 - 5p = -20 + 15p \Rightarrow p = 2{,}6 \in [2, 3)$ и

при $p \in [3, +\infty)$ $x(p) = 32 - 5p = -35 + 20p \Rightarrow p = 2{,}68 \notin [3, +\infty)$.

Така получаваме окончателно, че равновесната цена е $p = 2{,}6$, а равновесното количество $q = x(2{,}6) = Y(2{,}6) = 19$.

В интервала $p = 2{,}6 \in [2, 3)$ за отрасловото предлагане имаме $Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p)$. Тъй като $Y_1(2{,}6) = 16$ и $Y_2(2{,}6) = 3$, всяка от фирмите от първата група ще произвежда количество $q_1 = 1{,}6$, всяка от фирмите от втората група - $q_2 = 0{,}3$, а фирмите от третата група няма да произвеждат нищо ($q_3 = 0$).

Всяка фирма от първата група има приходи $R_1 = pq_1 = 2{,}6.1{,}6 = 4{,}16$, разходи $C_1 = C_1(1{,}6) = 1{,}6 + 0{,}5(1{,}6)^2 = 2{,}88$ и печалба $\pi_1 = R_1 - C_1 = 4{,}16 - 2{,}88 =$

1,28. За всяка фирма от втората група: приходи $R_2 = pq_2 = 2{,}6.0{,}3 = 0{,}78$, разходи $C_2 = C_2(0{,}3) = 2.0{,}3 + (0{,}3)^2 = 0{,}69$ и печалба $\pi_2 = R_2 - C_2 = 0{,}78 - 0{,}69 = 0{,}09$. За фирмите от третата група (поради липса на предлагане при тази цена) $R_3 = C_3 = \pi_3 = 0$.

Как се реализира отрасловото равновесие в случай на монопол? Тогава цялото отраслово търсене $x = x(p)$ е насочено към фирмата-монополист, така че тя може да използва обратната функция на търсене $p = p(q)$ (за която имаме $x(p(q)) = q$) при пешаване на задачата за максимализиране на печалбата си. Ще имаме

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = p(q)q - C(q)$$

Тогава условието от първи ред ще бъде

$$R'(q) = C'(q) \quad \text{или} \quad p'(q)q + p(q) = C'(q)$$

Горното условие може да се изрази така: монополът трябва да произведе количество, изравняващо маргиналните приходи с маргиналните разходи. Ако означим това количество с $q_M$, то ще се получава като решение на уравнението $R'(q_M) = C'(q_M)$. Цената $p_M$, на която монополът ще продава стоката си се определя от обратната функция на търсене, т.е. $p_M = p(q_M)$. Лесно може да се докаже, че (при една и съща функция на разходите и една и съща функция на търсене) цената на монополизирания пазар е по-висока от цената на конкурентния, а количеството е по-малко, т.е.

$$p_M > p_C \quad \text{и} \quad q_M < q_C$$

Тъй като при монопола винаги е изпълнено неравенството

$$p_M > C'(q_M)$$

в този случай се въвежда така наречения индекс на Лернер

$$I_L = \frac{p_M - C'(q_M)}{p_M}$$

който измерва пазарната власт на фирмата. Очевидно, при съвършенна конкуренция имаме $I_L = 0$, а при монопол - $I_L \in (0, 1]$.

**Забележка 1.** Икономическият смисъл на неравенството $p_M > C'(q_M)$ се състои в това, че монополът винаги съумява да реализира стоката си в такова количество и на такава цена, че тази цена да надхвърля маргиналните разходи за производството на това количество.

**Забележка 2.** Условието от първи ред за максимализиране на печалбата на монопола $R'(q) = C'(q)$ е изпълнено и за конкурентната фирма, защото при нея $R(q) = pq \Longrightarrow R'(q) = p$. Разликата е, че при конкурента $p = const$ е пазарната цена, определена на отрасловия пазар от изравняването на отрасловото търсене и предлагане (където освен нашата фирма участват и много други), която цена фирмата възприема като даденост, а при монопола $p = p(q)$ е обратната функция на отраслово търсене, която монопола използва при максимализиране на печалбата си.

**Забележка 3.** В случая, когато разходната функция на монопола не включва променливи разходи ($C'(q) = 0$) на практика монополната фирма максимализира оборота си. Така излиза, че народната „мъдрост“, че печели този, който се стреми към максимален оборот се оказва вярна само в случай, че фирмата е монополист на пазара и разходите ѝ не зависят от продаденото количество. За всички други фирми такова пазарно поведение е (меко казано) неоптимално.

**Пример 2.** Нека отрасъла от пример 1 да е монополизиран (това може да стане чрез корпоративни сливания или изкупувания).

а) Да се намерят цената, количеството и индекса на Лернер при условие на монополизиране на отрасъла.

б) да се намери функцията на разходите при същото условие.

в) Да се намерят приходите, разходите и печалбата на монопола.

Решение. При монопола равновесието се постига, когато $R'(q) = C'(q)$. От друга страна $p = C'(q)$ е обратната функция на предлагане при условие на съвършенна конкуренция. В решението на пример 1 ние намерихме отрасловата функция на предлагане $q = Y(p)$, като количеството е функция на цената. Трябва да обърнем тази функция. Получаваме

$$p = \begin{cases} 1 + \dfrac{q}{10} & \text{при} \quad q \in [0, 10) \\ \dfrac{4}{3} + \dfrac{q}{15} & \text{при} \quad q \in [10, 25) \\ \dfrac{7}{4} + \dfrac{q}{20} & \text{при} \quad q \in [25, \infty) \end{cases}$$

или

$$C'(q) = \begin{cases} 1 + \dfrac{q}{10} & \text{при} \quad q \in [0, 10) \\ \dfrac{4}{3} + \dfrac{q}{15} & \text{при} \quad q \in [10, 25) \\ \dfrac{7}{4} + \dfrac{q}{20} & \text{при} \quad q \in [25, \infty) \end{cases}$$

Използвайки отрасловото търсене, намираме общия пазарен оборот като функция на количеството

$$R(q) = p(q)q = \left(\frac{32}{5} - \frac{1}{5}q\right)q = \frac{32}{5}q - \frac{1}{5}q^2$$

($p(q) = \frac{32}{5} - \frac{1}{5}q$ е обратната функция на търсене). Тогава ще имаме

$$R'(q) = \frac{32}{5} - \frac{2}{5}q,$$

което е валидно за всяко $q$. Така, че условрието от първи ред $C'(q) = R'(q)$ ни дава:

1) за $q \in [0, 10)$ $\frac{32}{5} - \frac{2}{5}q = 1 + \frac{q}{10}$ с решение $q = 10{,}8 \notin [0, 10)$;

2) за $q \in [10, 25)$ $\frac{32}{5} - \frac{2}{5}q = \frac{4}{3} + \frac{q}{15}$ с решение $q = \frac{76}{7} \in [10, 25)$ и

3) за $q \in [25, \infty)$ $\frac{32}{5} - \frac{2}{5}q = \frac{7}{4} + \frac{q}{20}$ с решение $q = \frac{31}{3} \notin [25, \infty)$

Така, че количеството в условие на монополизация на отрасъла ще бъде $q = \frac{76}{7}$. Монополната цена ще намерим като заместим $q = \frac{76}{7}$ в обратната функция на търсене, получаваме $p = p\left(\frac{76}{7}\right) = \frac{148}{35}$. Сега да пресметнем индекса на Лернер

$$I_L = \frac{\frac{148}{35} - C'\left(\frac{76}{7}\right)}{\frac{148}{35}} = \frac{\frac{148}{35} - \frac{216}{105}}{\frac{148}{35}} = \frac{19}{37}$$

Функцията на разходите на монопола $C(q)$ ще намерим след интегриране на $C'(q)$

$$C(q) = \begin{cases} q + \frac{q^2}{20} + C_0^1 & \text{при} \quad q \in [0,10) \\ \frac{4q}{3} + \frac{q^2}{30} + C_0^2 & \text{при} \quad q \in [10,25) \\ \frac{7q}{4} + \frac{q^2}{40} + C_0^3 & \text{при} \quad q \in [25,\infty) \end{cases}$$

Очевидно, $C_0^1 = C_0^2 = C_0^3 = 0$ тъй като отделните предприятия нямат постоянни разходи. Тогава ще имаме

$$C(q) = \begin{cases} q + \frac{q^2}{20} & \text{при} \quad q \in [0,10) \\ \frac{4q}{3} + \frac{q^2}{30} & \text{при} \quad q \in [10,25) \\ \frac{7q}{4} + \frac{q^2}{40} & \text{при} \quad q \in [25,\infty) \end{cases}$$

Вече можем да пресметнем приходите $R$, разходите $C$ и печалбата $\Pi$ на монопола. Имаме $R = pq = \frac{148}{35}\frac{76}{7} \approx 45{,}91$, $C = C\left(\frac{76}{7}\right) = \frac{4}{3}\frac{76}{7} + \frac{76^2}{7^2 30} \approx 14{,}48 + 3{,}93 = 18{,}41$ и $\Pi = R - C \approx 45{,}91 - 18{,}41 = 27{,}5$. За отбелязване е, че печалбата на монопола е много по-голяма от сумата от печалбите на всички фирми при условие на съвършенна конкуренция. И наистина, в този случай печалбата е $10\pi_1 + 10\pi_2 + 15\pi_3 = 10.1{,}28 + 10.0{,}09 + 15.0 = 12{,}8 + 0{,}9 + 0 = 13{,}7$.

## Задачи 3.

1. **Конкретен модел за монополизиране на отрасъл.** В конкурентен отрасъл функционират 10 фирми с еднакви функции на разходите $C_i = 4 + 2q_i + 0{,}5q_i^2$. Отрасловото търсене на произведената от тях стока се задава с функцията $q = 52 - 2p$. Собственикът на една от фирмите предлага на конкурентите си да му прехвърлят своите фирми, като той обещава да им изплаща регулярен доход, равняващ се на удвоената им печалба.

а) Да се намерят равновесните цена, количества и печалби при условие на отраслова конкуренция.

б) Да се намерят същите показатели и индекса на Лернер при условие на монополизиране на отрасъла.

2. **Ефекти от демонополизиране на отрасъл.** Монопол има функция на маргинални разходи $MC(q) = -10 + 3q$ и функция на маргинални приходи $MR(q) = 40 - 2q$.

а) Да се определят равновесните количество, цена на стоката и печалба на фирмата, както и индекса на Лернер.

б) Да се определят равновесните количество, цена и печалба при демонополизиране на отрасъла и запазване на функциите на маргинални разходи и маргинални приходи.

## 1. Модел на смесена дуополия на комерсиален и некомерсиален производител на софтуер

Ще разгледаме модел на смесена дуополия, в който двамата дуополисти са производители на комерсиален и некомерсиален софтуер съответно. По-нататък платения софтуер ще се нарича *Microsoft Windows*, а безплатния аналог - *Linux*. Даните имена са условни – всички резултати са валидни и при други конкуриращи се двойки, произвеждащи платен и безплатен софтуер. *Microsoft,* установява цена на лицензите на продукта си при условие за максимализиране на печалбата си, а *Linux* се разпространява безплатно.

Ще предполагаме, че потребителите са настроени за придобиване на комерсиалния продукт (*Windows*) и само високата му цена може да ги застави да се ориентират към некомерсиалния (*Linux*).

Променливите разходи ще считаме за нулеви (и наистина, разходите за изготвяне на копие във вид на компакт-диск или разпространението по интернет са пренебрежимо малки в сравнение на разходите за проектиране и разработка).

Освен това, ще допуснем, че всеки потребител придобива един и само един продукт: или *Windows* или *Linux* (т.е. едновременното ползване на две операционни системи не се практикува – на пазара на сървърни операционни системи това предположение напълно съответства на действитвлността).

В този модел ще пренебрегнем разпространението на пиратски копия на *Windows*.

Нека

$c$ е цената на лиценза за правото на използване на сървърната операционна система *Windows*;

$q$ е общия обем на пазара;

$x_W(c)$ е броя на потребители на софтуер *Windows* при негова цена от $c$ парични единици;

$x_L(c)$ е броя на потребителите на софтуер *Linux* при цена на *Windows* от $c$ парични единици;

$d$ – постоянните разходи на $Microsoft$ за продукта $Windows$, които $Microsoft$ би трябвало да покрие при реализацията на продукта си.

Ще считаме, че функцията на търсене на $Windows$ е линейна:

$$x_W(c) = q - bc$$

при някакво $b > 0$. Тогава (тъй като всички потребители, които не са закупили $Windows$ придобиват безплатно $Linux$):

$$x_L(c) = q - x_W(c) = bc$$

Задачата, която стои пред корпорацията $Microsoft$ е да определи така цената $c$, че печлбата ѝ да е максимална

$$\Pi_W = cx_W(c) - d = c(q - bc) - d \to max$$

Тъй като

$$\Pi_W(c) = qc - bc^2 - d$$

условието от I-ви дед ще бъде

$$\Pi_W{}'(c) = q - 2bc = 0 \Leftrightarrow c_0 = \frac{q}{2b}$$

Тогава ще имаме

$$x_W(c_0) = q - b\frac{q}{2b} = \frac{q}{2} = x_L(c_0)$$

За максималната печалба на $Microsoft$ получаваме

$$\Pi_W(c_0) = c_0 x_W(c_0) - d = \frac{q}{2b}\frac{q}{2} - d = \frac{q^2}{4b} — d$$

Така доказахме следното твърдение

**Твърдение**. Оптималната цена на лиценза на платения софтуер $c_0 = \frac{q}{2b}$ максимализира печалбата на комерсиалния производител в размер на $\Pi_W(c_0) = \frac{q^2}{4b} — d$, като при това комерсиалният и некомерсиален производител делят пазара по равно: $x_W(c_0) = \frac{q}{2} = x_L(c_0)$.

За отбелязване е, че всичко се свежда до обема на пазара и фумкцията на потребителското търсене. Така например, ако е изпълнено неравенството $q < 2\sqrt{bd}$ дори и максималната печалба би била всъщност минимална загуба.

## Приложение 5. Биматрични игри

В икономиката и управлението често се срещат ситуации, прикоито се сблъскват две и повече страни, преследващи различни цели, като резултата за всяка от страните при реализацията на определена стратегия зависят от действието на другата страна. Примери за такива ситуации са много: олигополния пазар на една потребителска стока, световния пазар на петрол, световния пазар на софтуерни продукти и др.

Такава ситуация, при която изходът зависи ор двама и повече участници ще наричане игра; участниците в нея (т.е. лицата, вземащи решения) – играчи, а осъзнатата възможност за избор на един от няколкото варианти на действие – стратегия.

За простота ще разглеждаме игри с двама играчи, като всеки от тях избира измежду две стратегии. Ако първият играч е избрал своята $i$-та стратегия, а втория – своята $j$-та, то считаме, че първия получава плащане в размер на $a_{ij}$ парични единици, а втория – в размер на $b_{ij}$ парични единици. Ако $a_{ij} + b_{ij} = 0$

Ще казваме, че играчите имат антагонистични интереси, а играта ще наричаме антагонистична. В противен случай играта се нарича неантагонистична. Ясно е, че една неантагонистична игра се характеризира еднозначно от биматрицата на плащанията

$$P = \begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) \end{pmatrix},$$

наричана още и платежна матрица.

В зависимост от това, дали играта се провежда еднократно или може да се провежда многократно различаваме биматрични игри с чисти и смесени стратегии. В зависимост от това, дали е забранено или разрешено сътудничеството между играчите различаваме некооперативни и кооперативни игри.

Ключова за биматричните игри е така наречената максиминна стратегия на играчите, която води до оптимален избор на стратегия (независим от избора на съперника) и установяване на равновесие на Наш. С други думи всеки играч избира по-малката от двете злини: за всяка от своите стратегии той намира минималното си плащане при всички варианти на другия играч; след това той избира тази стратегия, която има максимално минимално плащане. Това за него е доминиращата стратегия. Ако и другия играч избере доминиращата си стратеги се достига до равновесието на Наш. Установяването на това

равновесие се основава на презумпцията за рационалност на играчите, без което игровото моделиране губи своя смисъл.
Ще илюстрираме тези разсъждения първо за некооперативните игри с чисти стратегии.
**Пример 1.** (*Дилемата на затворниците*). Двама престъпници, подозирани в съвместно извършване на тежко престъпление, се намират, изолирани един от друг в две различни килии. Следствието не разполага с преки улики, затова успехът на обвинението зависи от самопризнанията на престъпниците. Всеки от тях има две стратегии: да признае (първа стратегия) или да не признае (втова стратегия). Ако двамата престъпници признаят, те ще бъдат признати за виновни и осъдени на по осем години затвор. Ако нито един от тях не признае, те ще бъдат оправдани за основното престъпление, но съдът ще ги осъди за по леко престъпление (например притежаване на незаконно оръжие) на по една година затвор. Ако признае единият от тях, а другият – не, то признaлият ще бъде освободен (заради помощта на следствието), а другия ще получи максимална присъда от десет години. Трябва да се определят максиминните чисти стратегии и равновесието на Наш.
**Решение.** Съставяме платежната биматрица на тази игра

$$P = \begin{pmatrix} (-8,-8) & (0,-10) \\ (-10,0) & (-1,-1) \end{pmatrix}$$

Как разсъждава първият играч (затворник). Да отбележим, че неговите стратегии са по редовате на платежната биматрица, а стратегиите на втория – по стълбовете. Ако той избере първата стратегия (да признае) за него най-лошия вариант (минимално плащане) е $-8$ (ако и другия избере първата си стратегия). Ако избере втората, най лошия вариант е $-10$. Тогава той избира $-8 = max(-8,-10)$ и съответно първата стратегия, която за него е доминираща стратегия. Втория играч разсъждава по същия начин – и за него първата стратегия се пказва доминираща. Пресичането на двете доминиращи статегии ни дава равновесието на Наш - $(-8,-8)$. И двамата признават и получават по осем години затвор. Ако трябва да формализираме, то първият избира

$$\alpha = \max_i \min_j \{a_{ij}\},$$

а втория

$$\beta = \max_j \min_i \{b_{ij}\},$$

като с $i$ са номерирани стратегиите на първия играч, а с $j$ – на втория.
**Забележка:** Дилемата на затворниците е пример за симетрична игра – платежната биматрица е симетрична, но горните разсъждения са валидни и при несиметричните игри с чисти стратегии.
Смесените стратегии на играчите са свързани с възможността за повторяемост

на играта. Да разгледаме тогава възможностите на първия играч: нека той да избира първата си стратегия с честота $p$, тогава втората стратегия ще е избрана с честота $1-p$, тогава говорим за смесен стратегически вектор на първия играч $\boldsymbol{p}=(p,1-p)$. Аналогично, за втория играч – при избор на неговата първа стратегия с честота $q$, втората стратегия ще е с честота $1-q$ и смесения му стратегически вектор - $\boldsymbol{q}=(q,1-q)$.

Тогава

$$M_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=a_{11}pq+a_{12}p(1-q)+a_{21}(1-p)q+a_{22}(1-p)(1-q)$$

ще бъде средното плащане за първия играч, а

$$M_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=b_{11}pq+b_{12}p(1-q)+b_{21}(1-p)q+b_{22}(1-p)(1-q)$$

средното плащане за втория.

Равновесието на Наш в този случай се определя така: за комбинацията от смесени стратегии $(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*)$ е налице равновесие на Наш, ако за никой от играчите не е изгодно да се отклони от тях, при положение, че другият играч следва своята равновесна стратегия, т.е.

$$M_1(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*)\geq M_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}^*) \quad \text{и} \quad M_2(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q}^*)\geq M_2(\boldsymbol{p}^*,\boldsymbol{q})$$

Теоремата на Наш гласи, че за всяка биматрична игра със смесени стратегии съществува поне едно равновесие на Наш.

Максиминните смесени стратегии на двамата играчи им обезпечават гарантираните плащания $\alpha$ и $\beta$ съответно, където

$$\alpha=\max_p\min_q M_1(p,q) \quad \text{и} \quad \beta=\max_q\min_p M_2(p,q)$$

независимо от поведението на противника.

**Забележка.** Чистите стратегии са частен случай на смесените стратегии, получаващи се от тях, когато $\boldsymbol{p}^*$ (или $\boldsymbol{q}^*$) е от вида (1,0) или (0,1).

**Пример 2**. Да се определят смесените стратегии, осигуряващи равнивесие на Наш за играта от пример 1.

**Решение.** За средните плащания на двамата играчи ще имаме

$$\begin{aligned}M_1(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})&=-8pq-10(1-p)q-(1-p)(1-q)=pq+p-9q-1\\&=(p-9)q+p-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})&=-8pq-10p(1-q)-(1-p)(1-q)=pq+q-9p-1\\&=(q-9)p+q-1\end{aligned}$$

Най-доброто гарантирано плащане на пъвия играч ще бъде

$$\begin{aligned}\alpha&=\max_{p\in[0,1]}\min_{q\in[0,1]}M_1(p,q)=\max_{p\in[0,1]}\min_{q\in[0,1]}\big((p-9)q+p-1\big)\\&=\max_{p\in[0,1]}\big((p-9).1+p-1\big)=\max_{p\in[0,1]}(2p-10)=-8\end{aligned}$$

(тук сме отчели, че $(p-9)<0$ и следователно $\min_{q\in[0,1]}\big((p-9)q+p-1\big)$ независимо от $p$ се достига при $q=1$). Максиминната стратегия на първия играч се достига за $p=1$, т.е. $\boldsymbol{p}=(1,0)$. Аналогично намираме

$$\beta = \max_{q\in[0,1]} \min_{p\in[0,1]} M_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \max_{p\in[0,1]} \min_{q\in[0,1]} \big((q-9)p + q - 1\big)$$
$$= \max_{p\in[0,1]} \big((q-9).1 + q - 1\big) = \max_{p\in[0,1]} (2q-10) = -8$$

и максиминна стратегия $\boldsymbol{q} = (1{,}0)$. Очевидо е, че тези максиминни стратегии образуват равновесие на Наш и друго равновесие на Наш не съществува.

За отбелязване е, че дори и затворниците да бъдат многократно поставени в същата ситуация, то те би трябвало всеки път да признават вината си, за да извлекат максималната полза (в случая – минималната вреда) за себе си.

**Забележка.** При дилемата на затворниците се получи съвпадение между решенията за чисти и смесени стратегии. Това съвпадение е случайно – при повече игри ситуацията, допускаща смесени стратегии води до решение, различно от това за чистите стратегии.

Ако трябва да обобщим, то дилемата на затворниците се заключава в това, че при невъзможността двамата да обсъдят ситуацията, оптималните решения, които вземат поотделно – да признаят ги води до присъди от по осем години, т.е. до положение, много по-лошо от оптималното за тях – да не признаят и да получат присъди от по една година.

Изходът от тази ситуация се намира в кооперативните игри: в тях играчите могат да водят преговори помежду си. В реалната икономика такива възможности възникват често: водят се преговори, създават се коалиции, сключват се съглашения и т.н.

Да се върнем към биматричната игра, зададена с платежната биматрица

$$P = \begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) \end{pmatrix}$$

Тогава при всевъзможните смесени стратегии за двамата играчи, получаващи се при съвместната и независима промяна на $p$ и $q$ в интервала $[0{,}1]$ множеството от точки с координати $\big(M_1(p,q), M_2(p,q)\big)$ образуват изпъкнала обвивка (в равнината) на точките с координати $(a_{11}, b_{11})$, $(a_{12}, b_{12})$, $(a_{21}, b_{21})$, $(a_{22}, b_{22})$, съответстващи на чистите стратегии. Това е множеството на възможните двойки плащания.

Казваме, че точката $(M_1{}', M_2{}')$ доминира над точката с координати $(M_1{}'', M_2{}'')$ ако

$$(M_1{}' > M_1{}'' \text{ и } M_2{}' \geq M_2{}'') \text{ или } (M_1{}' \geq M_1{}'' \text{ и } M_2{}' > M_2{}'')$$

т.е. при прехода от доминираната точка към доминиращата плащанията на двамата играчи не намалят, а за поне един от тях нарастват. Множеството от точки, които не са доминирани от други се нарича оптимално по Парето. Ясно е, че ако се движим по множеството, оптимално по Парето, нарастването на плащането на единия играч може да става за сметка само на намаляването на плащането за другия. Геометрично – подмножеството, оптимално по Парето е североизточната граница на даденото множество. Оптималността по Парето е

така общо определена, че всяко затворено множество притежава подмножество, оптимално по Парето.
Ако на играчите е забранено да преговарят помежду си, те имат гарантирани плащания $\alpha$ и $\beta$ съответно. Сега обаче, чрез коопериране, те ще търсят евентуални подобрения за себе си, т.е. те се интересуват от стратегии, при които $M_1 \geq \alpha$ и $M_2 \geq \beta$. Множеството, оптимално по Парето и удовлетворяващо тези неравенства ще бъде тяхното преговорно множесетво. Ако играчите не могат да се договорят за избора на точка върху преговорното множество, на тях може да се предложи една арбитражна схема. Арбитражната схема на Наш предлага на играчите да се споразумеят и да изберат върху преговорното множество решението на Наш – такава двойка от смесени стратегии, която да максимализира функцията на Наш, която е равна на произведението от разликите на плащанията и гарантираните (максиминни) плащания. Решението на Наш се получава от

$$N = (M_1 - \alpha)(M_2 - \beta) \to \max \text{ при } (M_1, M_2) \in \Gamma,$$

където с $\Gamma$ сме означили преговорното множество.

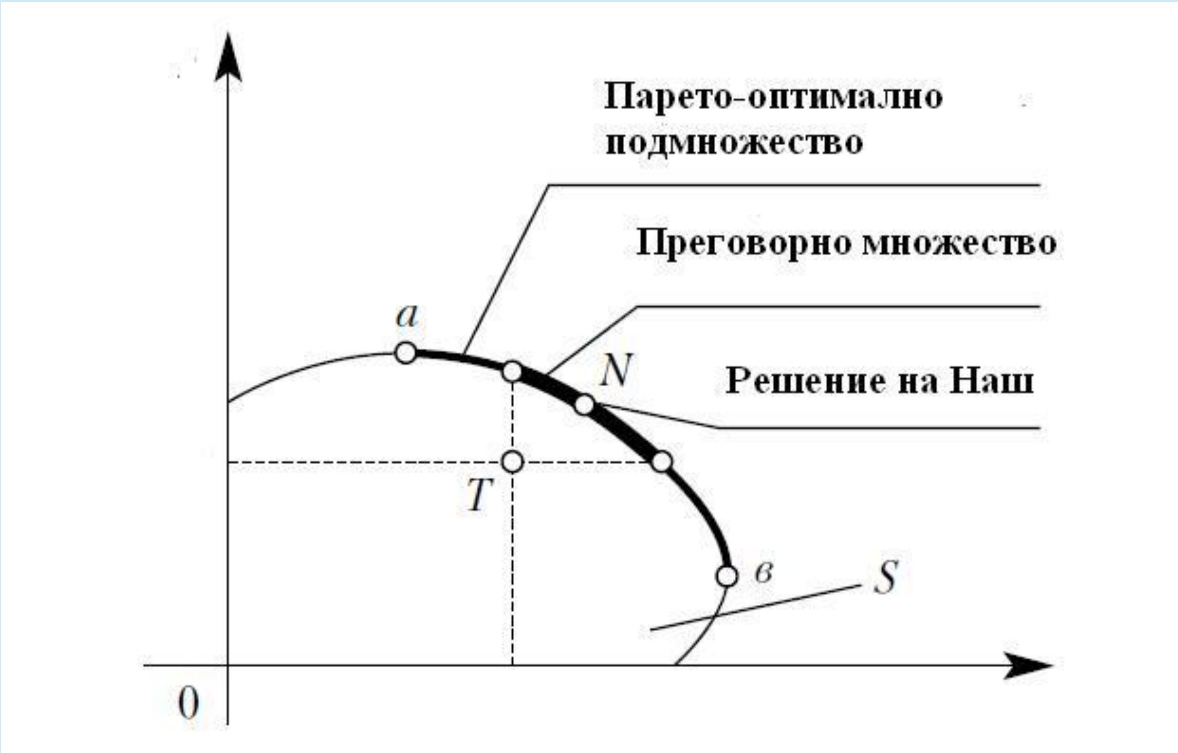


**Рис. 1. Парето-оптимално подмножество, преговорно множество, решение на Наш**

На рис. 8 са изобразени Парето-оптималното подмножество, преговорното множество и решението на Наш. Предполага се, че в точка $T(\alpha, \beta)$ е равновесието на Наш за некооперативния вариант на играта.
**Пример 3.** Да се дамери решението на Наш за играта, зададена в пример 1. В кооперативен вариант (т.е. ако на затворниците е разрешено да се консултират един с друг).

Решение. Върху равнината с координатна система – абсциса $M_1$ (плащането на първия играч) и $M_2$ (плащането на втория) нанасяме точките, съответстващи на чистите стратегии: $A(a_{11}=-8, b_{11}=-8), B(a_{12}=-10, b_{12}=0), C(a_{22}=-1, b_{22}=-1), D(a_{21}=0, b_{21}=-10)$. Изпъкналата обвивка на точките, съответстващи на чистите стратегии се състои от всички точки, запълващи четириъгълника $ABCD$ заедно със страните му. Тези точки съответстват на всевъзможните смесени стратегии. Начупената линия $BCD$ – това е Парето-оптималното подмножество. Ако пресечем тази начупена линия с правите $M_1=\alpha=-8$ и $M_2=\beta=-8$ (съответстващи на гарантираните плащания при некооперативния вариант на играта) получаваме преговорното множество – начупената линия $ECF$ (рис. 9). Тъй като задачата е симетрична, можем да разгледаме само половината от преговорното множество, състоящо се от точките, запълващи затворената отсечка $EC$. Тогава задачата се свежда до

$$N=(M_1+8)(M_2+8)\to \max \text{ при } (M_1,M_2)\in[EC]$$

Уравнението на правата, минаваща през точките $B(-10,0)$ и $C(-1,-1)$ е $M_1+9M_2+10=0$, следователно затворената отсечка $EC$ се задава чрез

$$M_2=-\frac{M_1+10}{9} \quad \text{като} \quad M_1\in[-8,-1]$$

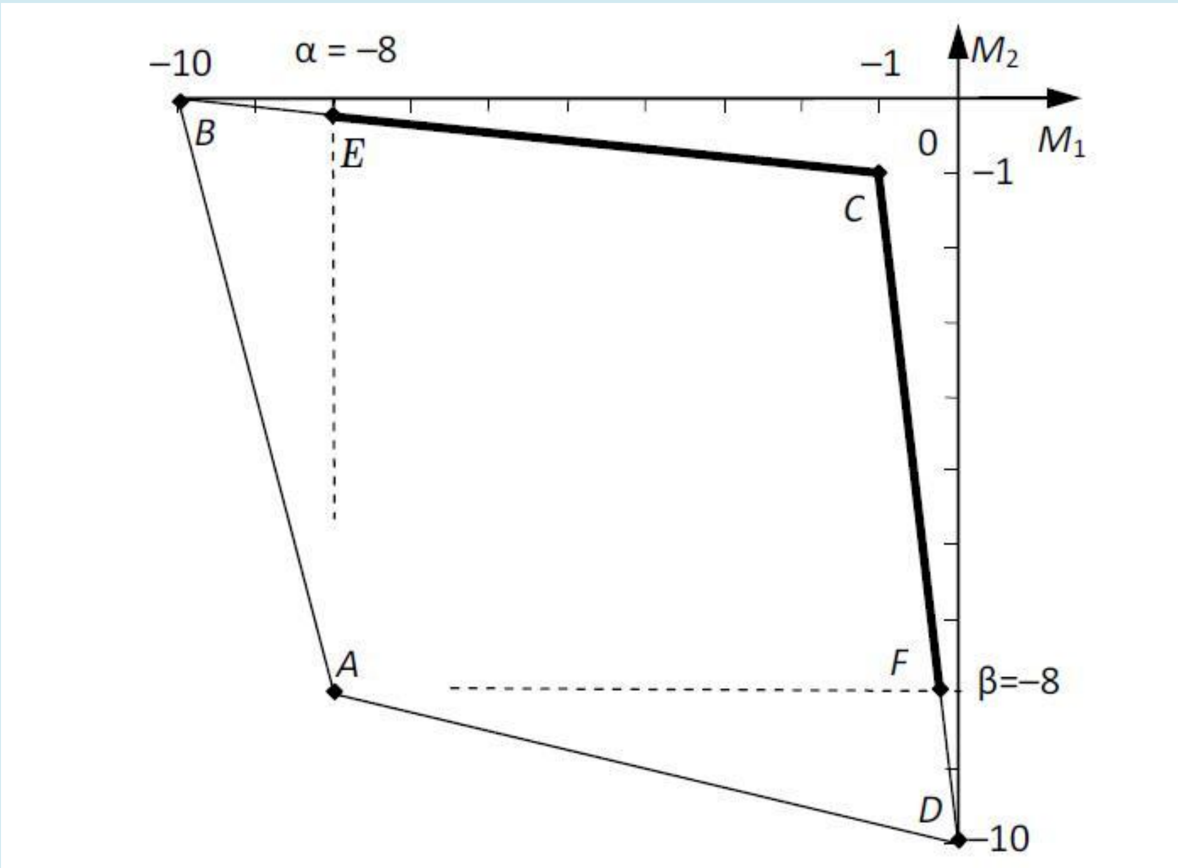


**Рис. 2. Множеството на очакваните плащания, Парето-оптималното подмножество и преговорното множество в кооперативната версия на "Дилемата на затворниците"**

Тогава за функцията на Наш върху затворената отсечка ще имаме

$$N = (M_1 + 8)\left(-\frac{M_1 + 10}{9} + 8\right) \to \max \text{ при } \ M_1 \in [-8, -1]$$

Тогава

$$N(M_1) = (M_1 + 8)\left(\frac{62}{9} - \frac{M_1}{9}\right) = -\frac{{M_1}^2}{9} + \frac{54}{9}M_1 + \frac{496}{9}$$

и

$$N'(M_1) = -\frac{2}{9}M_1 + \frac{54}{9} > 0 \quad \text{при} \quad M_1 \in [-8, -1]$$

Тъй като функцията $N(M_1)$ е растяща функция на аргумента си $M_1$, тя ще има най-голямата си стойност в десния край на интервала, т.е. при $M_1 = -1$. Тогава и $M_2 = -1$. Следователно, ако затворниците имат възможност за преговори помежду си, те ще изберат да не признават и така ще се отърват с минимални присъди от по една година.

**Пример 4.** Да се направи анализ на биматричната игра, зададена с платежната биматрица

$$P = \begin{pmatrix} (6{,}9) & (9{,}7) \\ (8{,}4) & (2{,}10) \end{pmatrix}$$

Решение. Първо ще разгледаме некооперативния вариант с чисти стратегии. Първият играч разсъждава така: ако избера първа стратегия, най-лошия за мен вариант е да имам плащане 6 (ако другия избере неговата първа стратегия), ако избера втората си стратегия – получавам минимум 2 (при избор на втора стратегия от страна на противника), затова избирам първата (6= $max\{6{,}2\}$), или

$$6 = max\{min(6{,}9); min(8{,}2)\}$$

Аналогично за втория играч:

$$7 = max\{min(9{,}4); min(7{,}10)\}$$

Така за първия играч първата му стратегия е доминираща, а втория – втората. В такъв случай равновесието на Наш се постига за $M_1 = 9$ и $M_2 = 7$.

Сега ще разгледаме некооперативния вариант на играта, допускащ смесени стратегии. Нека $\boldsymbol{p} = (p, 1-p)$ и $\boldsymbol{q} = (q, 1-q)$ са смесените стратегии на играчите. Тогава за очакваните плащания получаваме

$$M_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = 6pq + 9p(1-q) + 8(1-p)q + 2(1-p)(1-q)$$
$$= -9pq + 7p + 6q + 2$$
$$M_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = 9pq + 7p(1-q) + 4(1-p)q + 10(1-p)(1-q)$$
$$= 8pq - 3p - 6q + 10$$

Максиминните стратегии се определят от условията

$$\alpha = \max_{p\in[0,1]} \min_{q\in[0,1]} M_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \max_{p\in[0,1]} \min\{(7p+2); (-2p+8)\} = \frac{20}{3},$$

което се достога при $p = \frac{2}{3}$ , т.е за $\boldsymbol{p} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$$\beta = \max_{q\in[0,1]} \min_{p\in[0,1]} M_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \max_{q\in[0,1]} min\{(-6q + 10); (2q + 7)\} = \frac{31}{4},$$

достигащо се при $q = \frac{3}{8}$ или за $\boldsymbol{q} = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)$.

(Как сме пресметнали, например $\alpha$? Изразът $M_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = -9pq + 7p + 6q + 2$ е линейна функция на $q$ за всяко $p$. Тогава този израз дистига минималната си стойност (в зависимост от $q$) в краищата на интервала – при $q = 0$ или при $q = 1$. За $q = 0$ получаваме $M_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = 7p + 2$, а за $q = 1$ - $M_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = -2p + 8$. Тези изрази се изравняват при $p = \frac{2}{3}$ : в интервала $p \in \left[0, \frac{2}{3}\right)$ имаме $7p + 2 < -2p + 8$ ; в интервала $p \in \left(\frac{2}{3}, 1\right]$ - $7p + 2 > -2p + 8$. Следователно въпросния максимин се получава за $p = \frac{2}{3}$ и той е $\frac{20}{3}$ )

Преди отбелязахме, че смисъла на смесените стратегии е при възможна повторяемост на ситуацията. И наистина, нека ситуацията се повтаря 24(=нок(3,8)) пъти. Тогава първият играч ще избере првата си стратегия 16($= p24 = \frac{2}{3}24$) пъти, а втората – 8 пъти. В резултат от това той ще има средно плащане $\frac{20}{3}$ . Това е по-малко от плащането 9, което се получава акотой винаги избира първа (доминиращата за него) стратегия, а втория избира (доминиращата за него) втора стратегия. Но първия няма гаранции, че ако той избере първата си стратегия, втория няма да избере недоминиращата оърва стратегия – тогава пъвия ще има по-малкото плащане – 6. Аналогично, вторият играч трябва 9($= q24 = \frac{3}{8}24$) пъти да избере първата си стратегия и 15 пъти – втората, тогава неговото средно плащане ще е $\frac{31}{4}$.

Накрая ще разгледаме кооперативния вариант на играта. Нека точките, съответстващи на чистите стратегии да са $A(2{,}10), B(6{,}9), C(9{,}7), D(8{,}4)$ (рис. 10). Тогава множеството от възможноте плащания ще бъде затворения четириъгълник $ABCD$. Парето-оптималното подмножество ще се състои от точките на затворената отсечка $BC$. Преговорното множество е затворената отсечка $EF$ ($E$ – пресечна точка на $BC$ с $M_1 = \alpha = \frac{20}{3}$ ; $F$ – пресечна точка на $BC$ с $M_2 = \beta = \frac{31}{4}$ ). Правата $BC$ има уравнение $2M_1 + 3M_2 - 39 = 0$ или $M_2 = 13 - \frac{2}{3}M_1$. Сега трябва да определим границите на параметъра $M_1$ върху преговорното множество $EF$. Тъй като точката $E$ се получава за $M_1 = \frac{20}{3}$ , а $F$ – за $M_2 = \frac{31}{4}$ , то от $\frac{31}{4} = 13 - \frac{2}{3}M_1$ получаваме $M_1 = \frac{63}{8}$ . Окончателно

$$EF: M_2 = 13 - \frac{2}{3}M_1 \quad \text{като} \quad M_1 \in \left[\frac{20}{3}, \frac{63}{8}\right]$$

Образуваме функцията на Наш

$$N(M_1) = \left(M_1 - \frac{20}{3}\right)\left(M_2 - \frac{31}{4}\right) = \left(M_1 - \frac{20}{3}\right)\left(13 - \frac{2}{3}M_1 - \frac{31}{4}\right)$$

$$= -\frac{2}{3}{M_1}^2 + \frac{349}{36}M_1 - 35 \quad \text{при} \quad M_1 \in \left[\frac{20}{3}, \frac{63}{8}\right]$$

Тъй като

$$N'(M_1) = -\frac{4}{3}M_1 + \frac{349}{36} = 0 \Leftrightarrow M_1 = \frac{349}{48} \in \left[\frac{20}{3}, \frac{63}{8}\right]$$

$$N_{max} = N\left(\frac{349}{48}\right)$$

е решението на Наш. За $M_1 = \frac{349}{48}$ получаваме $M_2 = 13 - \frac{2}{3}\frac{349}{48} = \frac{587}{72}$. Точката $G$

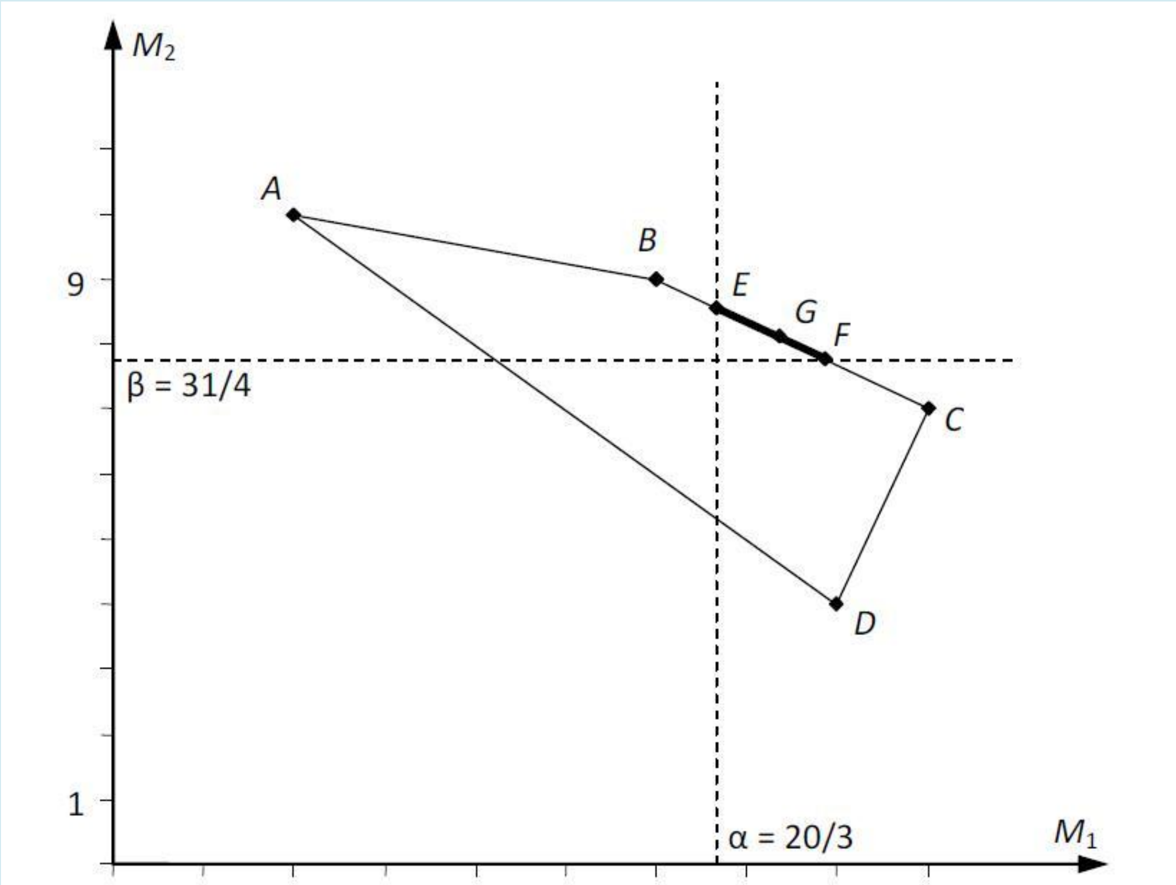


**Рис. 3. Множеството на очакваните плащания, Парето-оптималното множество, преговорното множество и решението на Наш за пример 4.**

с координати $M_1 = \frac{349}{48}$ и $M_2 = \frac{587}{72}$ е вътрешна точка за отсечката $BC$, то за някакво $\lambda \in (0,1)$ ще бъде изпълнено равенството

$$G = \lambda B + (1 - \lambda)C$$

или покоординатно

$$\left(\frac{349}{48}, \frac{587}{72}\right) = \lambda(6,9) + (1 - \lambda)(9,7) \Longrightarrow \lambda = \frac{83}{144}$$

Точката $B$ съответства на съчетанието на първа стратегия за първи играч с първа стратегия за втори, а $C$ – първа стратегия за първи с втора за втори. Тогава можем да запишем $B(p=1,q=1)$, $C(p=1,q=0)$ и

$$G(p^*,q^*)=\frac{83}{144}(1,1)+\frac{61}{144}(1,0)=\left(1,\frac{83}{144}\right)$$

С други думи, решението на Наш се получава, ако първият играч избира винаги своята първа стратегия, а вторият избира първата си стратегия с честота $q^*=\frac{83}{144}$, а втората – с честота $1-q^*=\frac{61}{144}$.

Под партия на играта ще разбираме едновременния избор от страна на играчите на техните стратегии. В много от случаите, обаче, играчите правят своите ходове последователно – такива игри се наричат позиционни. Позиционната игра представлява последователен преход от една позиция към друга, който се осъществява от играчите или чрез избор на възможни алтернативи според правилата на играта или случайно. Множеството от позициите в такава игра може да се представи като наредено множество, което се нарича дърво на играта и представлява граф без цикли, в който някои от върховете се наричат окончателни и съответстват на момента на приключването на партията и разплащането. В тези окончателни върхове трябва да са известни плащанията за всеки от играчите. Всеки от неокончателните върхове на дървото на играта съответства или на избор на някой от играчите или на случаен ход. Сред неокончателните върхове е началния връх, съответстващ на началото на партия от играта.

Различават се позиционни игри с пълна и непълна информация. При игрите с пълна информация всеки от играчите при извършване на свой ход знае в коя позиция от дървото на играта се намира. При игрите с непълна информация играчите, правещи ход не знаят позицията, в която се намират, но са запознати с информационното множество на играта – множество от позициите на играча в играта, включващо не само позицията, в която той се намира, но и другите възможни за него позициите.

Като пример за позиционна игра с пълна информация може да бъде посочен шахмата, а за позиционни игри с непълна информация – повечето игри на карти, доминото и др.

**Задачи 4.**

1. Две фирми продават конкуриращи се стоки. Всяка от тях трябва да реши дали да прави рекламна кампания. Ако и двете фирми проведат рекламни кампании, първата фирма ще получи чиста печалба от 1 млн. лв, а втората – 600 х. лв. Ако само първата фирма направи рекламна кампания, тя ще получи 1,5 млн. лв чиста печалба, а другата няма да спечели нищо. Ако втората фирма проведе рекламна кампания, а първата – не проведе, то чистата печалба на втората фирма ще бъде 800 х. лв, а първата – 500 х. лв. Ако и двете фирми се откажат от рекламни кампании, печалбата на первата фирма ще е 1 млн. лв, а

на втората – 200 х. лв. Какви са оптималните стратегии на фирмите?
2. Два производителя предлагат на пазара една и съща стока. Всеки от тях може да определи цена 4 лв или 6 лв. Ако всеки от тях продава стоката по 4 лв, всеки от тях ще има чиста печалба от 120 х. лв. Ако и двамата продават стоката за 6 лв, всеки от тях ще има чиста печалба от 160 х. лв. Ако единия продава стоката на цена от 4 лв, а другия – на цена от 6 лв, този който продава по-евтино ще спечели 200 х. лв, а конкурента му – 40 х. лв. Как трябва да избират стратегиите си двамата производители в зависимост от това, дали могат или не могат да се договарят.
3. Да се направи анализ на биматричната игра, зададена с платежната биматрица

$$P = \begin{pmatrix} (2,8) & (6,5) \\ (4,2) & (3,4) \end{pmatrix}$$

## 2. Теоретико-игров модел на на взаимодействието на производител на комерсиален софтуер с потребителите при условие на съществуване на пазар на нелегални копия

Ще разгледаме най-простия модел на конкуренция на производител на платен софтуер с разпространителите на пиратски софтуер. Предполага се, че на пазара действа производител на програмно обезпечение (за простота – монополист от рода на *Microsoft*), който продава лицензи за ползване на продуктите си. Потребителят има възможност да използва лицензирано копие или пиратско. Тъй като голява част от потребителите ползват пуратски копия, производителят може да предприеме определени мерки за изобличаване и привличане към отговорност на ползвателите на пиратски копия. Ще предполагаме, че полезността, която носи на потребителя пиратското копие е равна на полезността на оригиналното. Приемаме също и, че разходите по изготвянето на самите копия – и легални и пиратски е пренебрежима спрямо останалите величина.

Въвеждаме следните означения:

$c$ – цената на лицензираното копие на продукта на *Microsoft*;

$d$ – цената на пиратското копие на същия продукт;

$f$ – размер на глобата за ползване на пиратско копие (взема се от ползвателя, заловен да ползва пиратско копие в полза на производителя *Microsoft*);

$l$ – издръжката на производителя по организация на проверката за легалност на използваното копие (за един потребител).

Очевидно, трябва да са изпълнени следните тъждества:

$$f > l > c >> d > 0$$

$$f > c + l$$

Ще считаме също, че е изпълнено и

$$f > 2c$$

Дадената ситуация е типична илюстрация на асиметричната информация, при която ползвателя знае произхода на своя софтуер (легален или пиратски), а производителя (и държавата) не може да отличи „честния“ потребител от „нечестния“. Подобни ситуации са типични за съвременната икономика.

**Теоретико-игрово формализиране на ситуацията.** Отначало ще разглрдаме позиционната форма на играта и ще построим нейното дърво (рис. 11). Първият играч ще бъде обобщения потребител, той осъзнато взема решение от две възможности (стратегии): да придобие лицензиран или пиратски софтуер. Производителят се явява втория играч, тъй като той може да вземе решение по инициатива на проверка за легален софтуер само след като потребителят е направил своя ход.

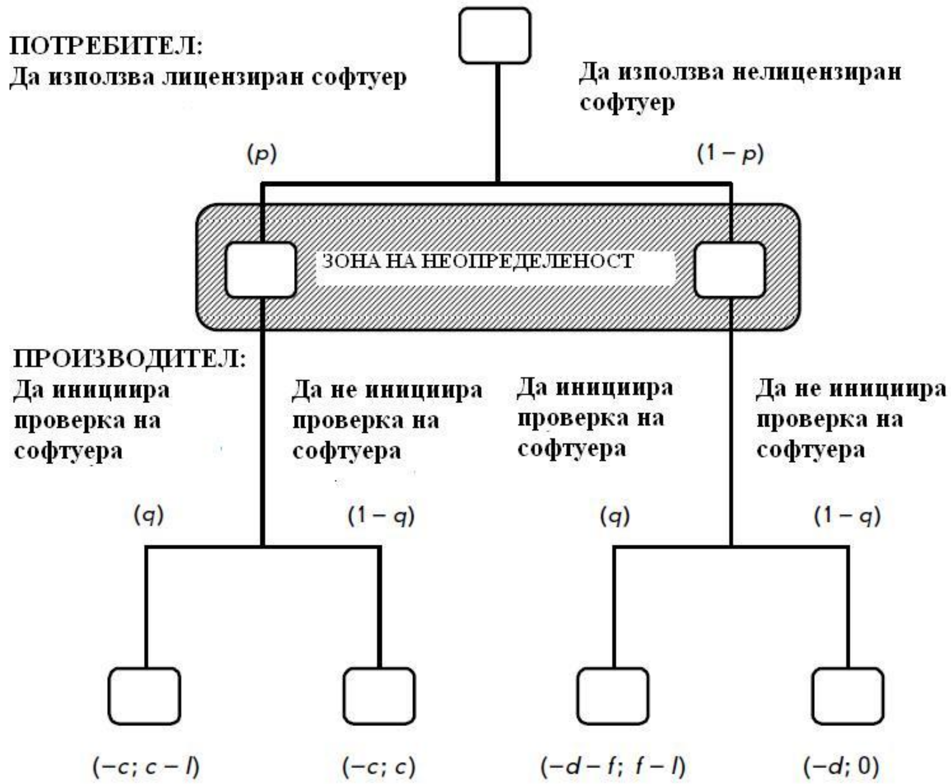


**Рис. 4. Дърво на играта**

Тъй като в момента на вземане на решението си, производителят не знае в коя от двете точки на зоната на неопределеност се намира, дадената конфликтна ситуация се формализира чрез биматричната игра с биматрица на плащанията:

$$P = \begin{pmatrix} (-c, c-l) & (-c, c) \\ (-d-f, f-l) & (-d, 0) \end{pmatrix}$$

Редовете съответстват на стратегиите на първия играч (потребителя):

- първи ред: да използва лицензиран софтуер;
- втори ред: да използва нелицензиран софтуер.

Стълбовете съответстват на стратегиите на втория играч (производителя):

- първи стълб: да инициира проверка на софтуера;
- втори стълб: да не инициира такава проверка.

**Решение на играта.** Нека първо да разгледаме варианта, допускащ само чисти стратегии. Имаме

$$max\{min(-c, -c), min(-d-f, -d)\} = max\{-c, -d-f\} = -c$$

$$max\{min(c-l, f-l), min(c, 0)\} = max\{c-l, 0\} = 0$$

Тези максимини съответстват на първата стратегия на първия играч и на втората стратегия на втория съответно.

Нека $\boldsymbol{p} = (p, 1-p)$ и $\boldsymbol{q} = (q, 1-q)$ са смесените стратегии на играчите: потребителят с вероятност $p$ ще закупи лицензиран софтуер (а с вероятност $1-p$ – нелицензиран) и производителят с вероятност $q$ ще инициира проверка на софтуера (а с вероятност $1-q$ – няма да инициира).

Ако направим пресмятанията за некооперативна игра със смесени стратегии ще получим същата точка на равновесие на Наш, следователно $\alpha = -c$ и $\beta = 0$.

Сега ще разгледаме кооперативния вариант на играта. Върху координатна система с координати $\pi_1$ и $\pi_2$ – всевъзможните плащания на играчите нанасяме върховете, съответстващи на комбинациите от чисти стратегии: $A(-d-f, f-l)$; $B(-c, c)$; $C(-d, 0)$; $D(-c, c-l)$. Тогава Парето-оптималното подмножество е начупената линия $ABC$, а преговорното множество – удебелената затворена отсечка $BC$ (рис. 12). Трябва да максимизираме функцията на Наш

$$N = (\pi_1 - \alpha)(\pi_2 - \beta) = (\pi_1 + c)\pi_2$$

върху затворената отсечка $BC$. Намираме уравнението на правата $BC$:

$$BC: c\pi_1 + (c-d)\pi_2 + cd = 0$$

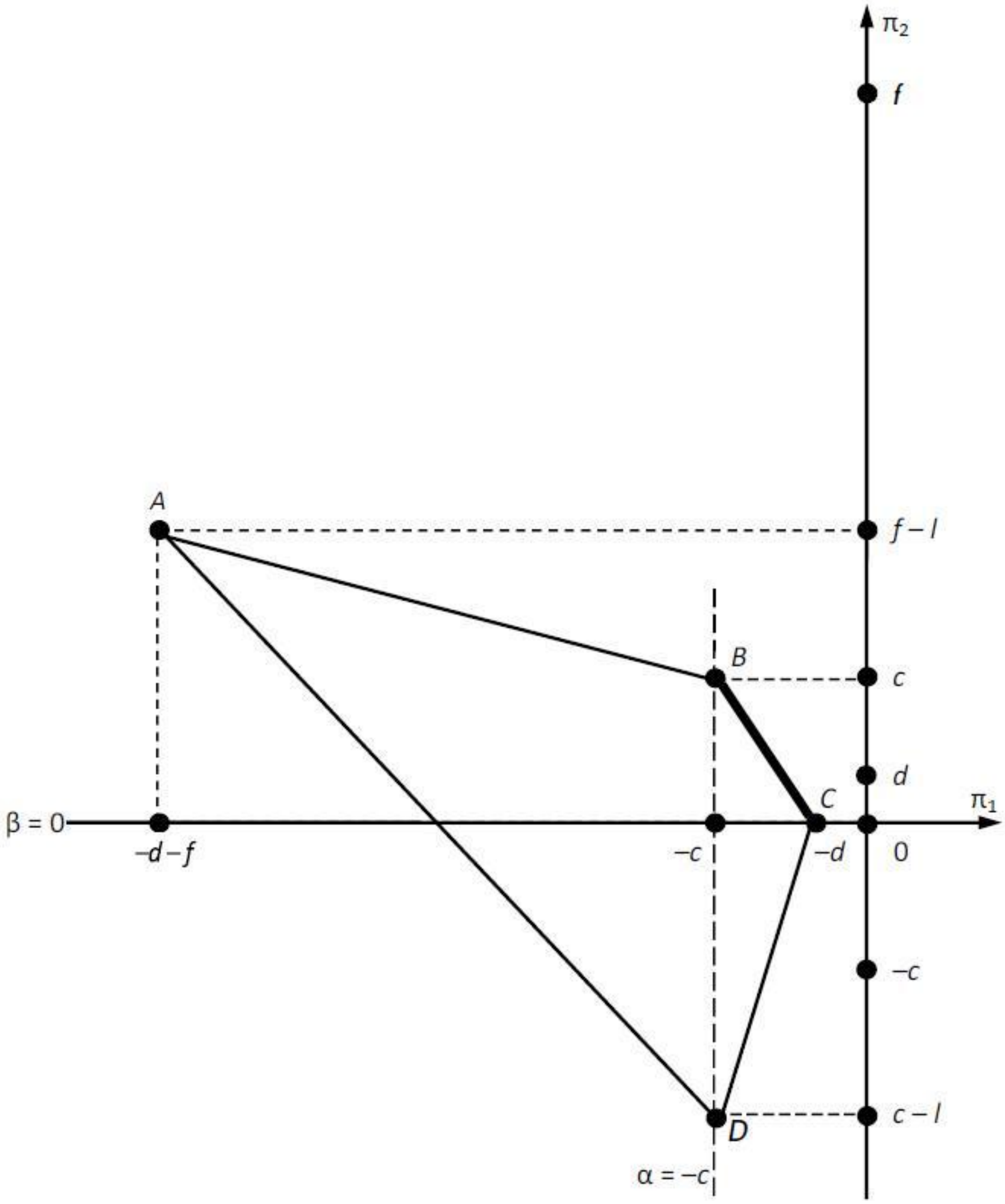


**Рис. 5. Множеството от всевъзможни изходи, Парето-оптималното подмножество и преговорното множество за играта "Проверка на софтуер"**

Тъй като за точка $B$ $\pi_1 = -c$, а за точка $C$ $\pi_2 = -d$, за затворената отсечка $BC$ получаваме

$$[BC]: \pi_2 = -\frac{c(\pi_1 + d)}{c - d} \quad \text{като} \quad \pi_1 \in [-c, -d]$$

Решението на Наш се определя от максимизирането на функцията на Наш $N(\pi_1, \pi_2)$

$$\max_{(\pi_1,\pi_2)\in[BC]} N(\pi_1,\pi_2) = \max_{(\pi_1,\pi_2)\in[BC]} (\pi_1 + c)\pi_2 = \max_{\pi_1\in[-c,-d]} \left\{-\frac{c(\pi_1 + c)(\pi_1 + d)}{c - d}\right\}$$
$$= \max_{\pi_1\in[-c,-d]} \left\{-\frac{c(\pi_1{}^2 + (c + d)\pi_1 + cd)}{c - d}\right\} = -\frac{c(c - d)}{4}$$

(Последното равенство се получава от това, че $(\pi_1{}^2 + (c + d)\pi_1 + cd)' = 2\pi_1 + (c + d)$, което показва, че $N'(\pi_1) = 0 \Leftrightarrow \pi_1 = -\frac{c+d}{2}$ . Въпросният максимум е $N_{max} = N\left(-\frac{c+d}{2}\right) = -\frac{c(c-d)}{4}$ ). За плащането $\pi_2$ плучаваме $\pi_2 = \frac{c}{2}$ . Така получавме, че решението на Наш съвпада със средата на затворената отсечка $BC$. От гледна точка на първия играч в точка $B$ имаме $\boldsymbol{p} = (1,0)$ (първа чиста стратегия), а в точка $C$ - $\boldsymbol{p} = (0,1)$**,** така че за решението на Наш - $\boldsymbol{p_N} = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$**.** За втория играч и двете точки съответстват на втората му стратегия, така че $\boldsymbol{q_N} = (0,1)$. Така доказахме следното

**Твърдение**. Моделът на взаимоотношение между потребителите и комерсиалния производител на софтуер при условие на съществуване на нелегален пазар на пиратски копия притежава единствено равновесие на Наш. Което се определя от смесените стратегия на потребителя

$$\boldsymbol{p_N} = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

и производителя

$$\boldsymbol{q_N} = (0,1).$$

При това плащането на потребителя е равно на

$$\pi_1 = -\frac{c + d}{2},$$

а плащането на производителя е

$$\pi_2 = \frac{c}{2}$$

**Коментар.** И така, рационалният потребител в половината от случаите предпочита използването на нелицензиран софтуер, а рационалният производител не е изгодно да инициира проверка на софтуера. Принципни изменения в конфликтната ситуация не биха настъпили при предположение, че функциите на полезност на потребителите и на производителя са строго растящи. По такъв начин, без значение какви са склонностите на потребителите и производителя към риск, рационалният потребител само в половината от случаите предпочита да закупи лицензиран софтуер, а рационалният производител никога не би инициирал проверка за легалността на използвания софтуер. Така би било винаги, когато цената на лицензa $c$ е по-висока от цената на пиратското копие $d$. При $c = d$, очевидно, полвателят би предпочел легалния софтуер, но тогава печалбата на производителя би се съкратила много (ако не се превърне в загуба).

Полученият резултат демонстрира несъвършенството на подхода на производителя към комерсиализация на разработвания от него софтуер: тогава производителят събира само половината от потенциалния оборот, а половината от ползвателите придобиват пиратски копия. Изходът е в отказ от страна на производителя да продава лицензи. По-добре за него е да разпространява софтуера си безплатно, а да печели от оказване на допълнителни услуги: поддръжка, разработване на допълнителни модули, вграждане на рекламни банери и т.н. При това производителят би се концентрирал в разработка на софтуер и не би изразходвал излишни ресурси за залавянето на нарушителите на авторски права и подвеждането им под отговорност.

**Задачи 5.**

1. Предполага се, че пазарът на специализиран софтуер се състои от 5 млн. потребители. Очаква се, че при цена от 20$ 3 млн. от тях ще закупят платена версия на софтуера, производство на „КомерсСофт“ ООД и функцията на търсене е линейна. „КомерсСофт“ ООД е направила инвестиция от 10 млн. $ за разработването на софтуера, освен това има разходи за разпространението на платените копия в размер на 1$ за копие. „ФриСофт“ ООД предлага подобен софтуер напълно безплатно. При предположение, че „КомерсСофт“ ООД максимализира печалбата си, да се определи: а) на каква цена ще се продава платения софтуер на „КомерсСофт“ ООД; б) как ще се раздели пазара между „КомерсСофт“ ООД и „ФриСофт“ ООД (ако всички потребители, незакупили платения софтуер са станали ползватели на безплатния); в) на колко възлиза печалбата на „КомерсСофт“ ООД.
2. Дадено е, че: цената на легално копие е 20$; цената на нелегално (пиратско) копие е 5$; разходите по иницииране на проверка за легалност на софтуера са 30$ за един ползвател; глобата за хванат да ползва пиратско копие потребител е 60$; общият пазар на този вид софтуер се състои от 4 млн. потенциални потребители, като всеки един от тях ще се снабди с копие от софтуера – легално или пиратско; разходите на фирмата-разработчик на лргалния софтуер възлизат на 20 млн. $ (за разработване и разпространение). Да се състави и реши теоретико-игров модел на конфликтната ситуация потребител (първи играч) – производител (втори играч). На колко възлиза печалбата на фирмата, предлагаща легалните копия?

3. Договор. Днес (дата – не се чете) „Хитрата Свраката“ ООД и „С Двата Крака“ ООД се споразумяха за следното:

1. Приемат, че потенциалния пазар на софтуерните продукти, разработени от всяка от тях възлиза на 2 млн. потребители;
2. Приемат, че при цена от 10$ биха се продали 1 млн. копия и че функцията на потребителско търсене е линейна;
3. Признават, че всяка от тях е извършила разходи по разработването на своя софтуер от 2 млн. $.;
4. Приемат всякакви други разходи (в т.ч. по разпространението) за пренебрежимо малки;
5. Съгласяват се да разпространяват своите продукти под различни търговски наименования, но без да се конкурират по между си, запазвайки финансова и юридическа самостоятелност, но действайки на софтуерния пазар като една фирма-монополист;
6. Решават да действат комерсиално, като цената и предлаганото количество копия се определят въз основа на принципа за максимализиране на печалбата, която ще бъде равна за двете фирми.
7. Настоящият договор е абсолютно конфиденциален, не подлежи на никакво публично разгласяване.

Въз основа на горното картелно съглашение да се определят финансовите параметри на сделката: продадени количества, цена на копие, общ пазарен оборот, печалба на всяка от страните.
Да допуснем, че една от двете фирми реши, че ще наруши горното съглашение, при предположение, че другата го спазва. Такава стратегия ще наричаме нагла, а стратегията, свързана със спазването на съглашението – честна. Да се състави платежната биматрица, ако всяка от фирмите има на разположение тези две стратегии. Да се намери равновесието на Наш за тази биматрична игра с чисти стратегии.
4. Две комерсиални софтуерни компании, предлагащи напълно аналогични софтуерни продукти работят на пазар, зададен с функция на потребителско търсене $x(p) = 5 - \frac{1}{5}p$, където $p$ е цената на софтуера в $, а $x$ – броя на реализираните копия в млн. Разходите по разработване на софтуерите са 1 млн $ за първата фирма и 2 млн. $ за втората. Разпространяването на едно копие струва 1 $ на всяка от фирмите. Каква ще бъде цената за копие и какви количества копия ще се реализират на пазара при положение, че фирмите са сключили картелно съглашение, максимализират печалбите си и ги разделят в пропорция, в каквато са направените от тях общи разходи. (Приема се, че на пазара не се разпространяват пиратски копия и няма други производители на аналогичен софтуер.)