I ВЪВЕДЕНИЕ

Ефективността и конкурентноспособността на една национална икономика, независимостта ѝ от международната стопанска конюнктура се определя до голяма степен от развитието на иновационните отрасли и пазарите на интелектуална собственост. Конкуренцията на тези пазари се отличава съществено от конкуренцията на традиционните пазари – това е свързано с особеностите на знанието, в качеството му на специфична стока на тези пазари. Най-яркия пример за пазар на интелектуална собственост, демонстриращ отличието му от традиционните пазари се явява пазара на софтуерни продукти: например в сегмента на операционните системи производителите на комерсиални продукти през 90-те години на миналия век заемаха монополно положение, тъй като потребителите не се доверяваха на некомерсиалните аналози; сега в сегмента на сървърни операционни системи комерсиалният продукт *Microsoft Windows* и некомерсиалният *Linux* имат почти равни дялове – примерно по 40%.

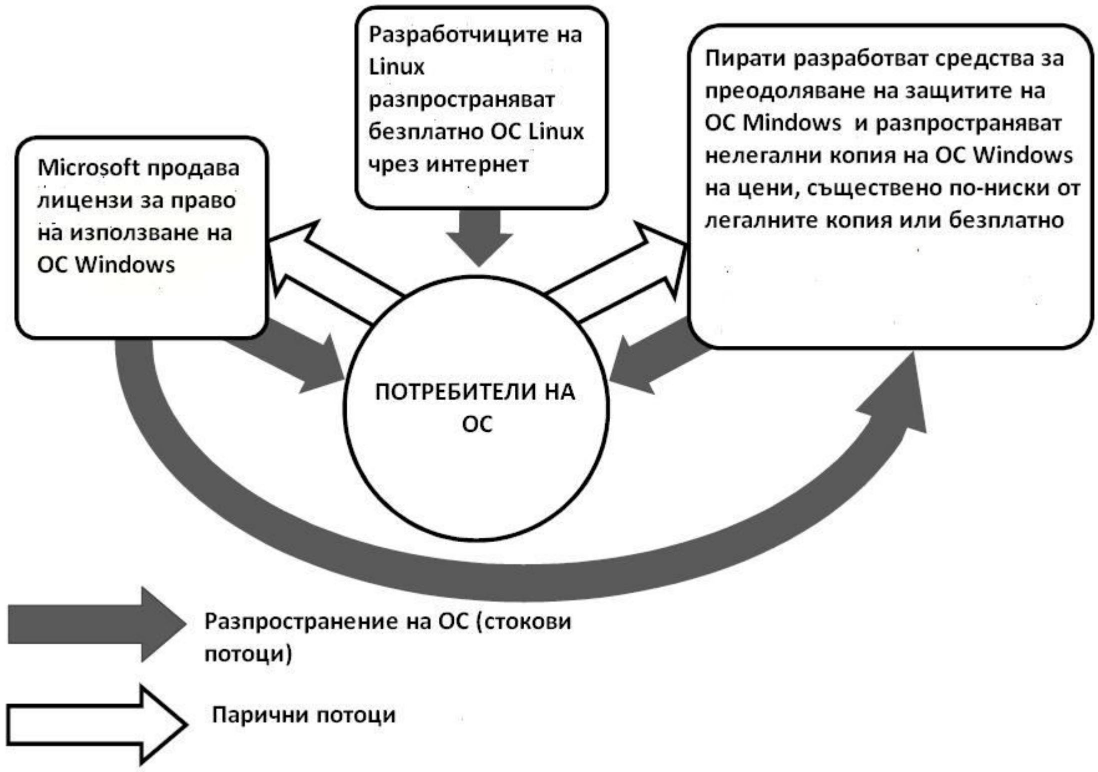

Рис. 1. Схема на съвременния пазар на операционни системи

На рис. 1 е представена схемата на съвременния пазар на софтуер. Пред ползвателите на операционни системи стои актуалния въпрос, кое е по-изгодно:

- да придобият лицензиран комерсиален програмен продукт (например операционната система *Microsoft Windows* или офисния пакет *Microsoft Office*);
- безплатно и легално да използват алтернативен некомерсиален програмен продукт, безплатно разпространяван по интернет (операционна система *Linux*, офис пакет *Open Office*);
- незаконно да се възползват от пиратските копия на комерсиалния програмен продукт.

Съответно, и производителите на софтуерни продукти си задават въпроса, кой от начините за извличане на доходи е оптимален за тях:

- получаване на доходи от разпространяване на лицензи за софтуерните продукти;
- безплатно разпространение на софтуер и получаване на доходи от допълнителни услуги.

Както показва практиката, еднозначни отговори на тези въпроси не съществуват. Особеностите на взаимодействието на участниците в пазара на интелектуална собственост все още не са изследвани достатъчно и задачата за **математическо моделиране на механизмите на конкуренция на пазарите на програмно обезпечение** с отчитане на специфичните особености на тези пазари е изключително актуална.

Основни особености на знанията и иновациите. Според съвременните схващания под **иновация** се разбира „нововъведения, направени в резултат на творческа дейност по разработване, създаване и разпространение на нови видове изделия, технологии и материали, внедряване на нови организационни форми на производство и управление".

Под **икономика на знанието** се разбира „икономика, която създава, разпространява и използва знания за ускоряване на собствения си ръст и конкурентност". Върху формирането и функционирането на пазарите на знание влияят следните особености, които принципно отличават знанието от другите видове стоки:

- дискретност
- наличие на автор
- липса на изключителност

Дискретността означава, че знанието е или предадено или не е, поради което знанието не може да се представи пред потенциалния купувач, така че той да вземе решение дали да го закупи или не.

Липсата на изключителност води до нарастваща възвращаемост от мащаба при разпространение на знанието, тъй като съществува огромна разлика между разпространение на знанието тъй като съществува огромна разлика между себестойността на създаване на знанието и много по-малката (близка до нулата) себестойност на неговото копиране.

Наличието на автор означава, че знанието е частно благо, а отсъствието на изключителност – че знанието е обществено благо.

Класическите модели на отрасловите стокови пазари, изучавани от математическата микроикономика не отразяват горните свойства на знанията и поради това са непригодни за моделирането на пазарите на знания и иновации.

Иновациите на софтуерния пазар. Иновациите на най-значителния пазар на знания, какъвто е пазара на информационни технологии, се развиват с изумителни темпове – само 70 години ни делят от появата на първия компютър, а през това време се появиха микропроцесорите, персоналните компютри, лаптопите, таблетите, АСУ (автоматизирани системи за управление), CAD-, ERP- и CRM-системите и др. Освен развитието на качеството и възможностите на продуктите, налице е и процес на тяхното поевтиняване: за последните 30 години изчислителната мощност нараства със средногодишен темп от 40%, а цените падат с около 20% годишно. Прогресът в областта на информационните технологии е несравним с никоя друга област. Ако така бързо се развиваше транспортът, то сега за един лев би трябвало да отидем до Марс и да се върнем за 15 минути.

За отбелязване е, че понастоящем в световната икономика се извършва технологична революция, като под влиянието на информационните технологии се променя бизнеса, неговата среда, участниците в него и методите за управление. Информационните технологии са престанали да бъдат спомагателен ресурс за бизнеса, сега те играят структурираща и преструктурираща роля в него.

Най-простите примери за използване на информационни технологии, водещи до коренно преформатиране на бизнеса са:

- компютърните системи за счетоводна отчетност, които съществено ускоряват, облекчават и поевтиняват работата на счетоводителите;
- системите за автоматизация на търговията, свързващи в единно цяло системите на закупуване, складиране, продажба, счетоводство, планиране и др.;

- интернет-магазините, които позволяват съществено намаляване на издръжката на търговските предприятия за сметка на съкращаване на търговските площи и персонала за продажби.

Съществуват и достатъчно развити съвременни информационни технологии, водещи до значителни подобрения в бизнеса като:

- технологията за управление на опашките;
- виртуалния офис;
- офшорното програмиране.

Интелектуален капитал на участниците в пазара на информационни технологии. Според съвременните схващания под **капитал** се разбира „резултата от социалната оценка на ограничен, допускащ натрупване, ликвиден, възпроизводим ресурс, способен да донесе нова (добавена) стойност"

От опита на водещите компании обаче следва, че паричният капитал, както и другите производствени фактори допринасят за развитието на компанията в много по-малка степен, отколкото пазарната ѝ позиция и способността ѝ да се адаптира към изменящата се пазарна среда. Ярък пример за това е компанията *Nokia*, която е лидер на световния пазар на мобилни телефони, като практически не притежава собствени производствени мощности, а опитът ѝ е преди всичко в дървообработването и производството на автомобилни гуми.

Под **интелектуален капитал** ще разбираме знание, което може да бъде преобразувано в стойност.

Коефициентът на Тобин q се определя като съотношение на пазарната стойност на компанията (оценен от фондовата борса) към стойността на активите ѝ (счетоводната стойност). Коефициентът на Тобин отразява приноса на интелектуалния капитал в стойността на компанията, определен от организационните възможности, качеството на управление, способността за адаптация. Една от най-успешните компании по тези критерии е корпорацията *Microsoft*, за която коефициентът на Тобин на 9 януари 2009 г., пресметнат въз основа на консолидирания финансов отчет за 2008 г. и котировката на акциите ѝ е

$$q_{Microsoft} = \frac{173640000000\$}{72793000000\$} = 2{,}39$$

и то по времето на световната финансова криза. В спокойни във финансово отношение времена коефициентът на Тобин за тази корпорация варира в интервала $q_{Microsoft} \in (4{,}6)$. И това е закономерност: конкретните изследвания на световните компании демонстрират по-високи стойности на коефициента на

Тобин за компаниите от информационно-технологичния отрасъл в сравнение с другите отрасли.

Себестойност на продуктите на софтуерния пазар. Според съвременната икономическа наука „тиражирането на стандартната продукция в количества, необходими за удовлетворяване на потребностите е в основата на съществуването на обществото и на отделния човек“. Пазарът на програмно обезпечение е ярък пример за пазар на знания. Тиражирането на продукцията на този пазар е практически без материални разходи – за разлика от създаването на нов продукт. Себестойността на запис на компакт-диск е достатъчно малка, а себестойността на разпространяване на копия по интернет е още по-малка. Във връзка с това, на софтуерния пазар е налице особенност, състояща се в невъзможност да се разнесат разходите по броя на реализираните копия. Променливите разходи на пазара на програмно обезпечение са практически равни на нула, а общите разходи съвпадат с постоянната издръжка за създаването на нов продукт. Да отбележим, че при традиционните пазари имаме

$$TC(q) = FC + VC(q) ,$$

където q е количеството на произведена и реализирана продукция, FC (Fixed Cost)$= const$ са постоянните, независещи от количеството разходи, $VC(q)$ (Variable Cost) – променливите разходи, а $TC(q)$ (Total Cost) – общите разходи.

Комерсиално програмно обезпечение и инструменти за неговото разпространение. Пазарът на програмно обезпечение е удобно да се разглежда като „пазар на лицензи, основан на авторски права“. Съществуват следните инструменти за разпространение на комерсиалното програмно обезпечение:

- **традиционни лицензионни договори**, сключвани в писмен вид и предвиждащи еднократно плащане и периодично плащане на роялти (такси за авторски права);
- **нетрадиционни лицензионни договори**, при които условията на лиценза са напечатани на опаковката на продукта (или публикувани на сайта, от който потребителите свалят продукта). Те представляват разновидност на договор-оферта (при който купувача се присъединява при отварянето на опаковката на продукта или при завършване на изтеглянето на продукта). Този вид лиценз е въведен от *Microsoft* през 80-те години на миналия век и е получил много широко разпространение във връзка с отсъствието на преговори за цената и условията, което създава определени психологични предимства както за производителя, така и за потребителя.

- **договори за аренда**, при които програмното обезпечение остава собственост на производителя, а потребителя получава право за ползване на продукта в течение на договорения срок;
- **абонаментни договори**, при който потребителят придобива право за ползване на постоянно обновяващ се продукт, както и право за получаване на поредната обновена версия. Този начин е най-удобен за разпространяване на антивирусни програми, счетоводни пакети, юридически справочници и др.

Некомерсиално програмно обезпечение. Принципната възможност за придобиване на пиратски копия на програмни продукти обуславя несъответствие в дейността на производителя на комерсиално програмно обезпечение: производителят е принуден да изобличава незаконните ползватели и да ги привлича под отговорност, което го отвлича от основната му дейност и му коства значителни ресурси. Всяко несъответствие в икономиката е предпоставка за иновация. Резултата от горното несъответствие е появата на иновативната – некомерсиална форма за разпространение на програмни продукти:

- **свободен софтуер;**
- **софтуер с отворен код.**

Съгласно основателя на Фонда за свободен софтуер (*Free Software Foundation*) Р. Столман, „*Free software is software that gives the user the freedom to share, study and modify it*“, т.е. софтуерът се нарича свободен, ако ползвателят притежава три свободи:

- да разпространява софтуера;
- да изучава как е устроен;
- да го променя.

Същите свободи предлага и движението Софтуер с отворен код (*Open Source Software*). Разликата е в това, че движението счита комерсиалното разпространение на софтуер за неоптимално от бизнес гледна точка, докато Фонда за свободен софтуер намира, че платеното разпространение на софтуер е социален проблем. Понататък, под некомерсиално (безплатно) разпространение на софтуер ще разбираме и софтуера с отворен код и свободния софтуер. В момента главен представител на некомерсиалния софтуер е операционната система *Linux*. Освен това, могат да се споменат и офис пакета *OpenOffice*, брузъра *Firefox*, сървърите за бази данни *MySQL* и *Firebird*, web-сървъра *Apache*, пощовата система *Sendmail*, скриптовия език *PHP*, интерпретативния език за програмиране *PERL*, набора библиотеки *Boost C++*.

Конкуренция между комерсиалния и некомерсиалния софтуер. Съвременният софтуерен пазар предлага на потребителя избор между следните три варианта:

- да придобие лиценз и да използва платен софтуер (например *Microsoft Windows* в качество на операционна система, *Microsoft Office* в качество на офис пакет, *Microsoft Internet Information Server* в качество на web-сървър и др.);
- да използва безплатно некомерсиален софтуер (например *Linux* в качество на операционна система, *OpenOffice* в качество на офис пакет, *Apache* в качество на web-сървър и др.);
- да използва пиратски копия на комерсиален софтуер.

На тези варианти съответстват три типа играчи на софтуерния пазар:

- играчи, максимализиращи печалбата си от производство на софтуер и продажба на лицензи (например *Microsoft*);
- играчи, неориентирани към извличане на печалба от производството на софтуер, поради безплатното му разпространение (например групата разработчици на *Linux*);
- пирати.

Тъй като променливата издръжка е равна на нула, цената на продукта на пазара на софтуер (или от гледна точка на потребителя, стойността на владеене на продукта) представлява сума от три събираеми:

- компенсации за постоянната издръжка;
- добавена (при продажбата) стойност;
- стойност на обслужването.

При това постоянните разходи както на комерсиалния, така и на некомерсиалния софтуер са приблизително равни, като купувача на платен софтуер компенсира постоянните разходи на комерсиалния, а при некомерсиалния тези разходи остават некомпенсирани.

Основни некомерсиални програмни продукти (данни за 2005 г.)

Продукт	Изтеглянияпрез 2005 г. (ТБ за седмица)	Инвестиции на рисков и човешки капитал (млн $)
Linux	204	1500
OppenOffice	27	317
MySQL	15	76
Firefox	12	48
Jboss	3	24
Linux on Xbox	1,3	15
Apache	0,7	10
PERL	0,4	0
PHP	0,05	0
Boost C++	0,05	0

Разходите по обслужването на комерсиалния и некомерсиален софтуер са приблизително равни.

Печалбата на производителите на комерсиален софтуер е строго положителна (и производителят се стреми да я максимилизира), за разлика от производителите на некомерсиален софтуер, чиито приходи от продажба са равни на нула (некомерсиалните производители също имат приходи, но те са от обслужването на своите продукти).

Аналогична ситуация възниква и на други пазари – например конкуренцията между университетите и консултантските фирми на пазара на управленско консултиране.

Важно е да се отбележи и че пазарът на софтуер е пазар с асиметрична информация – производителите на софтуер са по-добре осведомени за недостатъците на предлаганите от тях (и от конкурентите им) продукти, отколкото потребителите, избиращи измежду няколко алтернативни продукта.

Изглежда, че изборът на потребителя е много прост: да използва некомерсиален софтуер заради много по-ниската цена (и някои други предимства, особенно в случая на отворен продукт, както е *Linux*, при който ползвателят има възможност да влияе върху качеството му). Но на практика ситуацията е по-сложна. Работата се състои в това, че когато започва конкуренцията между комерсиалните и некомерсиални производители (в началото на 90-те година на миналия век) 100% от пазара е бил зает от производители, максимализиращи печалбата си и за некомерсиалните производители е било трудно да разпространяват продуктите си (дори и безплатно) поради широката известност и авторитет на комерсиалните продукти и недоказуемост на потребителските качества на некомерсиалните аналози като надеждност, безопасност и др. През последните 15-20 години на много от сегментите на софтуерния пазар некомерсиалните продукти са достигнали обемите на разпространение на комерсиалните аналози. Свидетелство за това е долната таблица.

Динамика на разпределението на пазара на операционни системи между конкурентите през 1994 – 2003 г. в %

година	*Windows*	*Novell*	*Linux*	*Unix*	други
1994	7,0	39,6	0,0	28,6	11,0
1995	18,1	34,7	0,0	25,4	8,0
1996	25,6	32,1	6,5	20,1	4,5
1997	35,3	26,7	6,8	20,9	3,9
1998	38,3	22,8	15,8	18,8	1,3
1999	38,1	19,1	24,8	15,5	1,0
2000	38,5	15,0	30,0	15,0	5,0
2001	39,5	13,0	34,0	13,0	3,0
2002	40,5	12,0	36,0	12,0	2,0
2003	41,0	10,0	38,0	10,0	2,0

В следващата таблица са приведени данните, обработени от компанията *Gartner* за сумарните световни разходи за информационни технологии

Обеми на сегментите на световния пазар на информационни технологии през 2007 – 2010 г. (млрд $)

година	хардуер	софтуер	IT-услуги	общо
2007	382	178	748	1308
2008	381	222	810	1413
2009	333	221	777	1331
2010	353	232	821	1406

В следващата таблица са дадени данни за нивата на пиратство, загубите от пиратство, както и средната работна заплата в пиратския сектор на софтуерните технологии. Под ниво на пиратство се разбира дела на използвани нелицензирани пиратски копия на комерсиални програмни продукти от общия брои лицензирани и нелицензирани такива.

Динамика на развитие на пиратството през 2003 – 2009 г.

година	свят	БРИКС	Русия	ЕС	САЩ	Китай
Ниво на пиратство в %						
2003	36	87	87	36	22	92
2004	35	85	87	34	21	90
2005	35	81	83	35	21	86
2006	35	77	80	34	21	82
2007	38	75	73	33	20	82
2008	41	73	68	33	20	80
2009	43	71	67	34	20	79
Загуби от пиратство в млрд $						
2003	28,80	5,80	1,10	9,60	6,50	3,82
2004	32,71	6,10	1,36	11,86	6,65	3,57
2005	34,48	6,84	1,63	11,86	6,90	3,88
2005	38,70	10,05	2,19	10,64	7,29	5,43
2007	47,81	14,43	4,12	11,66	8,04	6,66
2008	53,00	15,41	4,22	13,02	9,14	6,68
2009	51,41	14,45	2,61	11,75	8,39	7,58
Средна месечна работна заплата						
2008	-	-	597	3970	4241	230

II. МОДЕЛИ НА РАЗПРОСТРАНЕНИЕ НА ИНОВАЦИИТЕ

Рис. 2. Иновациите преди и сега - стоманения плуг на Джон Дир (XIX в.) и Apple Watch

1. Базов модел на разпространение на иновациите

През последните 50-60 години са създадени много матаматически модели на разпространение на иновативни продукти на пазарите.

Да започнем с очевидната схема (показана на рис. 2) за разпространение на един иновативен продукт сред потребителите.

Нека

$T(t)$ – общ брой на индивидите на пазара в момент от времето t;

$M(t)$ – общ брой на потенциалните потребители на иновативния продукт в момент от времето t;

$N(t)$ – общ брой действителни потребители на иновативния продукт в момент от времето t;

$m(t) = \frac{dM(t)}{dt}$ – брой на индивидите, преминаващи за безкрайно малко време dt от необхванатия пазар към потенциалния;

$n(t) = \frac{dN(t)}{dt}$ – **скорост на разпространение на иновацията** – брой на индивидите, преминаващи за безкрайно малко време dt от потенциалния пазар към действителния.

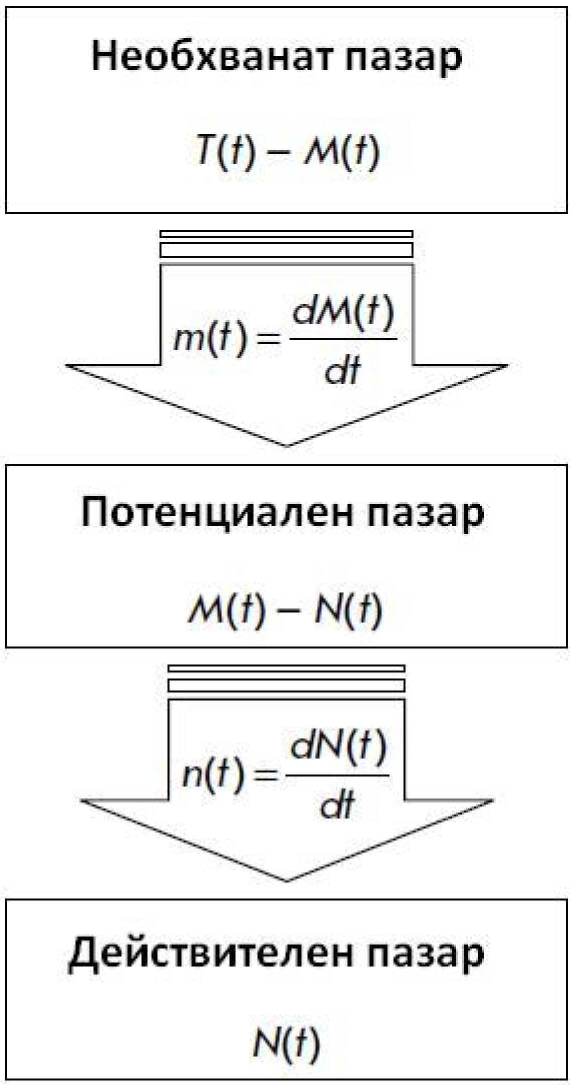

Рис. 3. Преместване на потребителите между сегментите на иновационния пазар

В теорията на иновациите под **дифузия на иновацията** се разбира решението

$$N = N(t)$$

на задачата на Коши за обикновенното диференциално уравнение

$$\frac{dN(t)}{dt} = f\big(t, N(t)\big)$$

с начално условие

$$N(0) = N_0 \,,$$

където $N(t)$ е обема на разпространение на иновацията към момент от времето t (който е равен или на броя продадени екземпляра от иновативния продукт или на броя на действителните потребители); $f\big(t, N(t)\big)$ е функцията, определяща вида на дифузионната крива, отразяваща предположението за начина на разпространение на иновацията. Предполагаме, че $N(t)$ е непрекъснато диференцируема функция, а $f\big(t, N(t)\big)$ – унимодална.

Забележка. Унимодална функция в интервала $[a, b]$ се нарича функция, притежаваща единствен минимум (максимум) x^* в този интервал и монотонна от двете страни на x^*

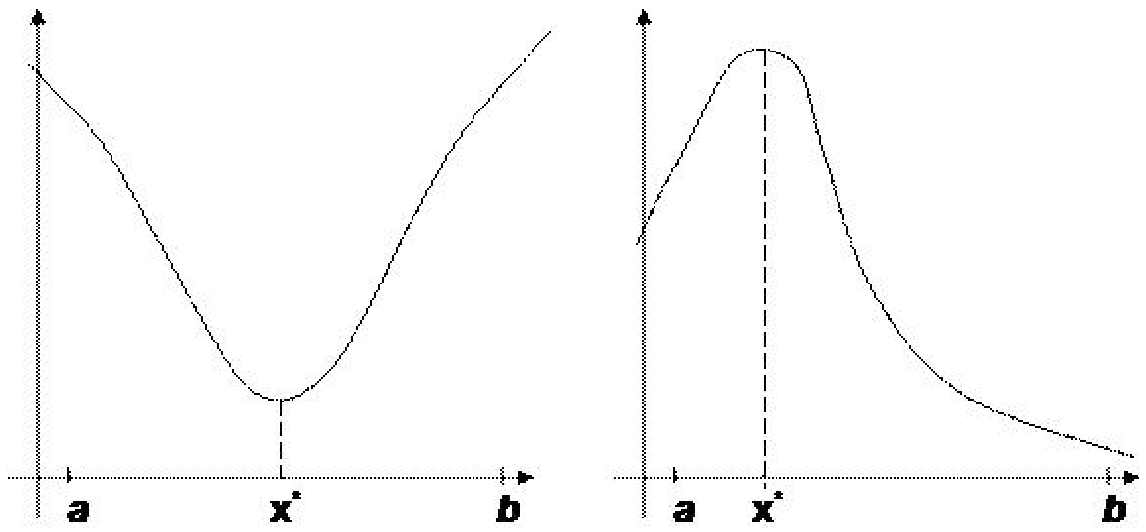

Рис. 4. Графики на унимодални функции

Базовият модел на разпространение на иновациите е

$$\frac{dN(t)}{dt} = g\big(t, N(t)\big)\big(M - N(t)\big)$$

В този модел се предполага, че общият брой на потенциални потребители M е постоянен във времето, а скоростта на разпространение на иновацията $\frac{dN(t)}{dt}$ във всеки монент е пропорционална на обема на потенциалния пазар $M - N(t)$. При увеличаването на действителните потребители на продукта $N(t)$ намаляват потенциалните потребители $M - N(t)$, което забавя скоростта на разпространение на иновацията.

2. Фундаментален модел на разпространение на иновациите

Общ фундаментален модел. Функцията $g\big(t, N(t)\big)$ в израза на базовия модел се нарича **скорост на адаптацията** и обикновенно се интерпретира като вероятност потенциалния потребител да закупи иновативния продукт в момент t. Във фундаменталния модел тази функция се приема за линейна функция на $N(t)$:

$$g\big(t,N(t)\big) = a + bN(t)$$

Като заместим скоростта на адаптация в базовия модел получаваме

$$\frac{dN(t)}{dt} = \big(a + bN(t)\big)\big(M - N(t)\big)\,,$$

което е обикновенното диференциално уравнение на фундаменталния модел за разпространение на иновациите. Параметрите a и b в този модел отразяват съответно външните и вътрешни влияния върху скоростта на адаптация. Смята се, че събираемото $a(M - N)$, отразяващо външното влияние върху потребителя е вследствие от маркетингови и рекламни компании (внушаващи на потребителя, че иновативния продукт му е необходим). Вътрешното влияние, на което съответства събираемото $bN(M - N)$ е резултат от комуникацията между действителните и потенциалните потребители (в резултат от което на потенциалните потребители се предава информация за иновативния продукт).

Приложение 1. Обикновенни диференциални уравнения

Израз от вида

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{или} \quad y' = f(x, y)$$

се нарича обикновенно диференциално уравнение (ОДУ) от първи ред. Въобще редът на едно ОДУ се определя от най-високия ред производна, която се среща в него. Предполага се, че $y = y(x)$ е неизвестната функция на уравнението. Показва се, че при определени условия такава функция може да се намери – тя се нарича решение или интеграл на уравнението. Нещо повече: съществуват безброй решения $y = y(x, C)$, зависещи от един параметър C – интеграционна константа. Ако фиксираме C $y = y(x, C)$ е уравнение на линия в координатната равнина – интегрална линия. Множеството от всички такива интегрални линии образува еднопараметрична фамилия от линии – през всяка точка с координати (x_0, y_0) минава и то само една интегрална линия (за точно определено C). В това се състои задачата на Коши за едно ОДУ от първи ред: Да се намери такова решение $y = y(x)$ на уравнението, удовлетворяващо началното условие

$$y(x_0) = y_0$$

Решението $y = y(x, C)$, зависещо от параметъра C (и несъобразено с началното условие) се нарича общо решение на ОДУ. От началното условие се определя конкретната стойност на C, така че то да бъде удовлетворено и се получава частното решение.

Като най-прост пример за ОДУ от първи ред са уравненията с разделени променливи, които имат вида

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

Техните общи решения се получават чрез непосредствено интегриране

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

Пример. Ако $y \in [0,5)$ да се реши диференциалното уравнение

$$\frac{dy}{dx} = (2+3y)(5-y)$$

с начално условие $y(0) = 1$.

Решение. Получаваме

$$\int \frac{dy}{(2+3y)(5-y)} = \int dx$$

За да решим левия интеграл ще трябра да разложим подинтеграционния израз чрез метода на неопределените коефициенти. Имаме

$$\frac{1}{(2+3y)(5-y)} = \frac{A}{2+3y} + \frac{B}{5-y} = \frac{5A - Ay + 2B + 3By}{(2+3y)(5-y)}$$

От системата $-A + 3B = 0$, $5A + 2B = 1$ получаваме $A = \frac{3}{17}$, $B = \frac{1}{17}$ и

$$\frac{1}{17}\int \frac{3dy}{2+3y} + \frac{1}{17}\int \frac{dy}{5-y} = x + C$$

След интегриране ще имаме

$$\ln \frac{2+3y}{5-y} = 17x + C_1$$

за $C_1 = 17C$ (съобразили сме, че от $y \in [0,5)$ следва $\frac{2+3y}{5-y} > 0$).

От горното равенство получаваме

$$\frac{2+3y}{5-y} = C_2 e^{17x}$$

за $C_2 = e^{C_1}$. От горното равенство определяме общото решение

$$y = \frac{5C_2e^{17x} - 2}{C_2e^{17x} + 3}$$

Накрая ще използваме началното условие за определяне на интеграционния параметър C_2. В общото решение заместваме x с 0 и y с 1. Получаваме

$$1 = \frac{5C_2 - 2}{C_2 + 3},$$

откъдето получаваме $C_2 = \frac{5}{4}$. Заместваме получената стойност на C_2 в общото решение. Ще имаме

$$y = \frac{25e^{17x} - 8}{5e^{17x} + 12},$$

което е търсеното решение на задачата на Коши (частното решение).

Модели с външно влияние. Първите модели за разпространение на иновациите са се основавали на предположението, че скоростта на разпространение на иновацията $\frac{dN(t)}{dt}$ зависи само от потенциалната възможност за насищане на пазара, с други думи, само от броя на потенциалните потребители $M - N(t)$, като коефициентът a отразява иновационността на потребителите (тяхната нужда от иновацията) и ефективността на стратегията на продавача (маркетинг и реклама). Такива модели на външно влияние са частни случаи на фундаменталния модел на разпространяване на иновациите и се получават при $b = 0$. Съответното обикновенно диференциално уравнение добива вида

$$\frac{dN(t)}{dt} = a\big(M - N(t)\big)$$

Разделяйки променливите получаваме

$$\int \frac{dN}{M - N} = \int a\,dt$$

След интегриране получаваме общото решение

$$\ln(M - N) = -at + C\,,$$

откъдето

$$N(t) = M - Ce^{-at}$$

Чрез началното условие на задачата на Коши $N(0) = N_0$ определяме $C = M - N_0$. Така окончателно ще имаме

$$N(t) = M - (M - N_0)e^{-at}$$

Графиката на решението на модела $N = N(t)$ е дадена на рис. 5

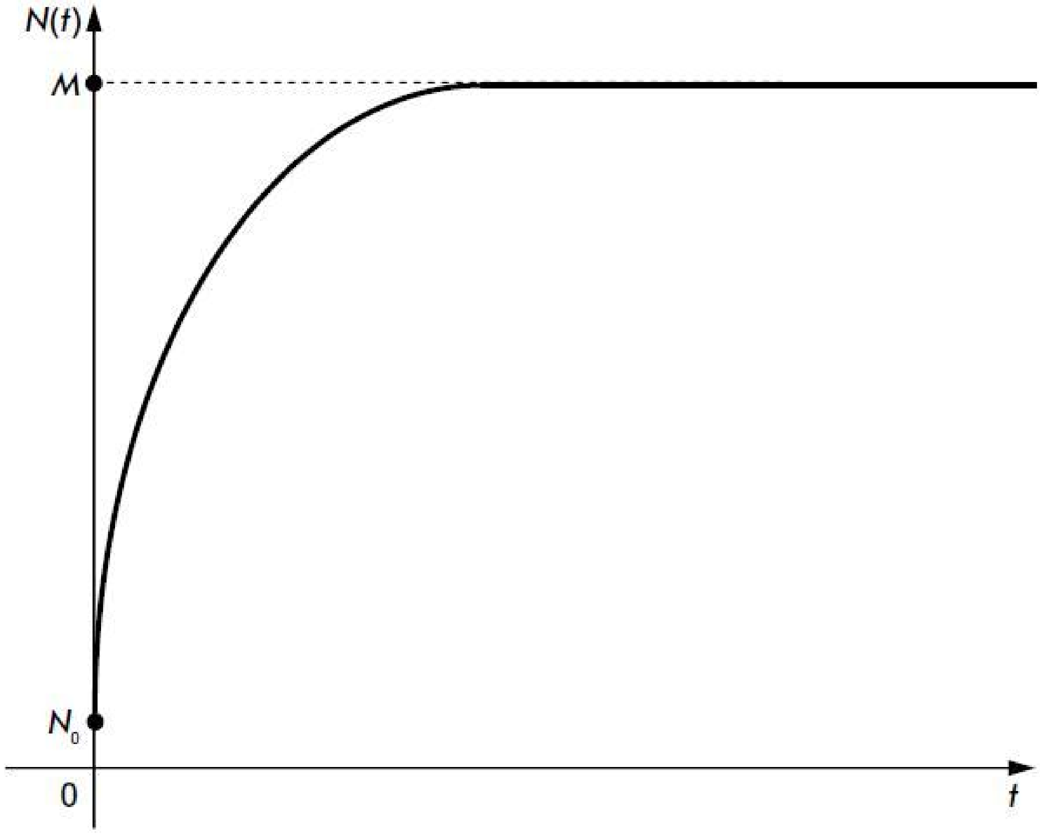

Рис. 5. Ръст на действителния пазар при модела с външно влияние

За първи път в теорията на иновациите функции от този вид се появяват през 1957 г. в изследванията на Дж. Колман, Е. Катц и Х. Менцел, които с тяхна помощ описват разпространението на новите лекарства сред лекарите. През 1960 г. Л. Форт и Дж. Уудлок прогнозират чрез такива функции търсенето на някои видове стоки, а Р. Хемблин, Б. Джакобсън и Дж. Милър през 1973 г. построяват модел за разпространяване на стачките и политическите демонстрации.

Основните ограничения на модела с външно влияние се състои в това, че този модел не отчита взаимодействието между действителните и потенциалните потребители на иновациите. Поради това този модел може да се използва при описване процеса на разпространение на иновации, които са по-прости и с малка социална значимост.

Модели с вътрешно влияние. Те представляват частен случай на фундаменталния модел на разпространение на иновациите при $a = 0$. Тогава диференциалното уравнение на модела изглежда така

$$\frac{dN(t)}{dt} = bN(t)\big(M - N(t)\big)$$

Основното предположение, лежащо в основата на този модел се състои в допускането, че скоростта на разпространение на иновацията $\frac{dN(t)}{dt}$ е пропорционална както на потенциалната възможност за насищане на пазара $M - N(t)$, така и на достигнатото ниво на разпространение $N(t)$. При това се предполага, че външните влияния (нуждата на индивида от иновацията и общата информация за продукта, получена не по пътя на лични контакти между действителните и потенциалните потребители) не оказва въздействие върху процеса на вземане на решение за придобиване на продукта. В този модел се счита, че потребителят взема това решение само под въздействие на контактите си с действителни ползватели на иновативния продукт. Коефициентът b в горното уравнение е пропорционален на вероятността за среща на двама случайно избрани индивиди, единият от които ползва продукта, а другия – още не.

Горното диференциално уравнение е с разделени променливи. Ще имаме

$$\int \frac{dN}{N(M-N)} = \int b\,dt$$

За да интегрираме лявата страна представяме израза $\frac{1}{N(M-N)}$ като сума на две дроби с неопределени коефициенти

$$\frac{1}{N(M-N)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{M-N} = \frac{AM - AN + BN}{N(M-N)}$$

От системата $B - A = 0, AM = 1$ намираме $A = B = \frac{1}{M}$ и

$$\frac{1}{N(M-N)} = \frac{1}{M}\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{M-N}\right)$$

Тогава ще имаме

$$\int \frac{dN}{N} + \int \frac{dN}{M-N} = bMt + C$$

или

$$\ln\frac{N}{M-N} = bMt + C \Leftrightarrow \frac{N}{M-N} = C_1 e^{bMt}$$

за $C_1 = e^C$. Окончателно получаваме

$$N(t) = \frac{C_1 M e^{bMt}}{1 + C_1 e^{bMt}} = \frac{M}{1 + C_2 e^{-bMt}}$$

за $C_2 = {C_1}^{-1}$. Това е общото решение на диференциалното уравнение. За определяне на интеграционната константа C_2 ще използваме началното условие на задачата на Коши. Имаме

$$N(0) = \frac{M}{1 + C_2} = N_0 \Longrightarrow C_2 = \frac{M - N_0}{N_0}$$

Така достигаме до окончателното решение на модела

$$N(t) = \frac{M}{1 + \frac{M - N_0}{N_0} e^{-bMt}}$$

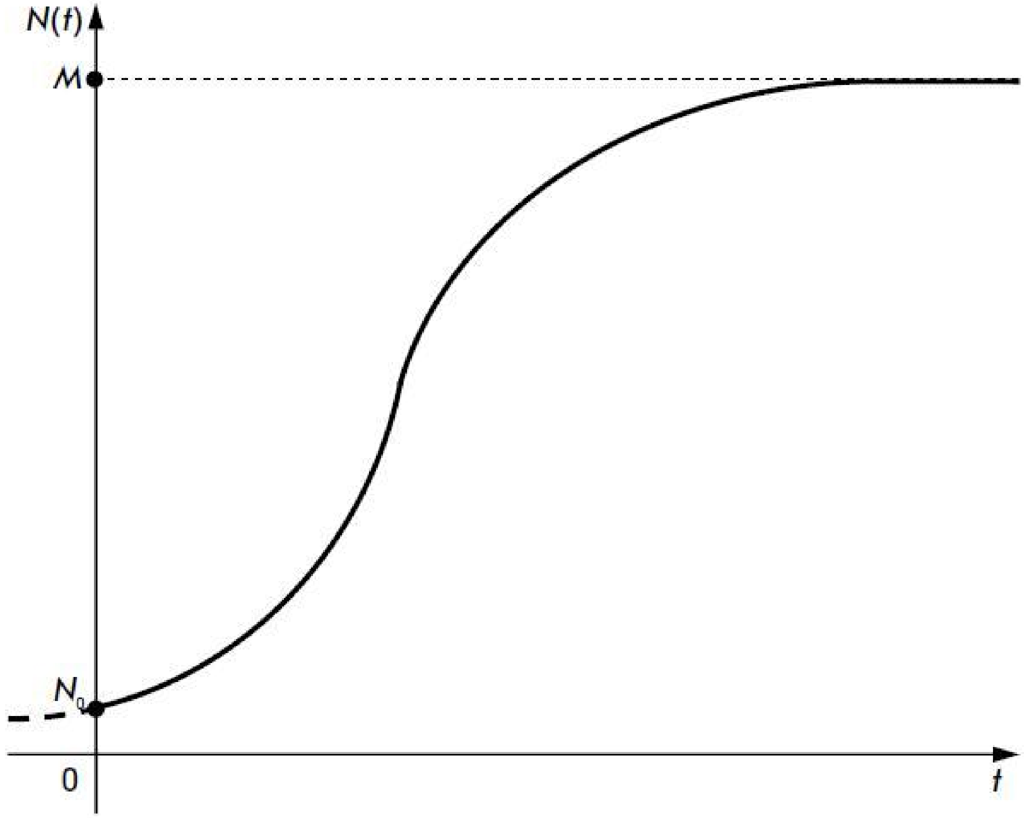

Рис. 6. Ръст на действителния пазар при модел с вътрешно влияние

Функцията $N = N(t)$, описваща разпространението на иновация в случай на вътрешно влияние се нарича S- линия или **логистична линия**. Нейната графика е представена на рис. 6.

Първите модели с вътрешно влияние са предложени от Ц. Грилехес през 1957 г. и Е. Менсфийлд през 1961 г. Ц. Грилехес е изучавал разпространението на хибридни сортове царевица сред фермерите от различни региони на САЩ, а Е. Менсфийлд – факторите, влияещи на разпространението на иновациите в различни отрасли на икономиката на САЩ.

Модели със смесено влияние. Най-разпространените модели на разпространение на иновациите са тези, при които и двата коефициента a и b са различни от нула – моделите със смесено влияние. Те се основават на така наречената **комуникационна хипотеза,** формулирана от П. Лазарсфелд, Б. Берелсон и Х. Гаудет през 1948 г. Тази хипотеза се състои в предположението, че съобщенията за продукта в средствата за масово осведомяване не оказват влияние върху основната част от потенциалните потребители, но достигат до определена малка група, която след това влияе на останалите потребители.

Моделите със смесено влияние предполагат, че на процеса на вземане на решение за придобиване на иновативния продукт оказват влияние и външните фактори – нуждата на индивида от продукта и съобщенията за него в средствата за масово осведомяване и вътрешните фактори – личните контакти на действителните ползватели с потенциалните.

Диференциалното уравнение на модела със смесено влияние е

$$\frac{dN(t)}{dt} = \big(a + bN(t)\big)\big(M - N(t)\big)$$

или

$$\int \frac{dN}{(a + bN)(M - N)} = \int dt$$

Разлагаме дробта $\frac{1}{(a+bN)(M-N)}$ по метода на неопределените коефициенти. Имаме

$$\frac{1}{(a + bN)(M - N)} = \frac{A}{a + bN} + \frac{B}{M - N} = \frac{AM - AN + Ba + BbN}{N(M - N)}$$

От системата $Bb - A = 0, AM + Ba = 1$ получаваме $B = \frac{1}{a+bM}$ и $A = \frac{b}{a+bM}$. Тогава ще имаме

$$\frac{1}{a + bM}\left(\int \frac{bdN}{a + bN} + \int \frac{dN}{M - N}\right) = t + C$$

или

$$\frac{1}{a + bM} \ln \frac{a + bN}{M - N} = t + C$$

откъдето

$$\frac{a + bN}{M - N} = e^{(a+bM)(t+C)}$$

Окончателно получаваме общото решение на модела

$$N(t) = \frac{M - ae^{-(a+bM)(t+C)}}{1 + be^{-(a+bM)(t+C)}}$$

Сега остава да определим интеграционната константа C от началното условие на задачата на Коши. Имаме

$$N(0) = \frac{M - ae^{-(a+bM)C}}{1 + be^{-(a+bM)C}} = N_0 \Longrightarrow e^{-(a+bM)C} = \frac{M - N_0}{a + bN_0}$$

Така достигаме до окончателното решение на модела

$$N(t) = \frac{M - a\dfrac{M - N_0}{a + bN_0}e^{-(a+bM)t}}{1 + b\dfrac{M - N_0}{a + bN_0}e^{-(a+bM)t}}$$

или

$$N(t) = \frac{M(a + bN_0) - a(M - N_0)e^{-(a+bM)t}}{(a + bN_0) + b(M - N_0)e^{-(a+bM)t}}$$

И наистина, при $b = 0$ получаваме

$$N(t) = M - (M - N_0)e^{-at}$$

което е решението на модела с външно влияние, а при $a = 0$

$$N(t) = \frac{M}{1 + \dfrac{M - N_0}{N_0}e^{-bMt}}$$

решението на модела с вътрешно влияние.

Графиката на функцията $N = N(t)$, показана на рис. 7 се нарича **обобщена логистична линия.**

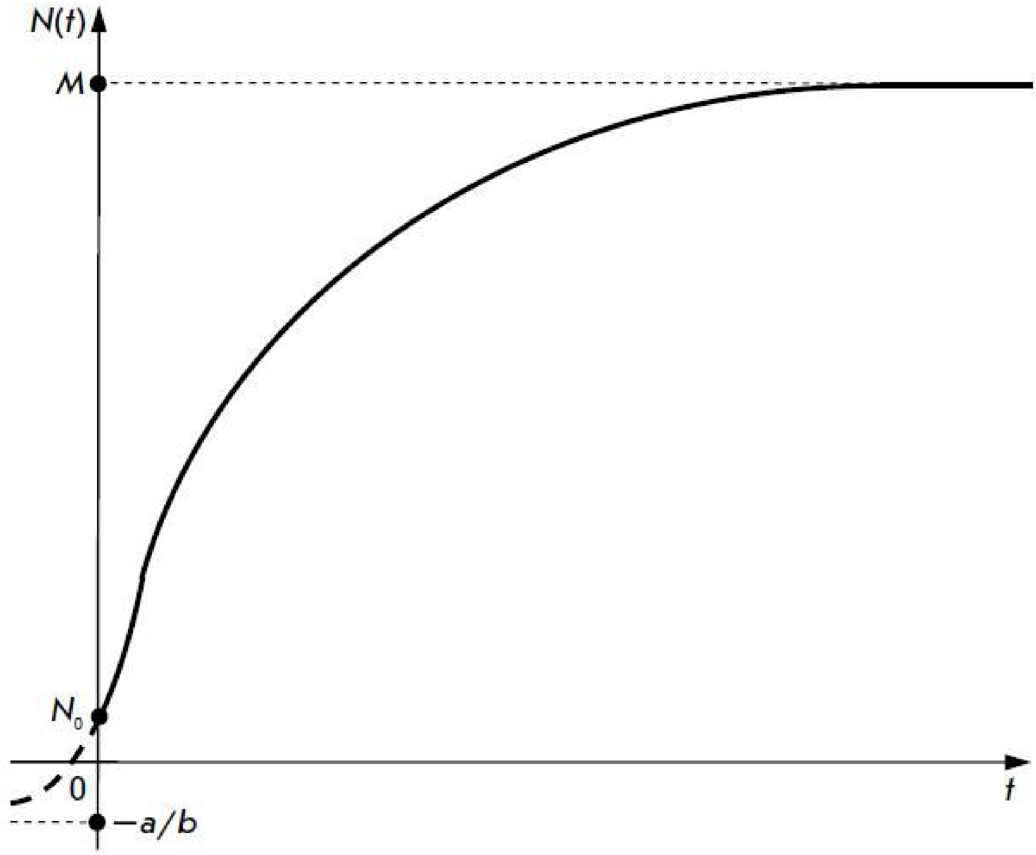

Рис. 7. Ръст на действителния пазар при модел със смесено влияние

3. Скорост на разпространение на иновациите

И при трите предложени модела на разпространение на иновациите $N(t)$ представлява растяща функция, стремяща се към M **(**т.е. към пълно обхващане на потенциалния пазар) при неограничено нарастване на t, или

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = M$$

С други думи, $N = M$ е хоризонтална асимптота за графиката на функцията $N = N(t)$.

Това нарастване на $N(t)$ обаче има различен характер: в някои от случаите то става с нарастване на скоростта, а в други – с намаляване. Очевидно, когато расте скоростта $N''(t) = \left(N'(t)\right)' > 0$ и графиката на функцията е изпъкнала, а при намаляване на скоростта $N''(t) < 0$ и графиката е вдлъбната. В момента от времето $t = t_0$ в който характера на разпространение се променя (т.е. скороста се променя от растяща в намаляваща) ще имаме $N''(t_0) = 0$, което съответства на точка на инфлексия.

За модела с външно влияние ще имаме

$$N' = a(M-N) \Longrightarrow N'' = -aN' = -a^2(M-N) < 0$$

следователно (както се вижда и на рис. 5) графиката на $N(t)$ е вдлъбната през цялото време, т.е. разпространението на иновации само с външно влияние става с намаляваща скорост.

За модела с вътрешно влияние получаваме

$$N' = bN(M-N) = bMN - bN^2$$

Тогава за втората производна ще имаме

$$N'' = bMN' - 2bNN' = bN'(M-2N) = b^2N(M-N)(M-2N)$$

Следователно в началото, за тези стойности на t при които $N(t) < \frac{M}{2}$ разпространението ще става с растяща скорост, в последствие, когато $N(t) > \frac{M}{2}$ скоростта ще е намаляваща, а при $t = t_0$, за което $N(t_0) = \frac{M}{2}$ ще се променя характера на разпространение. Тези разсъждения предполагат, че $N_0 < \frac{M}{2}$.

При модела със смесено влияние

$$N' = (a+bN)(M-N) = aM + (bM-a)N - bN^2$$

За втората производна получаваме

$$\begin{aligned} N'' &= (bM-a)N' - 2bNN' = N'(bM-a-2bN) \\ &= (a+bN)(M-N)(bM-a-2bN) \end{aligned}$$

Това идва да покаже, че ако t е достатъчно малко, че да е изпълнено неравенството $N(t) < \frac{M}{2} - \frac{a}{2b}$ разпространението е с растяща скорост, а при $N(t) > \frac{M}{2} - \frac{a}{2b}$ – с намаляща. При $t = t_0$, за което $N(t_0) = \frac{M}{2} - \frac{a}{2b}$ ще се променя скороста на разпространение. Очевидно трябва за началното условие да е изпълнено $N_0 < \frac{M}{2} - \frac{a}{2b}$. Вижда се, че предният случай може да се разглежда като частен случай на този (при $a = 0$)

Приложение 2. Диференчни уравнения

Уравнение от вида

$$F(y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}) = 0 \quad \text{или} \quad y_{n+k} = f(y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k-1})$$

се нарича диференчно уравнение от ред k. Решение на диференчното уравнение е всяка числова редица $y_0, y_1 y_2, \dots, y_i, \dots$, такава, че които и $k+1$ на брой последователни члена да заместим в уравнението, то се превръща в равенство. Разбира се, за да бъде намерена подобна числова редица, то трябва всеки негов член да зависи само от номера си, т.е. да е налице връзката

$$y_n = \varphi(n)$$

При определени условия диференчното уравнение притежава общо решение, зависещо от k на брой параметъра $C_1, C_2, \dots, C_k$ или

$$y_n = \varphi(n, C_1, C_2, \dots, C_k)$$

За да определим тези патаметри е необходимо да бъдат дадени k на брой начални условия, например да са дадени първите k члена на редицата $y_0, y_1 y_2, \dots, y_{k-1}$. Тогава получаваме точно определено решение. В това се състои задачата на Коши за диференчното уравнение.

Много процеси в природата са свързани с диференчни уравнения. Така например редицата от числата на Фибоначи 1,1,2,3,5,8,13,..., от която всеки член е сума на двата предходни се явява решение на задачата на Коши за диференчното уравнение от втори ред

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$$

като $y_0 = y_1 = 1$.

Пример 1. Като най-прост пример за диференчно уравнение може да се разгледа линейното диференчно уравнение от първи ред с постоянни коефициенти. Неговата задача на Коши изглежда така: да се намери числова редица, удовлетворяваща

$$y_{n+1} = p y_n + q,$$

като първия член y_0 се счита за даден.

Решение. Първо образуваме хомогенното диференчно уравнение

$$\overline{y_{n+1}} = p\overline{y_n}$$

Ще намерим общото решение на това уравнение. Заместваме $\overline{y_n}$ с 1 и $\overline{y_{n+1}}$ с z. Така получаваме характеристичното уравнение

$$z = p$$

с единствен корен $z_1 = p$. Необходимо и достатъчно условие за устойчивост на решението (сходимост на числовата редица, явяваща се решение на уравнението) е $|z_1| < 1$. Тогава за $|p| < 1$ получаваме общото решение на хомогенното диференчно уравнение

$$\overline{y_n} = Cp^n$$

Сега ще ни трябва да намерим едно частно решение на първоначалното нехомогенно уравнение. Търсим го във вида $\nu = \beta = const$. Заместваме в уравнението и получаваме

$$\beta = p\beta + q \Longrightarrow \beta = \frac{q}{1-p}$$

Тогава общото решение на нехомогенното уравнение се получава като сума от общото решение на съответното хомогенно и частното решение на нехомогенното, т.е.

$$y_n = \overline{y_n} + \nu$$

Като заместим ще имаме

$$y_n = Cp^n + \frac{q}{1-p}$$

Това е общото решение на даденото уравнение. Чрез използване на началното условие ще конкретизираме параметъра C. Имаме

$$y_0 = C + \frac{q}{1-p} \Longrightarrow C = y_0 - \frac{q}{1-p}$$

Окончателно ще имаме

$$y_n = \left(y_0 - \frac{q}{1-p}\right)p^n + \frac{q}{1-p}$$

По подобен начин могат да се решават и диференчни уравнения от по-висок ред.

Пример 2. Да се намери в явен вид y_n числовата редица на Фибоначи.

Решение. Това уравнение е хомогенно линейно диференчно уравнение от втори ред с постоянни коефициенти. Съответното характеристично уравнение има вида

$$z^2 = z + 1$$

с корени $z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. И двата корена са по модул по-малки от 1, затова

$$y_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

е общото решение. За определянето на C_1 и C_2 използваме началните условия. Получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} y_0 = 1 = C_1 + C_2 \\ y_1 = 1 = C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2 \end{array} \right.,$$

където сме означили $\varepsilon_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\varepsilon_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Получаваме

$$C_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$$

Окончателно за явния израз, чрез който могат да се пресмятат числата на Фибоначи получаваме

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}$$

4. Квазидинамичен модел на разпространение на иновации

Квазидинамичните модели в икономиката (и не само в нея) се получават, когато се предполага, че времето е дискретно зададено $t = 0,1,2, \ldots$. Наричат се още модели с дискретно време. В случая дискретните стойности на времето могат да означават отделни и последователни дни, седмици, месеци, години и др. Тези модели са много разпространени. Ако стойностите на изучаваната величина в даден период зависят от стойностите в няколко предишни периода (и други параметри) квазидинамичните модели водят до диференчни уравнения.

Тъй като

$$\frac{dN(t)}{dt} \cong \frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = \frac{N(t+1)-N(t)}{(t+1)-t} = N_{t+1} - N_t$$

(оттук нататък ще бележим N_t вместо $N(t)$)

модела на разпространение на иновации със смесено влияние добива следния квазидинамичен вид

$$N_{t+1} - N_t = (a + bN_t)(M - N_t)$$

или

$$N_{t+1} = (1 + bM - a)N_t - bN_t{}^2 + aM$$

За модела с външно влияние ($b = 0$) ще имаме

$$N_{t+1} = (1 - a)N_t + aM,$$

а за модела с вътрешно влияние ($a = 0$)

$$N_{t+1} = (1 + bM)N_t - bN_t{}^2$$

Вижда се, че диференчното уравнение, съответстващо на модела с външно влияние представлява линейно нехомогенно диференчно уравнение от първи ред (както в пример 1 от приложение 2) за $p = 1 - a$ и $q = aM$. Тогава решението му ще има следния явен вид

$$N_t = M - (M - N_0)(1 - a)^t$$

Задачи 1

1. Нека търговска компания реализира някакъв иновативен продукт, за който в момента $t = 0$ от реклама в средствата за масова информация са получили информация 1% от общия брой M на потенциалните потребители. По-нататък тази информация се разпространява чрез общуване на хората помежду си. Известно е, че разпространение на информацията се извършва съобразно модела с вътрешно влияние, като $bM = 0{,}2$. За какво време броя на потребителите, осведомени за продукта ще достигнат до 80% от общия брой M на потенциалните потребители.

2. Числеността на населението $y(t)$ на остров Свети Бенедикт удовлетворява диференциалното уравнение

$$y' = 0{,}05y(1 - 10^{-6}y),$$

където t е времето в години. След колко години населението на острова ще нарастне 10 пъти, ако в момента на острова живеят 10000 души.

3. Известно е, че разпространението на даден иновативен продукт се реализира посредством закона

$$N'(t) = 0{,}4N(t) - 0{,}002N^2(t),$$

като при $t = 0$ са обхванати 10% от потенциалните потребители на продукта. След колко единици време скоростта на нарастване на потребителите от растяща ще стане намаляваща.

4. За процеса на разпространение на иновация със смесено влияние е известно, че:

- при $t = 0$ са обхванати 10% от потенциалните потребители;
- при $t = 4{,}2$ са обхванати 30% от потенциалните потребители и тогава скоростта на нарастване на потребителите от растяща става намаляваща.

Да се намери закона за разпространение на продукта. След колко единици време половината от потенциалните потребители са станали действителни.

5. За квазидинамичен модел на разпространение на иновация е известно, че $M = 100$ и $N_0 = 10$. Да се пресметнат N_1, N_2, N_3 и N_4 ако:

а) модела е с външно влияние, като $a = 0{,}1$;

б) модела е с вътрешно влияние, като $b = 0{,}004$;

в) модела е със смесено влияние, като $a = 0{,}1$ и $b = 0{,}004$.

6. Предполага се, че една иновация се разпространява само чрез външно влияние. Известни са $N_0 = 10$, $N_1 = 20$ и $N_2 = 28$. Да се намерят параметрите на квазидинамичния модел и да се пресметне N_3. Да се намери N_t в явен вид. Какво неравенство трябва да е изпълнено за произволно дадени N_0, N_1 и N_2 за да могат да се определят параметрите на модела.

7. Предполага се, че дадена иновативна стока се разпространява само чрез вътрешно влияние. Известни са $N_0 = 10$, $N_1 = 13{,}5$ и $N_2 = 18$. Да се намерят параметрите на квазидинамичния модел и да се пресметне N_3. Какво неравенство трябва да е изпълнено за произволно дадени N_0, N_1 и N_2 за да могат да се определят параметрите на модела.

Приложение 3. Теория на вероятностите

Теорията на вероятностите е математическа дисциплина, изучаваща закономерностите на масовите случайни явления (събития).

Събитие се нарича всяко явление, което може да се случи или да не се случи при определени условия, които могат да бъдат възпроизведени неограничен брой пъти.

Нека от n опита събитието A се случва m пъти, тогава относителната честота на събитието е $P^*(A) = \frac{m}{n}$. Опитът показва, че при многократно възпроизвеждане на условията честотата на събитието $P^*(A)$ е устойчива. Оказва се, че за всяко събитие съществува число, към което се стреми честотата при неограничен брой повторения на опита. Това число се нарича вероятност и се бележи с $P(A)$.

Едно събитие се нарича достоверно, ако при провеждане на опит, то задължително трябва да се случи и невъзможно – в противен случай. Достоверното събитие ще бележим с I, а невъзможното – с Θ. Очевидно $P(\mathrm{I}) = 1$, а $P(\Theta) = 0$.

Ако събитието A не е нито достоверно, нито невъзможно, то очевидно $0 < P(A) < 1$.

Произведение на събитията A и B (бележи се с $A \cap B$) е събитие, състоящо се в съвместното настъпване на A и B.

Сума на събитията A и B (бележи се с $A \cup B$) е събитие, състоящо се в настъпването на поне едно от A или B.

Събитията A и B се наричат несъвместими, ако $A \cap B$ е невъзможно събитие. Събитието $\bar{A}$ се нарича противоположно на A, ако двете събития са несъвместими, а $A \cup \bar{A}$ е достоверно събитие.

Теорията на събитията и техните вероятности може да се изгради аксиоматично.

Аксиома 1. На всяко събитие A съответства определена вероятност (или вероятностна мярка) $P(A)$, като $0 \leq P(A) \leq 1$.

Аксиома 2. Вероятността на достоверното събитие е 1.

Аксиома 3. Нека A и B са несъвместими събития. Тогава вероятността да се случи поне едно от двете събития е сума от техните вероятности, т.е.

$$A \cap B = \Theta \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

От тези аксиоми може да се получи като следствие, че

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Условна вероятност на събитието A по отношение на събитието B (бележи се с $P(A|B)$ се нарича вероятността от настъпването на A при положение, че B е настъпило. Пресмята се по формулата

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Случайна величина се нарича такава променлива величина ξ, която в резултат от опита заема определена стойност $\{\xi = x\}$ и по този начин генерира елементарно събитие. Примери за случайни величини: броя на падналите се точки при еднократно хвърляне на зарче; броя на пациентите, потърсили бърза помощ за едно денонощие и т.н. Според множеството от стойности, които случайните величини могат да заемат, те се делят на дискретни и непрекъснати.

Ако една дискретна случайна величина ξ може да заема стойности измежду членовете на крайна или безкрайна числова редица $x_1, x_2, \ldots$, тогава $\{\, \xi = x_i\}$ са елементарни събития и сумата от вероятностите им $P\{\, \xi = x_i\}$ трябва да е равна на 1 (защото тези събития са несъвместими по между си).

Разглеждаме функцията $F(x)$, определена по следния начин: за всяко x стойността на $F(x)$ е равна на вероятността случайната величина ξ да приеме заначение по-малко от x, т.е.

$$F(x) = P\{\, \xi < x\}$$

Така определената функция $F(x)$ се нарича функция на разпределение на случайната величина ξ. Ясно е, че функцията на разпределение е монотонно растяща функция и $0 \leq F(x) \leq 1$. Всичко казано за функцията на разпределение важи и за непрекъснатите случайни величини.

Нека да се провежда последователност от независими опити, в резултат от които събитието A може да настъпи или да не настъпи. Ако A е настъпило m пъти от общо n опита, то (както казахме в началото) честотата на събитието A е $\frac{m}{n}$. Законът за големите числа във форма на Бернули гласи, че с вероятност, близка до единица честотата на дадено събитие A може да се различава толкова малко, колкото искаме от вероятността му, стига n да е достатъчно голямо, или

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{m}{n} - P(A)\right| < \varepsilon\right] = 1$$

Още в началото се отбеляза, че честотата $P^*(A) = \frac{m}{n}$ е устойчива при провеждане на много голям брой опити. Това обстоятелство се потвърждава от закона за големите числа в Бернулиева форма.

5. Вероятностна интерпретация на фундаменталния модел на разпространение на иновациите

Активното използване на моделите на разпространение на иновациите започва през 1969 г., когато Ф. Бас публикува работата си „A new product growth for model consumer durables“. В тази статия той предлага процеса на разпространение на новите стоки за дълготрайна употреба да се разглежда като „епидемия“, при което хората, които още не са станали потребители на иновацията се „инфектират“ от действителните потребители и освен това са подложени на външни въздействия, като реклама например. Ф. Бас е използвал предложения от него модел за анализ на процесите на разпространение на различни стоки за дълготрайна употреба (телевизори, магнетофони, хладилници, климатици, кафемашини и др.) и получава голямо съответствие между получените с помощта на модела прогнозни резултати и реалните обеми на продажби. След него стотици изследователи са използвали модела на дифузия на иновациите със смесено влияние и са достигали до резултати, добре съгласувани с реалностите.

Базовата идея на Ф. Бас се състои в това, че скоростта на нарастване на условната вероятност за придобиване от индивида на иновативния продукт в момента $\boldsymbol{t}$ при положение, че в този момент същия индивид не е действителен потребител е линейна функция от броя на действителните потребители към този момент:

$$\frac{dP(A_{t+}|\overline{A_t})}{dt} = p + qP(A_t)$$

В горната формула:

t е времето;

A_t е случайно събитие един произволно взет индивид да е действителен потребител на иновативния продукт в момент t**;**

$\overline{A_t}$ е случайно събитие, противоположно на A_t, т.е. в момент $\boldsymbol{t}$ случайно взетия индивид все още не е действителен потребител на продукта;

A_{t+} е случайно събитие, означаващо, че в момент $\boldsymbol{t}$ произволен потенциален потребител взема решение и придобива продукта;

p – числов параметър измерващ **иновативната готовност на индивида** (т.е. готовността и желанието да придобие продукта без влиянието на другите потребители);

q – числов параметър измерващ **податливостта на индивида към имитация** (т.е. готоваността да придобие продукт под влиянието на хора от неговото обкръжение);

P – вероятностна мярка.

Сега преминаваме към случайната величина X_t – сумарния брой на действителните потребители към момент от времето t. Горната формула се трансформира по следния начин:

$$\frac{1}{1 - F(x)} \frac{dF(x)}{dt} = p + qF(x)\ ,$$

където $F(x)$ е функцията на разпределение на случайната величина X_t, т.е. $F(x) = P(X_t \leq x)$.

Естествено е да считаме, че потенциалният пазар (общия брой на индивидите M) е достатъчно голям ($M \to \infty$). Означаваме с $N(t)$ броя на действителните ползватели на иновацията в момент t – реализацията на случайната величина X_t и получавме (по силата на закона за големите числа във формата на Бернули)

$$F\big(N(t)\big) = \frac{N(t)}{M}$$

Тогава след преобразуване получаваме

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left(p + \frac{q}{M}N(t)\right)\big(M - N(t)\big)$$

Сравнявайки горното диференциално уравнение с диференциалното уравнение на фундаменталния модел на разпространяване на иновациите, виждаме че той се получава като граничен случай на вероятностния модел на Ф. Бас (при $M \to \infty$) като $a = p$, а $b = \lim_{M\to\infty} \frac{q}{M}$.

Задачи 2

1. Грипна епидемия е обхванала 500 хиляди болни на 1 февруари. Предполага се, че 3 милиона са потенциалните хора, които могат да се разболеят, а склонността на индивида към заразяване се оценява на 0,15. Да се пресметне броя на болните на 2,3 и 4 февруари като се използва квазидинамичен модел (приема се, че през това време никой не оздравява или умира).
2. Таблетите (като иновативна стока за дълготрайна употреба) се разпространяват съобразно модела със смесено влияние. Направени са следните оценки: иновативната готовност на индивида е 0,1; податливостта на индивида към имитация – 0,25; потенциалът на пазара – 2,5 милиона потребители. Тази година действителните потребители са 500 хиляди. Кога се очаква да се достигне до положение, при което скоростта на разпространение на таблетите да стане намаляваща.
3. Един иновативен продукт се разпространява с функция на разпространение

$$N(t) = \frac{1{,}8 - 0{,}6e^{-0{,}12t}}{0{,}045 + 0{,}075e^{-0{,}12t}}$$

Да се определят: обема на потенциалния пазар M; обема на началния действителен пазар N_0; иновативната готовност на индивида p; податливостта на индивида към имитация q; момента от времето, в който се сменя характера на разпространение на иновацията.