I. ВЪВЕДЕНИЕ

1. Икономика. Основни елементи на икономиката.

Икономиката е социална наука, изучаваща производството, разпределението и потреблението на стоки и услуги. Икономическата действителност е обект на икономическата наука. Централна тема на икономиката е как трябва да се използват обраничените ресурси за задоволяване на неограничените потребности на населението, т.е. икономиката трябва да даде отговор на основните въпроси:

- **Какво трябва да се произведе?** (т.е. какви стоки и услуги и в какви количества);
- **Как трябва да се произведе?** (т.е. с какви и колко ресурси и по какви технологии);
- **За кого е предназначено произведеното?** (т.е. кой и колко да потребява произведените стоки и услуги).

Основни елементи на икономиката са:

- икономическите **стоки** – всичко, което подлежи на **сделка** между участниците в икономиката;
- **участници в иконимиката** – двете страни в една сделка: **купувач** и **продавач**;
- **пари** – основен вид стока, еквивалент на всички останали стоки;
- **цена** – паричен еквивалент на единица количество от дадена стока.

Основни участници в икономиката са:

- **Отделният индивид** – от една страна той се явяват потребител на произведените стоки и услуги, а от друга – собственик на ресурси (труд, земя и др.). Продавайки ресурсите си, той получава доход, а също така участва в разпределението на печалбата на фирмите.
- **Фирмата** – от една страна тя е производител на стоки и услуги, а от друга – потребител на ресурси. Фирмата получава доход от продажбата на стоки и услуги и е собственик на производствените мощности.
- **Държавата** изпълнява важни законодателни, управленски и регулиращи функции. Тя е продавач (на държавни предприятия, природни ресурси, ценни книжа и др.) и купувач (на ресурси и крайни продукти).

Така, всички участници в икономиката се явяват едновременно купувачи (търсещи) и продавачи (предлагащи). Взаимодействайки по между си

продавачите и купувачите създават **пазар**. Основни пазарни понятия са: **търсене**, **предлагане, конкуренция, цени.**

Пазарите могат да се класифицират по много признаци. Най-разпространената класификация е според това, какво се търгува на тях:

1) **Потребителски пазар** на стоки и услуги (пазар на блага);

2) Пазар на факторите на производство (**ресурсен пазар**). Той включва: пазар на труд, пазар на капитали (инвестиционни стоки) – суровини, машини, оборудване и пазар на земя и недвижими имоти;

3) **Паричен пазар**. Включва – кредитен, валутен пазар и пазар на ценни книжа.

Друга класификация на пазарите е според броя на участниците в тях.

- един продавач и един купувач – сделка;
- много продавачи и много купувачи – **съвършенна конкуренция**;
- един продавач и много купувачи – **монопол**;
- много продавчи и един купувач – **монопсония**;
- няколко продавачи – **олигопол**;
- няколко купувачи – **олигопсония**.

За всеки от тези пазари съществува математическа теория.

Съвкупността от пазарите образува пазарна система. В основата и са пазарните сили – търсенето на купувачите, предлагането на продавачите и конкуренцията. Под тяхно влияние се разпределят благата и ресурсите и спонтанно се координират действията на икономическите агенти, т.е. установява се определен икономически ред.

Икономическата наука се подразделя по два основни признака

- според степента на общност – **теоретична икономика**, изучаваща процесите на пазарен обмен и избора на начини за използване на ограничените ресурси и **приложна икономика**, изучаваща прилагането на теоретичната икономика при функционирането на отделните елементи на икономическата система;
- според мащаба на изследванията – **микроикономика**, изучаваща поведението на отделните икономически агенти на пазарите и **макроикономика**, изучаваща националното стопанство като цяло.

2. Математически модели в икономиката.

Модел – обект, заместващ оригинала, отразяващ най-важните за даденото изследване черти и свойства на оригинала. Моделите се делят на **вербални** (описателни) и **математически**.

Математически модел на даден обект или явление се нарича неговата опростена, идеализирана схема, съставена с помощта на математически символи, операции и съотношения. До математически модели се прибягва поради сериозните недостатъци на вербалните:

- сложност при описание на едновременното действие на голямо количество връзки;
- нееднозначност при разбирането на първичните термини от различните изследователи и оттам затруднения при разбирането и прилагането на модела.

Математическите модели имат редица предимства:

- точност – от точно формулираните изходни данни и съотношения могат да се правят изводи, адекватни на изучавания обект и сравними с реалните данни;
- абстрактност – използването на символен език дава възможност да се опишат формално най-важните връзки между икономическите величини и обекти;
- еднозначност – съотношенията се извеждат от модела и не е необходимо повторение на емпиричните изследвания;
- компактност – чрез езика на математиката икономическата теория може да се излага по-сбито.

Освен това построяването на математически модел позволява използването на компютър за провеждане на числен анализ. Чрез използването на математически апарат се получават и нови знания за икономическите обекти на модела, адекватни на икономическата действителност в същата степен, както модела.

Но математическите модели имат и редица недостатъци;

- трудно се възприемат от нематематиците;
- може силно да се изопачи реалното явление, ако моделът не е достатъчно адекватен.

Тези недостатъци се преодоляват чрез обезпечаване на адекватност на математическия модел спрямо реалните процеси и използването на „разумно сложен“ математически апарат.

Важно е да се отбележи, че математическите модели се използват не само за количествена характеристика на разглежданите процеси, но и за получаване на качествени оценки, позволяващи да се видят тенденциите и съответните възможности за корекции, прогнозиране и управление на тези процеси.

Икономистите предявяват редица изисквания към математицическите модели;

- адекватност – съответствие на модела на неговия оригинал;
- обективност – съответствие между научните изводи и реалните условия;
- простота – второстепенните фактори да не засенчват модела;
- чувствителност – способността на модела да реагира на изменение на началните данни;
- универсалност – широка област на приложение на модела.

3. Класификация на математическите модели в икономиката.

Формалната класификация е според икономическата система, към която те се отнасят или според използваните математически методи. Най използвана форма за класификация е тази на дихотомията (разделяне на цялото на два класа, които се изключват взаимно):

микроикономически или макроикономически модели

теоретични или приложни модели

детерминирани или стохастични кодели

статични или динамични модели

линейни или нелинейни модели

дискретни или непрекъснати модели

Микроикономическите модели описват поведението на отделните икономически единици – потребители и производители, тяхното взаимодействие на пазарите на блага и ресурси, основните фактори на производство и потребление и общите закономерности при формирането на цените на стоките и услугите.

Макроикономическите модели описват икономиката като едно цяло, свързващо окрупнени материални и финансови величини: брутен вътрешен продукт, съвкупно потребление, съвкупно търсене, инвестиции, спестявания, трудова заетост, ръст на икономиката, инфлация, количество на парите и др.

Теоретичните модели изучават общите свойства на икономиката и нейните елементи посредством дедуктивни изводи от формални предпоставки.

Приложните модели дават възможност да се оценят параметрите на функциониране на конкретни икономически обекти и да се формулират препоръки за предприемане на конкретни икономически решения.

Детерминираните модели предполагат точна връзка между икономическите величини в модела.

Стохастичните модели допускат наличие на случайни въздействия върху изследваните икономически величини и използват методите на теория на вероятностите и математическа статистика.

Статичните модели описват състоянието на икономическа система в даден момент или кратък период от време.

Динамичните модели отчитат състоянието на икономическата система във времето. При статическите модели се фиксират значения на величини, явяващи се променлии в динамичните. Динамичните модели не са просто натрупване на статични, а описват сили и взаимодействия в икономиката, определящи хода на процесите в нея.

Освен това има **равновесни и оптимизационни математически модели** в икономиката.

В настоящия курс ще се разглеждат главно равновесни непрекъснати нелинейни детерминирани статични теоретични микроикономически математически модели, част от които са оптимизационни.

4. Елементи на математическите модели в икономиката:

- **обекти на модела** – участници в икономиката, чието поведение се описва от модела. Например – индивидуален потребител или всички потребители за даден пазар;
- **индекси** – използват се за унифициране на означенията в модела. С индекси могат да се номерират икономически обекти, видове ресурси, стоки, цени и др.;
- **ендогенни икономически величини** – величините, чиито стойности се определят от модела;
- **екзогенни икономически величини** – величините, чиито стойности са определени вън от (до) модела. В модела те се приемат за дадени;
- **параметри** – влияят на съществуването и на конкретния вид на решението на модела. В дългосрочен план те могат да се превърнат в екзогенни величини;

- **уравнения на модела** – съотношения, описващи поведението на обектите на модела и връзката между икономическите величини;
- **неравенства на модела** – съотношения, определящи допустимото множество от стойности на икономическите величини;
- **целева функция за обектите на модела** – само при оптимизационните модели.
- **решение на модела** – явна или неявна функция на ендогенните величини от екзогенните, т.е. при задаване на допустим набор от екзогенни величини какви са значенията на ендогенните;
- **сравнителна статика** – изследва реакцията на ендогенните величини при изменението на една или няколко екзогенни.

Икономическите величини, участващи в моделите обикновенно заемат неотрицателни стойности, а икономическите функции имат характерни аналитични свойства – непрекъснатост, монотонност, диференцируемост, изпъкналост и др.

5. Равновесни математически модели в икономиката.

Същността на икономическите системи на локално и глобално ниво е в тяхното равновесно състояние, т.е. във взаимното уравновесяване на пазарни сили, породени независимо една от друга. Това води до равновесие, стабилност и предвидимост на икономиката като цяло. Поради това най-важните математически модели в икономиката са равновесните. Те се делят на:

1) Равновесни алгебрични модели. Пример. Нека икономическата величина x е функция на ендогенната величина p и на екзогенната u, а y – функция на p и на друга екзогенна величина v. Предполага се, че тези функционални зависимости се формират независимо една от друга и че при определени условия за екзогенните u и v може да има равенство на x и y

$$x(p,u) = y(p,v)$$

Тогава имаме налице един равновесен модел. От него се получават две равновесни стойности

$$p_E : x(p_E,u) = y(p_E,v) \text{ и } q_E = x(p_E,u) = y(p_E,v)$$

Разбира се, за различните допустими комбинации на екзогенните u и v p_E и q_E ще бъдат различни, така че

$$p_E = p_E(u,v) \text{ и } q_E = q_E(u,v)$$

Нека сега да означаваме p_E просто с p, а q_E с q. Тогава равновесния модел може да бъде записан така

$$q = x(p, u) = y(p, v)$$

където p и q са равновесните величини. Сравнителна статика по екзогенната величина u е изучаване на реакцията на равновесните величини p и q при изменението на u. Ако диференцираме горното равенство по u и държим сметка за това, че p и q са функции на u (но и на v) ще получим

$$q_u = x_p p_u + x_u = y_p p_u$$

където с q_u и p_u сме означили частните производни $\frac{\partial q}{\partial u}$ и $\frac{\partial p}{\partial u}$, а с x_p и y_p - $\frac{\partial x}{\partial p}$ и $\frac{\partial y}{\partial p}$ съответно. Тогава получаваме

$$p_u = \frac{x_u}{y_p - x_p} \text{ и } q_u = \frac{y_p x_u}{y_p - x_p}$$

Горните уравнения се наричат уравнения на реакцията и показват как реагират ендогенните величини p и q при изменението (увеличаване или намаляване) на екзогенната величина u. Смисълът е в това, че обикновенно икономическите величини са монотонни функции от други икономически величини.

2) Равновесни диференциални модели – получават се когато в уравнението на модела участва производна на поне една икономическа функция.

3) Равновесни оптимизационни модели без ограничения. Пример

$$z = z(x_1, x_2; u_1, u_2) \to max(min)$$

Предполага се, че x_1, x_2 са ендогенни, а u_1, u_2 – екзогенни. При дадени u_1, u_2 трябва да се намерят такива x_1, x_2, които да максимизират (минимизират) целевата икономическа функция z. При определени условия, например вдлъбнатост (изпъкналост) на функцията $z = z(x_1, x_2; u_1, u_2)$ относно x_1, x_2 такъв глобален максимум (минимум) съществува. Така се определят равновесните стойности x_1^* и x_2^*. При изменението на екзогенните u_1, u_2, те също ще се променят, т.е. ще имаме

$$x_1^* = x_1^*(u_1, u_2) \text{ и } x_2^* = x_2^*(u_1, u_2) \qquad (1)$$

Аналогично на 1) и тук може да се направи сравнителна статика по u_1 и по u_2.

4) Равновесни оптимизационни модели с ограничения. Пример

$$z = z(x_1, x_2) \to max(min)$$

като

$$(x_1, x_2) \in D(u_1, u_2)$$

т.е. търсят се x_1, x_2 които да максимизират (минимизират) целевата икономическа функция z при положение, че за тях е наложено ограничение (условие). Това ограничение може да е от тип равенства, тип неравенства или от смесен тип (равенства и неравенства). Естествено, както в 3) u_1, u_2 са зададени екзогенни величини. Допускаме, че при определени условия такъв условен максимум (минимум) съществува и е единствен. Този условен екстремум ще определи равновесните стойности x_1^* и x_2^*, които ще се променят при изменението на u_1, u_2, т.е. отново ще е в сила функционалната зависимост (1).

6. Икономико-математически модели

Най-добрият начин за изучаването на икономическите обекти и явления са икономико-математическите модели. Формализацията на основните особенности на функциониране на икономическите обекти позволява да се оценят възможните последствия от въздействието върху тях на редица икономически фактори и да се използват тези оценки в управлението. Икономико-математическите модели се построяват по следния начин:

1) Постановка на проблема. Избират се обекти и цели на изследването, определят се основните елементи на модела и най-важните им качествени характеристики. Описват се връзките между елементите на модела.

2) Формализиране на модела. Модела се „превежда“ на математически език – въвеждат се символни означения на елементите на модела и избраните връзки се записват в математически вид.

3) Математически анализ на модела. С помощта на подходящ математически апарат се намира решението на модела и се извеждат основните количествени и качествени характеристики на това решение.

4) Числен анализ на модела. Изработва се програма за компютърно изчисляване на изходните данни на модела и се апробира тази програма с голям брой допустими комбинации от входни данни.

5) Икономически анализ на резултатите от модела. Взема се решение дали резултатите на модела съответстват в достатъчна степен на реалните икономически процеси и (като следствие) възможността им да бъдат приложени в икономическата практика. Ако се прецени, че проблемът, поставен в 1) не е решен в задоволителна степен, моделът се преформулира или доработва, т.е. връщаме се към 1).

7. Математическа иконимика.

Математическата икономика е на границата между икономиката и математиката. Силни са връзките и с **иконометрията**, занимаваща се със статистическа оценка и анализ на икономически зависимости и модели на базата на емпирични данни.

В математическата икономика се изследват теоретични модели – микро- и макроикономически, основани на формални предпоставки (линейност, монотонност, хомогенност, изпъкналост и др.). Тя не се занимава с обосноваването на тези предпоставки (например, че потреблението е линейна растеща функция на дохода) – това се прави от иконометрията. Задачата на математическата икономика е в изучаването на въпроса за съществуването на решение на съответния модел, условията за неговата неотрицателност, стационарност, наличие на други свойства. Това се осъществява (както в математиката) по пътя на получаване на следствия (теореми) от априорни предпоставки (аксиоми).

Математическата икономика използва апарата на **линейна алгебра, аналитична геометрия, математически анализ, диференциални уравнения и математическо оптимиране** (линейно, нелинейно, целочислено и динамично оптимиране).

Математическата икономика, иконометрията, математическото оптимиране и **изследване на операциите** (теория на игрите, теория на графите, теория на масовото обслужване, тория на запасите и др.) са част от **математическите методи в икономиката.**

8. Въведение в микроикономиката

Микроикономиката е наука, изучаваща поведението на отделните икономически единици (потребители и производители), тяхното взаимодействие на пазарите, факторите на потребление и производство и общите закономерности на ценообразуване на произведените стоки и услуги.

Основни фактори на ценообразуването и тяхната взаимна връзка. Микроикономиката изучава два вида пазари:

- Потребителски пазар на стоки и услуги
- Пазар на факторите на производство

Основните ценообразуващи фактори на пазара на потребителски стоки и услуги са:

- **Предлагане** или обем от потребителски стоки, които при дадена цена може да предложи производителя, в зависимост от разходите, възстановяването на които е необходимо условие за продължаване на производството;
- **Разходите на производителя** се определят от производствената технология и от цените на факторите на производство;
- **Производствената технология** се определя от количеството и качеството на наличните фактори на производство;
- **Търсенето на потребителски стоки** е съвкупността от планове на потребителите да използват средствата си за максимално удовлетворяване на своите потребности;
- **Потребителският план** зависи от полезността на стоките (приносът им за удовлетворяване на потребностите на потребителя) и от бюджета на потребителя;
- **Полезността** е субективна потребност на потребителя от дадена стока (цигарите са полезни за пушача);
- **Бюджета** на потребителя се определя от текущия му доход, от спестяванията (непотребената част от предишните му доходи) и заемите (сега потребяваната част от бъдещите му доходи)

Освен това ценообразуваща роля имат и данъчната политика на държавата, обменния курс на националната валута, сезонните условия, политическата стабилност и др.

Макар и толкова много, ценообразуващите фактори въздействат върху цената чрез влиянието си върху търсенето на потребителите или върху предлагането на производителите.

Освен изброените по-горе връзки от ценообразуващите фактори към цената, съществуват обратни връзки – от цената към ценообразуващите фактори. И наистина, не само потребителските планове определят цената, но и цената се отчита при съставянето им. Аналогично стои въпросът с технологията – въздействайки чрез разходите и обема на предлагане върху цената, тя също зависи от цената на произведената продукция.

Всичко казано по-горе важи за пазара на потребителски стоки и услуги, където производителите предлагат, а потребителите търсят. Намеси ли се и другия пазар – ресурсния, картината се усложнява още повече. Така например, потребителския доход – ценообразуващ фактор на пазара на блага се превръща в цена на една от основните стоки на ресурсния пазар – работната сила. На пазара на работна сила предишните предлагащи са вече търсещи и обратно.

Принцип на рационалност в микроикономиката.

Прионципа на рационалност е априорно твърдение и основна предпоставка за изграждането на голяма част от класическите и съвременни микроикономически теории. Изразява се в следното: всеки участник в икономиката действа на принципа:

максимум резултат при наличните средства или **минимум разходи за постигане на определен резултат**

Това обяснява широкото приложение на оптимизационни модели в микроикономическото моделиране. От горната формулировка се вижда, че:

- Горните предположения предпоставят математическо моделиране, използващо условен екстремум на функция на много променливи и
- В термините на математическото оптимиране горните предположения ще се моделират с две задачи, двойствени една на друга.

Ако сведем този принцип до основните обекти на микроикономиката – потребители и производители можем да получим техните задачи

- **Задачи на потребителя:** максимизиране на полезността при ограничение в разходите или минимизиране на разходите за постигане на определена полезност;
- **Задачи на производителя:** Максимизиране на обема продукция при ограничение в разходите или минимизиране на разходите за производството на определен обем продукция.

9. Икономически величини и функции

Всички икономически показатели могат да бъдат разделени (с известна условност) на **абсолютни и относителни**. Абсолютните величини се измерват в количествени или парични единици. Относителните величини са съотношения между абсолютни (или други относителни) величини и показват колко единици от едната величина се падат на единица от другата.

Абсолютните икономически величини са неотрицателни, т.е. стойностите им са от $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$.

Сумарна икономическа величина може да бъде всяка монотонна функция, заемаща неотрицателни стойности при неотрицателност на аргумента. Примери: количеството на търсене на една стока като функция на цената и $x = x(p)$; разходите на фирмата като функция на количеството произведена продукция $c = c(q)$; количеството произведена продукция като функция на количеството

труд, вложен за производството и $q = q(L)$ и т.н. Защо тези величини се наричат сумарни? Да разгледаме като пример разходите на фирмата като функция на количеството произведена продукция $c = c(q)$. Тя очевидно е растяща функция на аргумента си и стойността и за определено количество $q = q_0$ $c_0 = c(q_0)$ са всъщност разходите, направени за всички $q \leq q_0$, а не само за q_0. Аналогично, ако разгледаме намаляващата сумарна величина - количеството на търсене на една стока като функция на цената и $x = x(p)$, то очевидно стойността и за конкретна цена $p = p_0$ включва търсенето при всички цени $p \geq p_0$. Не всички икономически величини са сумарни. Например, печалбата на фирмата като функция на количеството произведена (и реализирана) продукция $\pi = \pi(q)$ не е сумарна – печалбата при произведено конкретно количество $q = q_0$ не отчита други стойности на аргумента, освен q_0. Затова тя не е монотонна функция.

Трябва да се прави разлика между икономическите и математическите функции, които имат един и същ аналитичен израз. Нека, например

$$y = f(x) = \frac{6 - 3x}{x + 2}$$

Съответната математическа функция е дефинирана за $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$ и заема стойности $y \in (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$. Има две асимптоти – вертикална $x = -2$ и хоризонтална $y = -3$. Тъй като $f' = -\frac{12}{(x+2)^2}$ функцията е намаляваща в дефиниционната си област. От втората производна $f'' = \frac{24}{(x+2)^3}$ получаваме, че функцията е вдлъбната за $x \in (-\infty, -2)$ и изпъкнала за $x \in (-2, +\infty)$.

Икономическата функция, зададена със същия аналитичен израз е дефинирана в интервала $x \in [0,2]$ и заема стойности в интервала $y \in [0,3]$. Тя е намаляваща, изпъкнала функция на аргумента си.

Средната величина $\boldsymbol{Af(x)}$ се определя като съотношение между сумарната величина $f(x)$ и аргумента и x. Буквата A идва от съкращението на Average. Означава се също и с $\bar{f}(x)$. Ясно е, че

$$\bar{f}(x) = Af(x) = \frac{f(x)}{x}$$

Геометрична интерпретация. Нека $O(0,0)$, $A(x,0)$, $B\big(x, f(x)\big)$, $\alpha = \measuredangle BOA$, тогава

$$tg\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{f(x)}{x} = Af(x)$$

т.е. средна величина на сумарна функция е тангенсът от ъгъла, който сключва правата, съединяваща координатното начало и точка от графиката на функцията с абсцисната ос.

Маргиналната величина $\boldsymbol{Mf(x)}$ се определя като производната на сумарната величина $f(x)$ по отношение на аргумента и, т.е.

$$Mf(x) = f'(x)$$

Геометричната интерпретация е известна от курса по математически анализ: маргиналната величина е равна на тангенсът на ълъла, който сключва допирателната към графиката на функцията с абсцисната ос.

Условия за монотонност и глобален екстремум на средната величина. Тъй като е изпълнено

$$\big(Af(x)\big)' = \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = \frac{f'(x) - \frac{f(x)}{x}}{x} = \frac{Mf(x) - Af(x)}{x}$$

получаваме, че

1) При намаляваща сумарна функция $f(x)$ $(Mf(x) = f'(x) < 0 \implies \big(Af(x)\big)' < 0)$ средната величина е също намаляваща.

2) При растяща сумарна величина

$$\text{средната величина расте} \Leftrightarrow Mf(x) > Af(x)$$

$$\text{средната величина намалява} \Leftrightarrow Mf(x) < Af(x)$$

а) ако $f(x)$ е растяща, изпъкнала и $f(0) > 0$ като при $x = x_0$ маргиналната и средната величини са равни, т.е. $x_0 : Mf(x_0) = Af(x_0)$

$$\text{при } x < x_0 \;\; Mf(x) < Af(x) \;\; \text{и } Af(x) \text{ намалява}$$

$$\text{при } x > x_0 \;\; Mf(x) > Af(x) \;\; \text{и } Af(x) \text{ расте}$$

$$\text{при } x = x_0 \; Mf(x_0) = Af(x_0) \text{ и } Af(x) \text{ има глобален минимум}$$

б) ако $f(x)$ е растяща, вдлъбната и $f(a) = 0,\; a > 0$ като при $x = x_0$ маргиналната и средната величини са равни

$$\text{при } x \in (a, x_0) \; Mf(x) > Af(x) \;\; \text{и } Af(x) \text{ расте}$$

$$\text{при } x \in (x_0, \infty) \; Mf(x) < Af(x) \;\; \text{и } Af(x) \text{ намалява}$$

$$\text{при } x = x_0 \; Mf(x_0) = Af(x_0) \text{ и } Af(x) \text{ има глобален максимум}$$

10.Еластичност на икономически функции

Нека за двете икономически величини x и y да е в сила функционалната зависимост $y = f(x)$. Възниква въпросът как да измерим чувствителността на зависимата величина y от изменението на x. В математиката за това служи производната

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

В икономиката това е маргиналната величина $My = Mf(x)$. Но производната не е носител на много информация, защото зависи от избора на единици за измерване на x и на y. Единствено изключение прави случаят, когато $y'(x) = 0$. При $y'(x) \neq 0$ ние на практика ползваме само знака и.

Еластичност се нарича границата на отношението на относителните изменения на y и на x. Нестрого казано, еластичността показва с колко процента се е изменило y при промяната на x с 1%.

$$E\big(y(x)\big) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\%\Delta y}{\%\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}{\frac{y}{x}} = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y} = y'\frac{x}{y} = \frac{y'}{\frac{y}{x}} = \frac{My(x)}{Ay(x)}$$

, т.е. еластичността на една икономическа функция е частното на маргиналната и средната величина. Тъй като

$$dlny = \frac{dy}{y} \text{ и } dlnx = \frac{dx}{x}$$

то еластичността може да се представи и като „логаритмична производна“:

$$E\big(y(x)\big) = \frac{dlny}{dlnx}$$

Геометрична интерпретация на еластичността. Разглеждаме намаляваща изпъкнала функция $y = f(x)$. Да намерим еластичността в произволна точка от графиката и – точка C с координати x и y. За целта прекарваме допирателната AB към графиката на $y = f(x)$ в т. C (A е точката на пресичане на тази допирателна с абсцисната ос, а B – с ординатната). Нека C_1 и C_2 са ортогоналните проекции на C върху координатните оси, т.е. $C_1(x, 0)$ и $C_2(0, y)$. От ΔACC_1

$$AC_1 = \frac{CC_1}{tg\alpha}$$

Тъй като производната на $y = f(x)$ в т. C е равна на $tg(180° - \alpha)$, то $tg\alpha = -f'(x)$. Следователно

$$AC_1 = \frac{f(x)}{-f'(x)} = -\frac{f(x)}{f'(x)}$$

От подобието на ΔCBC_2 и ΔACC_1 получаваме

$$\frac{CB}{CA} = \frac{CC_2}{AC_1} = \frac{OC_1}{AC_1} = -\frac{f'(x)x}{f(x)} = -E\big(y(x)\big)$$

или окончателно

$$E\big(y(x)\big) = -\frac{CB}{CA} = -\frac{BC}{AC} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AC}} = (BAC)$$

Същият резултат се получава и за другите три случая – намаляваща вдлъбната, растяща изпъкнала и растяща вдлъбната функция. Така получаваме, че еластичността е простото отношение по допирателната на пресечните и точки с ординатата, с абсцисата и точката от графиката на функцията (в този ред).

Математически свойства на еластичността

1) Еластичността е безразмерна величина, т.е. значението и не зависи от единиците на измерване на y и x

$$\boldsymbol{E\big(by(ax)\big) = E\big(y(x)\big)}$$

$$E\big(by(ax)\big) = \frac{dby}{dax}\frac{ax}{by} = \frac{b(dy)}{a(dx)}\frac{ax}{by} = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y} = E\big(y(x)\big)$$

2) Еластичностите на взаимно обратни функции са взаимно обратни

$$\boldsymbol{E\big(x(y)\big) = \frac{1}{E\big(y(x)\big)}}$$

$$E\big(x(y)\big) = \frac{dx}{dy}\frac{y}{x} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}\frac{x}{y}} = \frac{1}{E\big(y(x)\big)}$$

3) Еластичността от сложна функция е произведението на съответните еластичности

$$\boldsymbol{E\Big(z\big(y(x)\big)\Big) = E\big(z(y)\big)E\big(y(x)\big)}$$

$$E\left(z\big(y(x)\big)\right) = \frac{dz}{dx}\frac{x}{z} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{x}{z}\frac{y}{y} = \left(\frac{dz}{dy}\frac{y}{z}\right)\left(\frac{dy}{dx}\frac{x}{y}\right) = E\big(z(y)\big)E\big(y(x)\big)$$

4) Еластичността на произведение на две функции е сума от съответните еластичности.

$$\boldsymbol{E\big(u(x)v(x)\big) = E\big(u(x)\big) + E\big(v(x)\big)}$$

$$E\big(u(x)v(x)\big) = \frac{d\big(u(x)v(x)\big)}{dx}\frac{x}{u(x)v(x)} = \frac{v(x)du(x) + u(x)dv(x)}{dx}\frac{x}{u(x)v(x)}$$
$$= \frac{v(x)\frac{du(x)}{dx} + u(x)\frac{dv(x)}{dx}}{u(x)v(x)}x = \frac{du(x)}{dx}\frac{x}{u(x)} + \frac{dv(x)}{dx}\frac{x}{v(x)}$$
$$= E\big(u(x)\big) + E\big(v(x)\big)$$

5) Еластичността на частно от две функции е разлика от съответните еластичности

$$\boldsymbol{E\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = E\big(u(x)\big) - E\big(v(x)\big)}$$

$$E\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{d\frac{u}{v}}{dx}\frac{x}{\frac{u}{v}} = \frac{vdu - udv}{v^2dx}\frac{xv}{u} = \frac{du}{dx}\frac{x}{u} - \frac{dv}{dx}\frac{x}{v} = E\big(u(x)\big) - E\big(v(x)\big)$$

6) Еластичността на сума (разлика) на две функции се пресмята по формулата

$$\boldsymbol{E\big(u(x) \pm v(x)\big) = \frac{uE\big(u(x)\big) \pm vE\big(v(x)\big)}{u \pm v}}$$

$$E(u \pm v) = \frac{d(u \pm v)}{dx}\frac{x}{u \pm v} = \left(\frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}\right)\frac{x}{u \pm v} = \left(\frac{du}{dx}\frac{x}{u}u \pm \frac{dv}{dx}\frac{x}{v}v\right)\frac{1}{u \pm v}$$
$$= \frac{uE\big(u(x)\big) \pm vE\big(v(x)\big)}{u \pm v}$$

Таблица на еластичностите на основните елементарни функции	
$E(a) = 0$	$E(a^x) = x\ln a$
$E(ax+b) = \frac{ax}{ax+b}$	$E(e^x) = x$
$E\left(\frac{ax+b}{x+c}\right) = \frac{(ac-b)x}{(x+c)(ax+b)}$	$E(\log_a x) = \frac{1}{\ln x}$
$E(x^\alpha) = \alpha$	$E(\ln x) = \frac{1}{\ln x}$

Забележка. Тригонометричните функции отсъстват от тази таблица, защото не се използват в микроикономическото моделиране.

Възстановяване на функция по дадена еластичност. Нека $y = f(x)$ е неизвестна функция на икономическата величина x, но е известна еластичността и по x, т.е. дадена е $g(x) = E\big(y(x)\big)$. Ще имаме

$$\frac{dy}{dx}\frac{x}{y} = g(x)$$

Умножавайки двете страни на горното равенство с $\frac{dx}{x}$ получаваме

$$\frac{dy}{y} = \frac{g(x)}{x}dx$$

Горното равенство интегрираме

$$\ln y = \int \frac{g(x)}{x}dx + \ln c$$

Окончателно

$$y = ce^{\int \frac{g(x)}{x}dx}$$

Еластичност на дискретно зададена икономическа функция. Нека x и y са икономически величини. В случай, че не е известна функционална зависимост, зададена чрез аналитичен израз $y = f(x)$, но се подозира (от икономически съображения) функционална връзка между тях, може да се измерят стойности на x:$x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ и съответните им стойности на y: $y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n$. Тогава можем да определим средните стойности

$$Ay_k = \frac{y_k}{x_k}; k = 1,2, \dots, n$$

маргиналните стойности

$$My_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}; k = 1,2, \dots, n-1$$

и еластичностите

$$Ey_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}\frac{x_k}{y_k}; k = 1,2, \dots, n-1$$

11. Икономически функции на много променливи

В микроикономическите анализи често се срещат икономически величини, които зависят от много други икономически величини. Тогава $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, където $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$. В $\mathbb{R}_+^n$ въвеждаме нестрога наредба по следния начин

$$x(x_1, \dots, x_n) \leq y(y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_1 \leq y_1, \dots, x_n \leq y_n$$

т.е. един вектор ще считаме, че е по-малък от друг, ако всичките му координати са по-малки от съответните координати на другия.

Една икономическа величина ще наричаме сумарна, ако тя е монотонна функция на всички икономически величини от които зависи. Например, за функция на две икономичесли променливи $z = f(x, y)$ – ще считме, че е растяща, ако

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \Longrightarrow f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$$

и намаляваща, ако

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \Longrightarrow f(x_1, y_1) > f(x_2, y_2)$$

При сумарните функции стойността $z_0 = f(x_0, y_0)$ се получава като са отчетени всички $x \in (0, x_0)$ и всички $y \in (0, y_0)$. Така, например разходите на фирмата зависят от две икономически величини – количествата вложен труд L и капитал K. Ако u и v са цените за единица труд и капитал, то ще имаме $c = c(L, K) = uL + vK$. Ясно е че стойността $c_0 = c(L_0, K_0)$ се е получила с натрупване – труда е изразходван от 0 до L_0, а капитала - от 0 до K_0.

При икономическа величина, зависеща функционално от две променливи ще има две средни величини

$$A_x f = \frac{f}{x} \text{ и } A_y f = \frac{f}{y}$$

две маргинални

$$M_x f = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ и } M_y f = f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

и две еластичности

$$E_x f = f_x \frac{x}{f} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{x}{f} \text{ и } E_y f = f_y \frac{y}{f} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{y}{f}$$