ТЕМА 5. МАТЕМАТИЧЕСКА ТЕОРИЯ НА ФИРМАТА – ПРОИЗВОДСТВЕНА ФУНКЦИЯ (продължение)

ТЕОРИЯ

1. Задача за максимализиране на печалбата с ограничени ресурси. Задачата за абсолютен максимум на печалбата предполага неограниченост на ресурсите. Това значи, че абсолютния максимум (с ресурсите, които изисква) е достъпен за фирмата. Задачата за максимализиране на печалбата с ограничени ресурси предполага някакво ограничение на количествата капитал K и труд L, които фирмата може да мобилизира.

Най-разпространена задача за максимализиране на печалбата с ограничени ресурси е тази, при която фирмата е ограничена в разходите, които може да направи. Тя изглежда така

$$\Pi(K, L) \to max, \text{ако } uK + vL \leq c = const.$$

Един подход за решаването на тази задача се състои в следното. Разглеждаме разходите c като променлива ($c \in (0, \infty)$). Условието за оптимално съотношение на ресурсите

$$S_L = \frac{F_K}{F_L} = \frac{u}{v}$$

заедно с $uK + vL = c$ ни позволява да изразим K и L като функции на c (с u и v параметри). След това заместваме в ПФ и намираме $q = q(c)$, а оттам и $\Pi = \Pi(c)$. Това е връзката между печалбата Π и разходите за нейното постигане c при предположение за екзогенност на цените u, v и p и при оптимално разпределение на ресурсите. В случай, че ПФ предполага наличието на абсолютен максимум на печалбата, тази функция $\Pi = \Pi(c)$, разглеждана като функция на една променлива също ще има максимум (който е същият). В противен случай тя ще е растяща функция на c за всички стойности на c. В първият случай, ако абсолютният максимум се достига преди достигането на възможните за фирмата разходи, то това ще бъде решението и част от разходите могат да бъдат спестени. Ако абсолютни максимум е след тази граница, то решението е на границата. В случая на неограничено нарастване на печалбата, решението е на границата – фирмата трябва да извърши всички разходи, които може да си позволи, но при оптимално съотношение на ресурсите.

Друг вид задача за максимализиране на печалбата с ограничени ресурси е задачата, при която фирмата е ограничена в количествата на един или на двата ресурса. Ако ПФ допуска абсолютен максимум на печалбата, решението може да не

е на границата на достъпната област от ресурси. В противен случай, решението предполага пълното изразходване на поне един от ресурсите.

2. Полипродуктна фирма. Нека една фирма произвежда повече от една стока, например две. Ако $q_1 = F_1(K_1, L_1)$ е производствената функция за първата стока с пазарна цена p_1, а технологията на производство на втората стока с цена p_2 се задава с производствената функция $q_2 = F_2(K_2, L_2)$, като цените на ресурсите са u за капитала и v за труда, то задачата за максимализиране на печалбата се задава така

$$p_1 F_1(K_1, L_1) + p_2 F_2(K_2, L_2) - \big(u(K_1 + K_2) + v(L_1 + L_2)\big) \to max.$$

Решението на тази задача се намира от равенствата

$$p_1 \frac{\partial F_1}{\partial K_1} = p_2 \frac{\partial F_2}{\partial K_2} = u \quad \text{и} \quad p_1 \frac{\partial F_1}{\partial L_1} = p_2 \frac{\partial F_2}{\partial L_2} = v.$$

3. Монопол, максимализиращ нормата на печалба. Цената (и количеството) при монополизиран пазар зависи от целите, които си поставя монопола. Типични алтернативни цели на монопола са следните три: максимализиране на оборота, максимализиране на печалбата и максимализиране на нормата на печалба. Под норма на печалба ще разбираме съотношението на печалба към вложения в производството капитал, т.е. $\frac{\Pi}{K}$. нека да сме успели да изразим двете величини чрез количеството q: $\Pi = \Pi(q)$ и $K = K(q)$. За да определим, при какъв обем продукция средната норма на печалба достига своя максимум, приравняваме първата ѝ производна на нула:

$$\left[\frac{\Pi(q)}{K(q)}\right]' = \frac{\Pi'(q)K(q) - \Pi(q)K'(q)}{K^2(q)} = 0 \Leftrightarrow \frac{\Pi'(q)}{K'(q)} = \frac{\Pi(q)}{K(q)}.$$

Но $\frac{\Pi'(q)}{K'(q)} = \frac{\frac{d\Pi}{dq}}{\frac{dK}{dq}} = \frac{d\Pi}{dK}$, следователно условието е

$$\frac{d\Pi}{dK} = \frac{\Pi}{K}.$$

По такъв начин, средната норма на печалба е максимална, когато се изравни с маргиналната норма на печалба.

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ

Задача 1. Фирма произвежда един продукт като влага човешки труд и техника в количества L и K – часове човешки труд и часове машинно време съответно при

цени 2,5 лв. за един час човешки труд и 6,5 лв. за един час машинно време. Производствената функция е $q = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}L^{\frac{1}{2}} + K^{\frac{1}{2}}\right)^2$. Изразходвани са 36 часа човешки труд за производството на 32 единици продукция.

(а) Колко часа машинно време са изразходвани?;

(б) организирана ли е работата на фирмата по оптимален начин и ако не е, какво е оптималното съотношение между часовете човешки труд и машинно време?;

(в) с какви количества човешки труд и машинно време трябва да се произведат 64 единици продукция?

Решение:

(а) За да намерим часовете машинно време, трябва да решим уравнението

$$32 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot 36^{\frac{1}{2}} + K^{\frac{1}{2}}\right)^2.$$

Получава се $K = 25$.

(б) За да проверим дали работата на фирмата е организирана по оптимален начин, трябва да видим дали при $K = 25$ и $L = 36$ е изпълнено съотношението

$$\frac{q_K}{q_L} = \frac{u}{v} = \frac{6{,}5}{2{,}5} = \frac{13}{5}.$$

Получаваме

$$\frac{q_K}{q_L} = \frac{\left(\frac{1}{2}L^{\frac{1}{2}} + K^{\frac{1}{2}}\right)}{2K^{\frac{1}{2}}} \frac{4L^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}L^{\frac{1}{2}} + K^{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{2L^{\frac{1}{2}}}{K^{\frac{1}{2}}} = \frac{2 \cdot 36^{\frac{1}{2}}}{25^{\frac{1}{2}}} = \frac{12}{5} \neq \frac{13}{5}.$$

Това показва, че фирмата не разпределя ресурсите си по оптимален начин.

(в) Тъй като условието за оптималност е

$$\frac{2L^{\frac{1}{2}}}{K^{\frac{1}{2}}} = \frac{13}{5} \Rightarrow K = \left(\frac{10}{13}\right)^2 L.$$

Като заместим K в ПФ, получаваме уравнение за L:

$$32 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}L^{\frac{1}{2}} + \left(\left(\frac{10}{13}\right)^2 L\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \Rightarrow L = 64\left(\frac{26}{33}\right)^2 \cong 39{,}7 \text{ и } K = 64\left(\frac{20}{33}\right)^2 \cong 23{,}5.$$

Задача 2. За дадена фирма се предполага, че произвежда продукцията си, използвайки технология, зададена чрез мултипликативна производствена функция. Известно е, че основните производствени фондове на фирмата са $K = 100$ млн. лв., във фирмата са ангажирани $L = 1000$ души персонал, като производителността на труда на едно заето лице е 10000 лв. на месец. За да се увеличи продукцията с 3% е необходимо основните производствени фондове да се увеличат с 6% или персонала да се увеличи с 9%.

(а) Да се намери производствената функция на фирмата;

(б) ако средната месечна работна заплата е 1000 лв. и периодът на амортизация на основните производствени фондове е 1 година, да се пресметне месечната печалба на фирмата при дадената структура на ресурсите;

(в) да се определи оптималната структура на ресурсите и да се пресметнат приходите, разходите и печалбата на фирмата при такава структура на ресурсите.

Решение:

(а) Предполагаме, че ПФ, по която работи фирмата е

$$q = AK^{\alpha}L^{\beta}.$$

При ПФ от мултипликативен вид степенните показатели α и β са ресурсните еластичности – по капитала и труда съответно. Имаме

$$\alpha = \frac{\% - \text{ното изменение на } q}{\% - \text{ното изменение на } K} = \frac{3\%}{6\%} = \frac{1}{2},$$

$$\beta = \frac{\% - \text{ното изменение на } q}{\% - \text{ното изменение на } L} = \frac{3\%}{9\%} = \frac{1}{3}.$$

Тогава за ПФ ще имаме $q = AK^{1/2}L^{1/3}$ с A – неопределено (засега). Да отбележим, че тази ПФ K и q ще присъстват в стойностен вид (оценени в лв.), а L - в количествен (оценен в брой работници). За капитала имаме $K = 100000000 = 10^8$, за труда - $L = 1000 = 10^3$, а за произведената продукция $q = 1000 \cdot 10000 = 10^7$ (умножили сме броя работници по месечната продукция на един работник. Заместваме тези стойности за K, L и q в $q = AK^{1/2}L^{1/3}$ и получаваме $10^7 = A(10^8)^{1/2}(10^3)^{1/3} = A \cdot 10^4 \cdot 10 = A \cdot 10^5$, следователно $A = 10^2$ и ПФ е $q = 100K^{1/2}L^{1/3}$.

(б) Тъй като амортизацията на основните производствени фондове е 1 година или 12 мес., то цената на капитала е $u = \frac{1}{12}$, а цената на труда - $v = 1000 = 10^3$ (работната заплата). Тогава разходите C ще възлизат на

$$C = uK + vL = \frac{1}{12} \cdot 10^8 + 10^3 \cdot 10^3 = 10^6\left(\frac{100}{12} + 1\right) = \frac{28}{3} \cdot 10^6.$$

Тъй като приходите са $R = q = 10^7$, то за печалбата получаваме

$$\text{П} = R - C = 10^7 - \frac{28}{3} \cdot 10^6 = \left(10 - \frac{28}{3}\right)10^6 = \frac{2}{3} \cdot 10^6 = \frac{2}{3}\text{мил. лв.}$$

(в) Печалбата на фирмата достига своя максимум, ако са изпълнени условията

$$q_K = u = \frac{1}{12} \quad \text{и} \quad q_L = v = 10^3.$$

(тъй като $R = q$, то можем да считаме, че са произведени q на брой изделия, всяко по 1 парична единица). Ще имаме

$$q_K = 100\frac{L^{1/3}}{2K^{1/2}} = \frac{1}{12} \Longrightarrow \frac{L^{1/3}}{K^{1/2}} = \frac{1}{600} \text{ и } q_L = 100\frac{K^{1/2}}{3L^{2/3}} = 10^3 \Longrightarrow \frac{K^{1/2}}{L^{2/3}} = 30.$$

Умножавайки горните равенства получаваме

$$\frac{1}{L^{1/3}} = \frac{1}{20} \Longrightarrow L = 20^3 = 8000 = 8 \cdot 10^3.$$

Като заместим в $\frac{K^{1/2}}{L^{2/3}} = 30$ намираме $K^{1/2} = 12000 = 12 \cdot 10^3$, следователно, $K = 144 \cdot 10^6$= 144 млн. лв.

Тогава за приходите R ще имаме

$$R = q = 100(144 \cdot 10^6)^{1/2}(8 \cdot 10^3)^{1/3} = 10^2 \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10 = 24 \cdot 10^6$$
$$= 24 \text{ млн. лв.},$$

за разходите –

$$C = uK + vL = \frac{1}{12} \cdot 144 \cdot 10^6 + 10^3 \cdot 8 \cdot 10^3 = 10^6(12 + 8) = 20 \cdot 10^6$$
$$= 24 \text{ млн. лв.}$$

и за печалбата - $\text{П} = R - C = 4$ млн. лв.

Задача 3. Нека фирма работи с технология, зададена чрез производствената функция

$$q = 3L^{\frac{1}{2}} + K^{\frac{1}{2}},$$

като цените на ресурсите са $\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{2}$ за единица труд и капитал съответно. Цената на стоката, произвеждана и предлагана от фирмата е 1.

(а) В условие на оптимален избор на фирмата да се изрази печалбата като функция на разходите $\pi = \pi(c)$;

(б) да се намери интервала на разходите, в който печалбата е неотрицателна;

(в) да се намери абсолютния максимум на печалбата, ако съществува, както и разходите, количеството продукция, вложените единици труд и капитал при които този максимум се достига;

(г) каква е максималната печалба на фирмата, ако разходите и са ограничени от: 1) $\frac{18}{7}$ единици, 2) 10 единици.

Решение:

(а) Условието за оптимално разпределение на ресурсите е

$$S_L = \frac{F_K}{F_L} = \frac{1}{2K^{\frac{1}{2}}}\frac{2L^{\frac{1}{2}}}{3} = \frac{L^{\frac{1}{2}}}{3K^{\frac{1}{2}}} = \frac{u}{v} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \Longrightarrow L = 4K.$$

Заместваме в разходното условие

$$uK + vL = \frac{1}{2}K + \frac{3}{4}L = c$$

и получаваме $K = \frac{2}{7}c$ и $L = \frac{8}{7}c$. Като заместим в ПФ ще имаме

$$q = 3L^{\frac{1}{2}} + K^{\frac{1}{2}} = 3\left(\frac{8}{7}c\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{2}{7}c\right)^{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{\frac{2c}{7}} + \sqrt{\frac{2c}{7}} = \sqrt{14c}.$$

За приходите R ще имаме $R = q = \sqrt{14c}$ (цената на продукцията е $p = 1$). Разбира се, разходите са $C = c$. Окончателно, за печалбата (при оптимално изразходване на ресурсите) получаваме

$$\Pi = R - C = \sqrt{14c} - c.$$

(б) Интервалът на разходите, в който печалбата е неотрицателна се намира от решението на ирационалното неравенство $\Pi = \sqrt{14c} - c \geq 0$ или $14c \geq c^2$, което е $c \in (0, 14]$.

(в) Първата производна на функцията $\Pi(c) = \sqrt{14c} - c$ е

$$\Pi'(c) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{14}{c}} - 1,$$

която се нулира при $c = \frac{7}{2} = 3{,}5$. В интервала $c \in (0; 3{,}5)$ имаме $\Pi'(c) > 0$ и функцията на печалбата е растяща, а в интервала $c \in (3{,}5; \infty)$ $\Pi'(c) < 0$ и тя е намаляваща. Следователно, за $c = 3{,}5$ печалбата достига локален максимум, който е и абсолютен. Ще имаме

$$\Pi_{max} = \Pi(3{,}5) = \sqrt{14 \cdot 3{,}5} - 3{,}5 = 3{,}5.$$

Тъй като количеството продукция q, вложените капитал K и труд L са изразени чрез c, те могат да се пресметнат: $q = \sqrt{14 \cdot 3{,}5} = 7$, $K = \frac{2}{7} \cdot 3{,}5 = 1$ и $L = \frac{8}{7} \cdot 3{,}5 = 4$.

(г) При $c = \frac{18}{7} \in (0; 3{,}5)$ за фирмата абсолютния максимум на печалбата е недостижим и понеже c се намира в интервала на нарастване на печалбата, тя ще е максимална на границата – при $c = \frac{18}{7}$. Тогава ще имаме $q = \sqrt{14 \cdot \frac{18}{7}} = 6$, $K = \frac{2}{7} \cdot \frac{18}{7} = \frac{36}{49}$ и $L = \frac{8}{7} \cdot \frac{18}{7} = \frac{144}{49}$.

Тъй като при $c = 10$ абсолютния максимум е достъпен, фирмата ще използва същите количества ресурси и ще произведе същия обем продукция, както във (в).

Задача 4. Нека фирма работи с технология, зададена чрез производствената функция

$$(1)\ \ q = \left(2L^{\frac{1}{2}} + K^{\frac{1}{2}}\right)^2, (2)\ q = 4L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}, (3)\ q = L^{\frac{1}{2}}K$$

като цените на ресурсите са $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$ за единица труд и капитал съответно. Цената на стоката, произвеждана и предлагана от фирмата е 1.

(а) Да се изрази в условие на оптимален избор на фирмата печалбата като функция на разходите $\pi = \pi(c)$;

(б) каква е максималната печалба на фирмата, ако разходите и са ограничени от 9 единици.

Решение:

В тази задача всички ПФ са такива, които не допускат абсолютен максимум на печалбата – в (1) и (2) те са хомогенни от степен на хомогенност 1, а в (3) – 3/2,

т.е. първите две са с постоянна възвращаемост от мащаба, а третата – с нарастваща възвращаемост. При такива ПФ печалбата расте неограничено (при неограничено нарастване на използваните в производството ресурси). Ще илюстрираме това с (3).

(а) Условието за оптимално разпределение на ресурсите е

$$S_L = \frac{F_K}{F_L} = \frac{L^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}K} = \frac{2L}{K} = \frac{u}{v} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4} \Longrightarrow K = \frac{8}{3}L.$$

Заместваме в разходното условие

$$uK + vL = \frac{1}{4}K + \frac{1}{3}L = c$$

и получаваме $L = c$ и $K = \frac{8}{3}c$. Като заместим в ПФ ще имаме

$$q = L^{\frac{1}{2}}K = c^{\frac{1}{2}}\frac{8}{3}c = \frac{8}{3}c^{\frac{3}{2}}\cdot$$

За приходите R ще имаме $R = q = \frac{8}{3}c^{\frac{3}{2}}$ (цената на продукцията е $p = 1$). Разходите са $C = c$. Окончателно, за печалбата (при оптимално изразходване на ресурсите) получаваме

$$\pi = \pi(c) = R - C = \frac{8}{3}c^{\frac{3}{2}} - c.$$

(б) Печалбата е неотрицателна, ако е изпълнено неравенството

$$\frac{8}{3}c^{\frac{3}{2}} - c \geq 0 \Leftrightarrow c \geq \frac{9}{64}.$$

Първата производна на функцията на печалбата е $\pi'(c) = 4\sqrt{c} - 1$. Тя се нулира при $c = \frac{1}{16}$, като в интервала $c \in \left(0, \frac{1}{16}\right)$ имаме $\pi'(c) < 0$ и $\pi(c)$ намалява, а в интервала $c \in \left(\frac{1}{16}, \infty\right)$ - $\pi'(c) > 0$ и $\pi(c)$ расте. Това показва, че за $c = \frac{1}{16}$ $\pi(c)$ има абсолютен минимум, а с нарастването на c $\pi(c)$ расте неограничено. При ограничението $c \leq 9$ най-голямата стойност на $\pi(c)$ ще бъде на границата – при $c = 9$. Ще имаме

$$\pi(9) = \frac{8}{3}\cdot 9^{\frac{3}{2}} - 9 = 72 - 9 = 63.$$

Това ще се постигне при $L = 9$, $K = 24$ и $q = 72$.

Задача 5. Фирма работи с технология, зададена чрез производствена функция

$$q = L^{\frac{2}{3}} + K^{\frac{2}{3}}$$

и цени на ресурсите $u = 4$ и $v = 1$. Да се намери функцията на предлагане на фирмата ако:

(а) тя може да си набавя неограничени количества труд и капитал;

(б) може да си набавя неограничено количество труд, но за капитала е ограничена от 27 единици.

(в) може да си набавя неограничено количество капитал, но за труда е ограничена от 216 единици.

(г) има ограничението за капитала от (б) и за труда от (в).

Решение:

(а) ПФ изпълнява условията за наличие на абсолютен максимум на печалбата. Тогава ще имаме

$$F_K = \frac{2}{3K^{\frac{1}{3}}} = \frac{u}{p} = \frac{4}{p} \Longrightarrow K = \frac{p^3}{216}$$

$$F_L = \frac{2}{3L^{\frac{1}{3}}} = \frac{v}{p} = \frac{1}{p} \Longrightarrow L = \frac{8p^3}{27}.$$

Като заместим така получените K и L в ПФ ще получим функцията на предлагане при липса на ограничения за ресурсите:

$$q = L^{\frac{2}{3}} + K^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{8p^3}{27}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{p^3}{216}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{4p^2}{9} + \frac{p^2}{36} = \frac{17p^2}{36}.$$

(б) От неравенството $K = \frac{p^3}{216} < 27$ следва $p < 18$. Така че, при $p < 18$ ограничението за капитала не е актуално и предлагането ще се извършва по формулата $q = \frac{17p^2}{36}$. При $p \geq 18$ в производството ще се вложи всичкия капитал и тогава ще имаме $q = \frac{4p^2}{9} + 27^{\frac{2}{3}} = \frac{4p^2}{9} + 9$.

(в) Аналогично, от $L = \frac{8p^3}{27} < 216$ следва $p < 9$. Така че, при $p < 18$ ограничението за труда не е актуално и предлагането ще се извършва по формулата $q = \frac{17p^2}{36}$

. При $p \geq 9$ в производството ще се вложи всичкия капитал и тогава ще имаме $q = 216^{\frac{2}{3}} + \frac{p^2}{36} = 36 + \frac{p^2}{36}$.

(г) При $p < 9$ никое от ограниченията за ресурсите на производство не е актуално и тогава функцията на предлагане е $q = \frac{17p^2}{36}$. При $9 \leq p < 18$ се задейства ограничението за труда – ще имаме $q = 36 + \frac{p^2}{36}$. При $p \geq 18$ се включва ограничението и за капитала, тогава предлагането ще е константно $q = 36 + 9 = 45$.

Задача 6. Неокласическа производствена функция на една ресурсна променлива – труд. В една конкурентна фирма мениджмънта е установил, че при използване на труд в размер на 1000 часа седмично се произвеждат 2000 изделия, а при 2000 часа – 3000. Съществуват два варианта за неокласическа производствена функция:

$$(1) \text{ степенна функция } q = aL^{\alpha};$$

$$(2) \text{ квадратна функция } q = aL - bL^2.$$

(а) да се намери (възстанови) производствената функция на фирмата;

(б) да се намери функцията на предлагане на фирмата $q = q(p)$, ако установената тарифна ставка на работната заплата е 5 лв. за час.

(в) да се изрази печалбата на фирмата (в условие на оптималното ѝ функциониране) като функция на цената p и да се пресметне печалбата при $p = 10$.

(г) да се намери функцията на разходи на фирмата при положение, че те са само за труд.

Решение.

(1) (а) Предполагаме, че неокласическата производствена функция на една променлива е от вида

$$q = aL^{\alpha}, \alpha \in (0,1).$$

Коефициентите на тази степенна функция a и α ще намерим като използваме данните на задачата, имаме $q = 2$ при $L = 1$ и $q = 3$ при $L = 2$. От първото условие получаваме

$$2 = a1^{\alpha} \Longrightarrow a = 2 \text{ и } q = 2L^{\alpha},$$

а от второто –

$$3 = 2 \cdot 2^{\alpha} \Longrightarrow 2^{\alpha} = 1{,}5 \Longrightarrow \alpha = \frac{\ln 1{,}5}{\ln 2} = \frac{0{,}405}{0{,}693} = 0{,}584 \text{ и } q = 2L^{0{,}584}.$$

(б) За да определим функцията на предлагане, ще използваме условието от първи ред за конкурентната фирма, а именно: маргиналната производителност на труда трябва да е равна на неговата относителна цена, или

$$q'(L) = \frac{w}{p},$$

където w е часовата тарифна ставка на работната заплата, а p – цената на произвежданата и предлагана стока. Заместваме $q'(L)$ с $2 \cdot 0{,}584L^{-0{,}416} = 1{,}168L^{-0{,}416}$ и w с 5 и получаваме

$$L^{0{,}416} = 0{,}234p.$$

Степенуваме двете страни на горното равенство с $1/0{,}416 = 2{,}4$:

$$(L^{0{,}416})^{\frac{1}{0{,}416}} = 0{,}234^{2{,}4}p^{2{,}4} \Longrightarrow L = 0{,}03p^{2{,}4}.$$

След заместване на получения израз за L в производствената функция, ще имаме

$$q = 2(0{,}03p^{2{,}4})^{0{,}584} = 2 \cdot 0{,}03^{0{,}584}p^{1{,}4} = 0{,}258p^{1{,}4}.$$

(в) Заместваме в израза за печалбата

$$\Pi(p) = R(p) - C(p) = pq(p) - wL(p)$$

$q(p)$ и $L(p)$ с получените в б) изрази и получаваме

$$\Pi(p) = p \cdot 0{,}258p^{1{,}4} - 5 \cdot 0{,}03p^{2{,}4} = 0{,}258p^{2{,}4} - 0{,}15p^{2{,}4} = 0{,}108p^{2{,}4}.$$

За цена $p = 10$ ще имаме

$$\Pi(10) = 0{,}108 \cdot 10^{2{,}4} = 27{,}13.$$

(г) В израза за разходите

$$C(q) = wL(q)$$

заместваме $L(q)$ с обратната функция на производствената функция $q = 2L^{0{,}584}$ – $L = 0{,}305q^{1{,}712}$ и получаваме

$$C(q) = 1{,}525q^{1{,}712}.$$

Чрез получения израз за функцията на разходите можем да получим по още един начин израза за функцията на предлагане. Равновесното условие за фирмата-конкурент е

$$p = C'(q) = 1{,}525 \cdot 1{,}712q^{0{,}712} = 2{,}61q^{0{,}712}.$$

Това е изразът за обратната функция на предлагане. Като изразим q чрез p получаваме $q = 0{,}26p^{2{,}4}$ – функция на предлагане на фирмата (малката разлика произтича от грешки при закръгляне).

(2) (а) Предполагаме, че неокласическата производствена функция на една променлива е от вида

$$q = aL - bL^2.$$

Коефициентите на тази степенна функция a и b ще намерим като използваме данните на задачата, имаме $q = 2$ при $L = 1$ и $q = 3$ при $L = 2$. От първото условие получаваме

$$2 = a - b \Longrightarrow a = 2 + b \Longrightarrow q = (2 + b)L - bL^2.$$

а от второто –

$$4 = 2(2 + b) - 4b \Longrightarrow b = 0{,}5, a = 2{,}5 \quad \text{и} \quad q = 2{,}5L - 0{,}5L^2.$$

Тъй като

$$q'(L) = 2{,}5 - L > 0,$$

То производствената функция е дефинирана за $L < 2{,}5$.

(б) приравняваме маргиналната производителност на труда с неговата относителна цена:

$$q'(L) = \frac{w}{p} \Leftrightarrow 2{,}5 - L = \frac{5}{p} \quad \text{и} \quad L = 2{,}5 - \frac{5}{p}.$$

Заместваме така получения израз за L в производствената функция и получаваме

$$q(p) = q\big(L(p)\big) = 0{,}5\left(2{,}5 - \frac{5}{p}\right)\left(5 - \left(2{,}5 - \frac{5}{p}\right)\right) = 0{,}5\left(2{,}5 - \frac{5}{p}\right)\left(2{,}5 + \frac{5}{p}\right)$$
$$= \frac{3{,}125}{p^2}(p^2 - 4).$$

Изпълнено е очевидното неравенство $q > 0$ при $p > 2$ (за цени $p \leq 2$ няма предлагане.

(в) Заместваме в израза за печалбата

$$\Pi(p) = R(p) - C(p) = pq(p) - wL(p)$$

$q(p)$ и $L(p)$ с получените в б) изрази и получаваме

$$\Pi(p) = p\frac{3{,}125}{p^2}(p^2-4) - 5\frac{2{,}5}{p}(p-2) = \frac{3{,}125}{p}(p-2)[(p+2)-4]$$
$$= \frac{3{,}125}{p}(p-2)^2.$$

За цена $p = 10$ ще имаме

$$\Pi(10) = \frac{3{,}125}{10}8^2 = 20.$$

(г) В израза за разходите

$$C(q) = wL(q)$$

заместваме $L(q)$ с обратната функция на производствената функция, която се получава ако решим уравнението

$$0{,}5L^2 - 2{,}5L + q = 0.$$

Ще имаме

$$L(q) = 2{,}5 - \sqrt{6{,}25 - 2q}$$

Тогава за функцията на разходите получаваме

$$C(q) = wL(q) = 12{,}5 - 5\sqrt{6{,}25 - 2q}.$$

Задача 7. Произведената продукция на фирма зависи само от фактора труд. Ако

$q = \ln(L+2)$, където q е брой продукти, произведени за един час, L – часове положен труд в производството. Ако p е цената на стоката, произвеждана и предлагана от фирмата, а v – часовата ставка за заплащане на труда, да се намери:

(а) функцията $L = L(p, v)$ на търсене на труд от фирмата;

(б) функцията $q = q(p, v)$ на предлагане на стоката от фирмата.

Решение:

(а) За да максимализира печалбата, фирмата трябва да вложи такова количество труд, при което маргиналната производителност на труда $q_L = q'(L)$ се изравнява с неговата относителната цена:

$$q'(L) = \frac{v}{p} \Leftrightarrow \frac{1}{L+2} = \frac{v}{p} \Leftrightarrow L = \frac{p}{v} - 2.$$

Последният израз представлява функцията на търсене на труд от фирмата.

(б) Като заместим L от $L = \frac{p}{v} - 2$ в ПФ получаваме $q = \ln\frac{p}{v}$, което е функцията на предлагане на стоката от фирмата.

Задача 8. Конкурентна фирма произвежда два вида стоки по съответните технологии

(1) $q_1 = 20L_1 - {L_1}^2$ и $q_2 = 10L_2 - {L_2}^2$, (2) $q_1 = 5\sqrt{L_1}$ и $q_2 = 20\sqrt{L_2}$,

където q_1, q_2 са количествата от стоките, а L_1, L_2 – обемите труд, вложен в производството им. Предполага се, че p_1 и p_2 са цените на стоките, а w – цената на труда (работната заплата).

(а) Да се намери зависимостта между величините p_1, p_2, L_1, L_2 осигуряваща оптималния производствен план на фирмата.

(б) Ако $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 1$ и $w = 2$ да се определят оптималните стойности на L_1, L_2, q_1, q_2; приходите от продажби R_1, R_2; разходите за производство C_1, C_2 и печалбата π на фирмата.

Решение:

(1) (а) Приходите на фирмата са

$$R(L_1, L_2) = p_1q_1 + p_2q_2 = p_1\left(20L_1 - {L_1}^2\right) + p_2\left(10L_2 - {L_2}^2\right),$$

а разходите

$$C(L_1, L_2) = C_1 + C_2 = wL_1 + wL_2.$$

Условието за оптимално поведение на фирмата на пазара (максимализиране на печалбата) налага изравняването на маргиналните приходи с маргиналните разходи по всеки вид труд. Така получаваме

$$\frac{\partial R}{\partial L_1} = \frac{\partial C}{\partial L_1} \Leftrightarrow (20 - 2L_1)p_1 = w,$$

$$\frac{\partial R}{\partial L_2} = \frac{\partial C}{\partial L_2} \Leftrightarrow (10 - 2L_2)p_2 = w.$$

Тъй като заплащането на двата вида труд (на базата на които се произвеждат двете различни стоки) е едно и също, то приравнявайки двата израза за w получаваме тъждеството

$$(20 - 2L_1)p_1 = (10 - 2L_2)p_2.$$

(б) Съгласно горните равенства ще имаме

$$L_1 = 10 - \frac{w}{2p_1}, L_1 < 10 \quad \text{и} \quad L_2 = 5 - \frac{w}{2p_2}, L_2 < 5.$$

(Горните формули могат да се интерпретират като функции на търсене на труд). Съгласно последните формули получаваме

$$L_1 = 10 - \frac{2}{2 \cdot 0{,}2} = 5 \quad \text{и} \quad L_2 = 5 - \frac{2}{2 \cdot 1} = 4.$$

Тогава, като използваме производствените функции ще имаме

$$q_1 = 20L_1 - {L_1}^2 = 20 \cdot 5 - 5^2 = 75 \quad \text{и} \quad q_2 = 10L_2 - {L_2}^2 = 10 \cdot 4 - 4^2 = 24.$$

Тогава за приходите, разходите и печалбата получаваме

$$R = p_1q_1 + p_2q_2 = 0{,}2 \cdot 75 + 1 \cdot 24 = 39,$$

$$C = C_1 + C_2 = wL_1 + wL_2 = 2(5 + 4) = 18,$$

$$\Pi = R - C = 39 - 18 = 21.$$

(2) (а) Приходите на фирмата са

$$R(L_1, L_2) = p_1q_1 + p_2q_2 = 5p_1\sqrt{L_1} + 20p_2\sqrt{L_2},$$

а разходите

$$C(L_1, L_2) = C_1 + C_2 = wL_1 + wL_2.$$

Условието за оптимално поведение на фирмата на пазара налага изравняването на маргиналните приходи с маргиналните разходи по всеки вид труд. Така получаваме

$$\frac{\partial R}{\partial L_1} = \frac{\partial C}{\partial L_1} \Leftrightarrow \frac{5}{2\sqrt{L_1}}p_1 = w,$$

$$\frac{\partial R}{\partial L_2} = \frac{\partial C}{\partial L_2} \Leftrightarrow \frac{20}{2\sqrt{L_2}}p_2 = w.$$

Тъй като заплащането на двата вида труд е едно и също, то приравнявайки двата израза за w получаваме тъждеството

$$\frac{5}{2\sqrt{L_1}}p_1 = \frac{20}{2\sqrt{L_2}}p_2 \quad \text{или} \quad {p_1}^2 L_2 = 16{p_2}^2 L_1.$$

(б) Съгласно горните равенства ще имаме

$$L_1 = \frac{25{p_1}^2}{4w^2} \quad \text{и} \quad L_2 = \frac{100{p_2}^2}{w^2}.$$

Съгласно последните формули получаваме

$$L_1 = \frac{25 \cdot 0{,}2^2}{4 \cdot 2^2} = \frac{1}{16} \quad \text{и} \quad L_2 = \frac{100 \cdot 1^2}{2^2} = 25.$$

Тогава, като използваме производствените функции ще имаме

$$q_1 = 5\sqrt{L_1} = 5\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{5}{4} \quad \text{и} \quad q_2 = 20\sqrt{L_2} = 20\sqrt{25} = 100.$$

Тогава за приходите, разходите и печалбата получаваме

$$R = p_1 q_1 + p_2 q_2 = 0{,}2 \cdot \frac{5}{4} + 1 \cdot 100 = 100{,}25,$$

$$C = C_1 + C_2 = wL_1 + wL_2 = 2\left(\frac{1}{16} + 25\right) = 50{,}125,$$

$$\Pi = R - C = 100{,}25 - 50{,}125 = 50{,}125.$$

Задача 9. Известна е производствената функция $q = 2\sqrt{K}$ (K – количеството вложен в производството капитал) и функцията на разходите $C = 405 + vK$, като $v = 1$ парична единица за единица вложен капитал. Функцията на пазарно търсене е $Q^D(p) = 40{,}5 - 0{,}5p$. Да се определят равновесните стойности на: цената на стоката, количеството на продукцията, количеството изразходван капитал, печалбата и нормата на печалба, индекса на Лернер и потребителския излишък при условие на монополизиран пазар, ако стратегията на монополиста е да

- максимизира оборота си;
- максимализира печалбата си;
- максимализира нормата си на печалба.

Решение:

Нека монополистът да максимализира оборота си $R(q) = p(q)q$ като $p(q)$ е обратната функция на търсене. В случая имаме $p(q) = 81 - 2q$, така че $R(q) = 81q - 2q^2$. Условието от първи ред за тази оптимизационна задача е $R'(q) = 0 \Leftrightarrow 81 - 4q = 0$, откъдето получаваме $q = 81/4 = 20{,}25$. За равновесната цена получаваме $p = p(81/4) = 81/2 = 40{,}5$. Тогава за оборота ще имаме

$$R = pq = \frac{81}{2}\frac{81}{4} = \frac{6561}{8} = 820{,}125.$$

От производствената функция изразяваме вложения капитал чрез количеството произведена продукция:

$$K = 0{,}25q^2,$$

следователно в този случай количеството на вложения капитал е $K = 0{,}25(81/4)^2 = 102{,}516$. Тъй като разходната функция е $C = 405 + K$, то за разходите намираме $C = 405 + 102{,}516 = 507{,}516$. Тогава печалбата на фирмата възлиза на

$$\Pi = R - C = 802{,}125 - 507{,}516 = 312{,}609,$$

а за нормата на печалба получаваме

$$\frac{\Pi}{K} = \frac{312{,}609}{102{,}516} = 3{,}05.$$

Сега да пресметнем стойностите на същите икономически величини в стандартния случай, когато фирмата-монополист максимализира печалбата си. Тогава има изравняване на маргиналните приходи с маргиналните разходи

$$R'(q) = C'(q).$$

За функцията на разходите ще имаме $C(q) = 405 + K = 405 + 0{,}25q^2$, следователно $C'(q) = 0{,}5q$ и

$$R'(q) = C'(q) \Leftrightarrow 81 - 4q = 0{,}5q, \text{тогава } q = 18,$$

а за равновесната цена получаваме $p(18) = 81 - 2 \cdot 18 = 45$. Тогава приходите ще бъдат $R = pq = 45 \cdot 18 = 810$. Тъй като за разходите ще имаме $C = C(18) = 405 + 0{,}25 \cdot 18^2 = 405 + 81 = 486$, то печалбата възлиза на $\Pi = R - C = 810 - 486 = 324$. Тогава за нормата на печалба (при $K = 0{,}25 \cdot 18^2 = 81$) получаваме

$$\frac{\Pi}{K} = \frac{324}{81} = 4.$$

Накрая, да пресметнем параметрите на пазара и фирмата в случай, че тя се придържа към стратегия за максимализиране на нормата на печалбата си. Изразяваме печалбата и вложения капитал чрез количеството q. Ще имаме

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = 81q - 2q^2 - (405 + 0{,}25q^2) = 81q - 2{,}25q^2 - 405;$$

$$\frac{\Pi(q)}{K(q)} = \frac{81q - 2{,}25q^2 - 405}{0{,}25q^2} = \frac{324}{q} - 9 - \frac{1620}{q^2}.$$

Тогава условието от първи ред за тази оптимизационна задача ще бъде

$$\left[\frac{\Pi(q)}{K(q)}\right]' = 0 \Leftrightarrow -\frac{324}{q^2} + \frac{3240}{q^3} = 0 \quad \text{или} \quad q = 10.$$

Въз основа на така полученото равновесно количество и обратната функция на търсене намираме равновесната цена $p = p(10) = 81 - 2 \cdot 10 = 61$, приходите $R = pq = 61 \cdot 10 = 810$, вложения капитал $K = 0{,}25 \cdot 10^2 = 25$, разходите $C = 405 + 25 = 430$, печалбата $\Pi = R - C = 610 - 430 = 180$ и нормата на печалба

$$\frac{\Pi}{K} = \frac{180}{25} = 7{,}2.$$

Индекс на Лернер. Той се пресмята по формулата

$$I_L = \frac{p - C'(q)}{p} = \frac{p - 0{,}5q}{p}.$$

В случай на максимализиране на оборота ($p = 40{,}5, q = 20{,}25$) ще имаме

$$I_L = \frac{40{,}5 - 0{,}5 \cdot 20{,}25}{40{,}5} = \frac{30{,}375}{40{,}5} = 0{,}75.$$

При максимализиране на печалбата ($p = 45, q = 18$) ще имаме

$$I_L = \frac{45 - 0{,}5 \cdot 18}{45} = \frac{36}{45} = 0{,}8.$$

И накрая, при максимализиране на нормата на печалба ($p = 61, q = 10$) получаваме

$$I_L = \frac{61 - 0{,}5 \cdot 10}{61} = \frac{56}{61} = 0{,}92.$$

Потребителски излишък. Пресмята се по формулата

$$CS = \frac{1}{2}(p_{max} - p)q,$$

където p и q са ефективно достигнатите цена и количество, а p_{max} е възможно най-високата цена, която позволява функцията на търсене. В конкретния случай ще имаме

$$p_{max} = p(q = 0) = 81,$$

а поради това че

$$q = Q^D = 40{,}5 - 0{,}5p = 0{,}5(81 - p)$$

за потребителския излишък получаваме

$$CS(p) = 0{,}25(81 - p)^2.$$

При максимализиране на оборота ($p = 40{,}5$) намираме

$$CS = CS(40{,}5) = 0{,}25(81 - 40{,}5)^2 = 410{,}06.$$

При максимализиране на печалбата ($p = 45$) ще имаме

$$CS = CS(45) = 0{,}25(81 - 45)^2 = 324.$$

При максимализиране на нормата на печалба ($p = 61$) получаваме

$$CS = CS(61) = 0{,}25(81 - 61)^2 = 100.$$

Накрая, всички резултати от трите случая за прегледност нанасяме в таблица

	Монопол, максимализиращ		
	оборота	печалбата	нормата на печалба
цена	40,5	45	61
количество	20,25	18	10
приходи	820,125	810	610
разходи	507,516	486	430
печалба	312,609	324	180
капитал	102,516	81	25
норма на печалба	3,05	4	7,2
индекс на Лернер	0,75	0,80	0,92
потр. излишък	410,06	324	100