# ТЕМА 5. МАТЕМАТИЧЕСКА ТЕОРИЯ НА ФИРМАТА – ПРОИЗВОДСТВЕНА ФУНКЦИЯ

## ТЕОРИЯ

**1. Производствена функция (ПФ)** е зависимостта между количеството на ресурсите $z(z_1, z_2, \dots, z_n)$ и максималното количество от крайната стока, което може да се произведе с тези количества ресурси. Бележим

$$q = F(z) = F(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

Казва се, че чрез производствената функция се задава технологията на производство на фирмата. Основно ще разгледаме производствени функции на две ресурсни променливи: $K$ – количество на вложения в производството капитал и $L$ – количество на вложения в производството труд, тогава

$$q = F(K, L).$$

Някои ключови понятия: $\frac{q}{K}$ – средна производителност на капитала, $\frac{q}{L}$ – средна производителност на труда, $\frac{K}{q}$ – капиталоемкост, $\frac{L}{q}$ – трудоемкост, $\frac{K}{L}$ – съотношение капитал/труд, $\frac{L}{K}$ – съотношение труд/капитал, $M_K F = \frac{\partial F}{\partial K} = F_K = q_K$ – маргинална производителност на капитала, $M_L F = \frac{\partial F}{\partial L} = F_L = q_L$ – маргинална производителност на труда.

Еластичност по капитала се задава с

$$\varepsilon_K = F_K \frac{K}{F} \cong \frac{\Delta F}{\Delta K} \frac{K}{F} = \frac{\frac{\Delta F}{F}}{\frac{\Delta K}{K}} = \frac{\%\text{ на } \Delta F \text{ от } F}{\%\text{ на } \Delta K \text{ от } K},$$

а еластичност по труда –

$$\varepsilon_L = F_L \frac{L}{F} \cong \frac{\Delta F}{\Delta L} \frac{L}{F} = \frac{\frac{\Delta F}{F}}{\frac{\Delta L}{L}} = \frac{\%\text{ на } \Delta F \text{ от } F}{\%\text{ на } \Delta L \text{ от } L}.$$

Сумата от тези две еластичности се нарича обща (ресурсна) еластичност: $\varepsilon = \varepsilon_K + \varepsilon_L$ и показва с какъв процент ще нарасне обемът на продукцията при едновременното нарастване на капитала и труда с един процент. В случаите, когато $\varepsilon_K > \varepsilon_L$ се говори за интензивно производство, а при $\varepsilon_K < \varepsilon_L$ – екстензивно.

Изокванти ще наричаме линиите на ниво на производствената функция $q = F(K, L)$, т.е. множеството от точки в равнината $(K, L)$ за които стойността на производствената функция е една и съща: $F(K, L) = q_0 = const$ са уравненията на изоквантите. Те образуват еднопараметрична фамилия от линии в равнината на ресурсите: през всяка точка от тази равнина минава и то само една изокванта. Поради свойствата на производствената функция на изокванти, които са по-отдалечени от координатното начало отговарят по-големи стойности на продукцията.

Величината $-\frac{dK}{dL}\ |_{F=const} = -\lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta L}\ |_{F=const}$ , показваща с колко единици капитал трябва да заменим единица труд при запазване на произведеното количество се нарича маргинална норма на технологично заместване (marginal rate of technological substitution) на труд с капитал. Ще я бележим с $MRTS_{LK}$ или по-кратко $S_K$, тогава

$$MRTS_{LK} = S_K = -\lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta L}\ |_{F=const} = -\frac{dK}{dL}\ |_{F=const} = \frac{F_L}{F_K}$$

Аналогично можем да дефинираме маргинална норма на технологично заместване на капитал с труд

$$MRTS_{KL} = S_L = -\lim_{\Delta K \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta K}\ |_{F=const} = -\frac{dL}{dK}\ |_{F=const} = \frac{F_K}{F_L}$$

**2. Видове производствени функции.** Неокласическата производствена функция е двукратно диференцируема функция, удовлетворяваща следните свойства (аксиоми):

1. $F(0,0) = 0$ – без ресурси няма продукция;

2. $F_K \geq 0$ и $F_L \geq 0$ – производството не намалява при нарастване количеството на един от ресурсите (и запазване на другите). Това свойство в икономиката се нарича закон за ненамаляващата маргинална производителност на ресурсите;

3. $F_{KK} = \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} = \frac{\partial}{\partial K} F_K \leq 0$ и $F_{LL} = \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} \leq \frac{\partial}{\partial L} F_L \leq 0$ - маргиналната производителност на всеки от ресурсите не нараства при нарастване на количеството му – закон за спадащата ефективност на ресурсите.

4. $F_{KL} = \frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L} = \frac{\partial}{\partial K} F_L = F_{LK} = \frac{\partial^2 F}{\partial L \partial K} = \frac{\partial}{\partial L} F_K \geq 0$ – маргиналната производителност на всеки от ресурсите не намалява при нарастване количеството на друг ресурс.

5. $F(\infty, L) = F(K, \infty) = \infty$ - неограниченото нарастване на количеството на един от ресурсите води до неограничено нарастване на продукцията.

Производствена функция с еднаква възвращаемост от мащаба. Стесняваме класа от производствени функции чрез въвеждане на едно допълнително условие:

6. Производствената функция $q = F(K, L)$ има еднаква възвращаемост от мащаба, ако за произволен набор от ресурси $(K, L)$ е изпълнено точно едно от условията:

a) $F(tK, tL) < tF(K, L)$ за произволно $t > 1$ – намаляваща възвращаемост от мащаба;
b) $F(tK, tL) > tF(K, L)$ за произволно $t > 1$ – нарастваща възвращаемост от мащаба;
c) $F(tK, tL) = tF(K, L)$ за произволно $t > 0$ – постоянна възвращаемост от мащаба.

Хомогенни производствени функции. Производствената функция $q = F(K, L)$ се нарича хомогенна от степен $\gamma$, ако е изпълнено

$$F(tK, tL) = t^{\gamma} F(K, L) \text{ за } \forall t$$

Тъй като при $t > 1$ $t^{\gamma} > t$ за $\gamma > 1$ и $t^{\gamma} < t$ за $\gamma < 1$, то хомогенните производствени функции от степен $\gamma > 1$ са функции с нарасрваща възвращаемост от мащаба, тези от степен $\gamma < 1$ – с намаляваща възвращаемост и от степен $\gamma = 1$ – с постоянна. Въобще хомогенните производствени функции са функции с еднаква възвращаемост от мащаба. Обратното не е вярно. Например производствената функция

$$F(K, L) = AK^{0,5}L^{0,5} + BK^{0,5}L^{0,75}$$

е с нарастваща възвращаемост, но не е хомогенна.

Горните класове производствени функции са много общи. А сега ще дадем по-конкретни примери за производствени функции:

1. Линейна производствена функция

$$q = F(K, L) = aK + bL$$

или производствена функция с пълна взаимозаменяемост на ресурсите.

2. Производствената функция на Леонтиев

$$q = F(K, L) = min\left\{\frac{K}{a}, \frac{L}{b}\right\},$$

наричана още производствена функция с пълна взаимодопълняемост на ресурсите.

3. Мултипликативна производствена функция.

$$q = F(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}.$$

Понякога, при $\alpha + \beta = 1$ мултипликативната производствена функция се нарича производствена функция на Кооб – Дъглас, а в останалите случаи – обобщена функция на Кооб – Дъглас. За нея е изпълнено: $\varepsilon_K = \alpha$ и $\varepsilon_L = \beta$. За това тя се нарича още ПФ с постоянни ресурсни еластичности.

4. ПФ с постоянна еластичност на заместването или CES-функция

$$F(K, L) = A(\delta K^{\rho} + (1 - \delta)L^{\rho})^{\frac{\gamma}{\rho}},$$

като $A > 0$, $0 < \delta < 1$, $\rho < 1$, $\rho \neq 0$.

(Величината $\sigma_K$, определена от

$$\sigma_K{}^{-1} = \frac{dS_K(k)}{dk}\frac{k}{S_K(k)}\ , k = \frac{K}{L}$$

Се нарича еластичност на заместването на труд с капитал).

**3. Първа оптимизационна задача на фирмата.** Първа основна задача на фирмата. Тя може да се формулира така: какви трябва да бъдат количествата, вложени в производството ресурси и какви трябва да бъдат разходите, за да се произведе определено количество $q$ с минимални разходи. На математически език задачата изглежда така:

$$C = uK + vL \to \min \ \text{ при } \ F(K, L) = q = const.$$

($u$ и $v$ са цените съответно на капитала и труда). Тя е аналогична на дуалната задача на потребителя. Основната задача на потребителя има аналог в математическата теория на фирмата и това е първата дуална задача: какви трябва да бъдат количествата, вложени в производството ресурси за да може да се произведе максимално количество при фиксирани разходи или

$$q = F(K, L) \to \max \ \text{ при } \ uK + vL = c = const.$$

Оказва се, че решението на тези задачи може да се намери от условието:

$$\frac{F_K}{F_L} = \frac{u}{v} \ \text{ или } \ \frac{u}{F_K} = \frac{v}{F_L} \ \text{ или } \ S_L = \frac{F_K}{F_L} = \frac{u}{v}.$$

Горните равенства могат да се изкажат по следния начин: условието за оптимално разпределение на ресурсите е

1) маргиналните производителности на ресурсите да са в същата пропорция, както цените им;

2) съотношенията между цените и маргиналните производителности на всички ресурси да са равни;

3) маргиналната норма на заместване на капитал с труд да е равна на съотношението на цените на капитала и труда.

Геометричната интерпретация на горното условие е следната. Правите с уравнения $uK + vL = c = const$ ще наричаме изокости – те отговарят на такива съчетание на ресурсите, при което се извършват едни и същи разходи. Всички те имат един и същ нормален вектор с координати $(u, v)$ – цените на ресурсите. Равенството $\frac{F_K}{F_L} = \frac{u}{v}$ показва, че за всяка изокоста съществува точка на оптимално изразходване на ресурсите – това е точката на допиране с една от изоквантите. Същото равенство показва, че за произволна изокванта съществува единствена точка на оптимално разпределение на ресурсите, тази в която става допирането със съответната изокоста. Така условието за оптимално разпределение на ресурсите очертава линията на оптимално разпределение на ресурсите, състояща се от точките на допиране на линиите от двете фамилии – изокости и изокванти.

Решенията на първата основна задача са функциите $K^H = K^H(q, u, v)$ и $L^H = L^H(q, u, v)$ - Хиксови функции на търсене на ресурси и са аналог на Хиксовите функции на търсене на потребителски стоки. Замествайки $K^H$ и $L^H$ в израза за разходите $C = uK + vL$ получаваме

$$C = C(q, u, v) = uK^H(q, u, v) + vL^H(q, u, v)$$

Това е функция на разходите на фирмата с аргументи произведеното количество продукция $q$ и ценоте на ресурсите $u$ и $v$. При фиксирани цени на ресурсите, тъй като тя дава минималните разходи за производството на определено количество $q$, това е разходната функция от предишната тема. Така, въз основа на производствената функция, при изпълнение на условието за оптимално изразходване на ресурсите, получаваме функцията на разходите. Получава се следната зависимост между ФР и ПФ:

| ПФ с еднаква възвращаемост | Хомогенни ПФ от степен $\gamma$ | ФР – аналитичен вид | ФР – икономическа характеристика |
|---|---|---|---|
| Намаляваща възвращаемост | $\gamma < 1$ | Строго изпъкнала | с нарастващи средни разходи |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Постоянна възвращаемост | $\gamma = 1$ | Линейна | с постоянни средни разходи |
| Нарастваща възвращаемост | $\gamma > 1$ | Строго вдлъбната | с намаляващи средни разходи |

**4. Втора оптимизационна задача на фирмата** – това е задачата за намиране на абсолютен максимум на печалбата, или

$$\Pi(K, L) = pF(K, L) - (uK + vL) \to max.$$

Задачата за максимализиране на печалбата притежава решение ако е изпълнено едно от условията:

1) производствената функция е строго вдлъбната;
2) производствената функция е с намаляваща възвращаемост от мащаба (ако тя е с еднаква възвращаемост от мащаба);
3) производствената функция е хомогенна функция със степен на хомогенност $\gamma < 1$;
4) функцията на разходите е строго изпъкнала;
5) функцията на разходите е с нарастващи средни променливи разходи.

Решението на тази задача се намира от условията

$$F_K = \frac{u}{p} \quad \text{и} \quad F_L = \frac{v}{p}.$$

Отношенията $\frac{u}{p}$ и $\frac{v}{p}$ на цените на ресурсите към цената на продукцията се наричат относителни цени на ресурсите**.** Горните равенства означават, че фирмата максимализира печалбата си при условие за изравняване на маргиналните ефективности на всички ресурси с относителните им цени. Освен това, тези условия са по-силни – от тях следва условието за оптимално разпределение на ресурсите.

При дадени (екзогенни) цени на ресурсите $u$ и $v$ и цена на продукцията на фирмата $p$ от решаването на задачата за абсолютен максимум на печалбата се получават функциите на търсене на ресурси $K = K(p, u, v)$ и $L = L(p, u, v)$ и функцията на предлагане на готовата продукция $q = q(p, u, v)$.

## РЕШЕНИ ЗАДАЧИ

**Задача 1.** Дадена е функцията

$$q = F(K, L) = a(K + L) + b(KL)^{\alpha},$$

където $a$, $b$ и $\alpha$ са реални, неотрицателни параметри. Да се изследва при какви стойности на тези параметри $q = F(K, L)$ е:

а) неокласическа производствена функция;

б) производствена функция с еднаква (намаляваща, постоянна, нарастваща) възвращаемост от мащаба;

в) хомогенна производствена функция.

**Решение:**

а) Пресмятаме първите частни производни на функцията:

$$F_K = a + b\alpha K^{\alpha-1}L^{\alpha} > 0 \quad \text{и} \quad F_L = a + b\alpha K^{\alpha}L^{\alpha-1} > 0.$$

Очевидно, условията $F_K > 0$ и $F_L > 0$ са изпълнени за всички комбинации на параметрите ($a$ и $b$ не могат едновременно да са нули).

За производните $F_{KK}$ и $F_{LL}$ получаваме

$$F_{KK} = b\alpha(\alpha - 1)K^{\alpha-2}L^{\alpha} \quad \text{и} \quad F_{LL} = b\alpha(\alpha - 1)K^{\alpha}L^{\alpha-2},$$

следователно условията $F_{KK} \leq 0$ и $F_{LL} \leq 0$ са изпълнени винаги, когато $\alpha \in [0,1]$.

И накрая, за втората смесена частна производна $F_{KL}$ ще имаме

$$F_{KL} = b\alpha^2 K^{\alpha-1}L^{\alpha-1} \geq 0,$$

т.е. няма допълнителни ограничения за параметрите. Окончателно, при $\alpha \in [0,1]$ (и всякакви комбинации на $a$ и $b$) разглежданата функция се явява неокласическа производствена функция.

б) Ще имаме

$$F(tK, tL) = a(tK + tL) + bt^{2\alpha}(KL)^{\alpha} = t[a(K + L) + bt^{2\alpha-1}(KL)^{\alpha}].$$

За $\alpha < 1/2$ имаме $t^{2\alpha-1} < 1$ и

$$a(K + L) + bt^{2\alpha-1}(KL)^{\alpha} < a(K + L) + b(KL)^{\alpha},$$

тогава

$$F(tK, tL) < tF(K, L)$$

и ще имаме производствена функция с намаляваща възвращаемост от мащаба.

За $\alpha = 1/2$ имаме $t^{2\alpha-1} = t^0 = 1$

$$a(K + L) + bt^{2\alpha-1}(KL)^{\alpha} = a(K + L) + b(KL)^{\alpha} \text{ и } F(tK, tL) = tF(K, L),$$

производствената функция ще бъде с постоянна възвращаемост от мащаба.

За $\alpha > 1/2$ имаме $t^{2\alpha-1} > 1$ и

$$a(K+L) + bt^{2\alpha-1}(KL)^{\alpha} > a(K+L) + b(KL)^{\alpha},$$

тогава

$$F(tK, tL) > tF(K, L)$$

и ще имаме производствена функция с нарастваща възвращаемост от мащаба.

в) При $a = 0$ ще имаме хомогенна производствена функция със степен на хомогенност $2\alpha$ (мултипликативна производствена функция).

При $b = 0$ степента на хомогенност е 1 (линейна производствена функция).

При $a \neq 0$ и $b \neq 0$ хомогенна функция (от степен 1) се получава само при $\alpha = 1/2$. При всички останали комбинации на параметрите функцията не е хомогенна.

**Задача 2.** Да се намери технологичната норма на заместване на труд с капитал и еластичността на заместване за производствените функции

(а) $q = aL^{0,2}K^{0,5}$, (б) $q = (2L^{0,5} + K^{0,5})^2$

ако в производството са изразходвани 2 хиляди работни дни в годината, а вложеният капитал е 50 милиона лв. Ако капиталът бъде намален до 48 милиона лв. с колко трябва да се увеличат работните дни, за да се произведе същото количество.

**Решение:**

(а) За технологичната норма на заместване на труд с капитал ще имаме

$$S_K = \frac{F_L}{F_K} = \frac{0,2aK^{0,5}}{L^{0,8}} \frac{K^{0,5}}{0,5aL^{0,2}} = 0,4\frac{K}{L}.$$

При $K = 50$ и $L = 2$ получаваме $S_K = 10$. От друга страна $S_K = -\frac{dK}{dL} \cong -\frac{\Delta K}{\Delta L}$. тъй като $\Delta K = -2$, то от $S_K = 10 = -\frac{(-2)}{\Delta L}$ , получаваме $\Delta L = 0,2$, т.е. ако капиталът бъде намален до 48 милиона лв., то трудът трябва да се увеличи до 2,2 хиляди работни дни, за да се произведе същото количество.

За да пресметнем еластичността на заместването на труд с капитал, трябва да изразим $S_K$ чрез $\frac{K}{L} = k$ – съотношението капитал/труд. Имаме $S_K = 0,4k$, следователно

$$\sigma_K{}^{-1} = \frac{dS_K(k)}{dk} \frac{k}{S_K(k)} = 0,4\frac{k}{0,4k} = 1 \quad \text{и} \quad \sigma_K = 1.$$

(б) За технологичната норма на заместване на труд с капитал получаваме

$$S_K = \frac{F_L}{F_K} = \frac{2(2L^{0,5} + K^{0,5}) \cdot 2 \cdot 0,5}{L^{0,5}} \frac{K^{0,5}}{2(2L^{0,5} + K^{0,5}) \cdot 0,5} = 2\frac{K^{0,5}}{L^{0,5}}.$$

При $K = 50$ и $L = 2$ ще имаме $S_K = 10$. Тогава получаваме същата замяна капитал/труд, както в (а).

Да пресметнем еластичността на заместването на труд с капитал. Имаме $S_K = 2\sqrt{k}$, следователно

$$\sigma_K{}^{-1} = \frac{dS_K(k)}{dk}\frac{k}{S_K(k)} = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{k}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{2}.$$

**Задача 3.** За технологии, зададени чрез производствените функции

(1) $q = L^{0,5}K^{0,5}$, (2) $q = L^{0,5} + K^{0,5}$

Да се намери уравнението на изоквантата, минаваща през точката $(L, K) = (4,9)$, както и уравнението на допирателната към тази изокванта в същата точка.

**Решение:**

(1) Пресмятаме количеството, което може да се произведе при $(L, K) = (4,9)$. Ще имаме $q(L = 4, K = 9) = \sqrt{4}\sqrt{9} = 6$. Тогава уравнението на въпросната изокванта е $L^{0,5}K^{0,5} = 6$ (или $LK = 36$). Нормалният вектор на допирателната към тази линия има координати $(F_L, F_K) = \left(0,5\frac{K^{0,5}}{L^{0,5}}, 0,5\frac{L^{0,5}}{K^{0,5}}\right) = \left(0,5\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}, 0,5\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{3}\right)$. Тогава уравнението на допирателната е

$$\frac{3}{4}(L - 4) + \frac{1}{3}(K - 9) = 0$$

или $9L + 4K = 72$.

(2) Имаме $q(L = 4, K = 9) = \sqrt{4} + \sqrt{9} = 5$ и уравнението на изоквантата е $\sqrt{L} + \sqrt{K} = 5$. Нормалният вектор на допирателната към тази линия има координати $(F_L, F_K) = \left(0,5\frac{1}{L^{0,5}}, 0,5\frac{1}{K^{0,5}}\right) = \left(\frac{0,5}{\sqrt{4}}, \frac{0,5}{\sqrt{9}}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$. Тогава уравнението на допирателната е

$$\frac{1}{4}(L - 4) + \frac{1}{6}(K - 9) = 0$$

или $3L + 2K = 30$.

**Задача 4**. Дадени са производствените функции:

(1) $q = 0{,}25LK^{\frac{1}{2}}$, (2) $q = 2L + 0{,}2K$, (3) $q = L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{3}}$, (4) $q = L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{4}}$, (5) $q = L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}$, (6) $q = L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{2}{3}}$, (7) $q = \left(L^{\frac{1}{2}} + 3K^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}$, (8) $q = (L^{-2} + 8K^{-2})^{-\frac{1}{2}}$, (9) $q = (4L^{-1} + 9K^{-1})^{-\frac{1}{2}}$, (10) $q = L^{\frac{1}{2}} + K^{\frac{1}{2}}$, (11) $q = min\{0{,}2K, 0{,}5L\}$.

(а) Да се намери степента им на хомогенност и да се направят изводи за възвращаемостта относно мащаба;

(б) да се установи оптималното съотношение на ресурсите $K/L$ при дадени цени: $u$ на капитала и $v$ на труда.

(в) да се намерят функцията на разходи на фирмата $C = C(q, u, v)$ и функциите на Хиксово търсене на ресурси $K = K(q, u, v)$ и $L = L(q, u, v)$.

**Решение:**

(а) функцията, зададена в (1) е хомогенна от степен 3/2 и с нарастваща възвращаемост относно мащаба; в (2) имаме производствена функция със степен на хомогенност 1 и с постоянна възвращаемост относно мащаба; в (3) – степен на хомогенност 2/3, с намаляваща възвращаемост; в (4) - степен на хомогенност 3/4, с намаляваща възвращаемост; в (5) и (6) степента на хомогенност е 1 и, следователно възвращаемостта относно мащаба е постоянна; в (7) степента на хомогенност е 2/3, намаляваща възвращаемост; в (8) степента на хомогенност е 1, постоянна възвращаемост; в (9) степента на хомогенност е 1/2, намаляваща възвращаемост; в (10) степента на хомогенност е 1/2, намаляваща възвращаемост и в (11) имаме хомогенна производствена функция от степен 1 с постоянна възвращаемост относно мащаба.

(б) Оптималното съотношение на ресурсите $K/L$ при дадени цени: $u$ на капитала и $v$ на труда се постига при изпълнение на равенството

$$S_{KL} = \frac{F_K}{F_L} = \frac{u}{v}.$$

При мултипликативна производствена функция $q = AK^{\alpha}L^{\beta}$ можем да използваме условието за оптималност

$$\frac{uK}{vL} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Такива са функциите в (1), (3), (4), (5) и (6), следователно за (1) ще имаме

$$\frac{uK}{vL} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{K}{L} = \frac{1}{2}\frac{v}{u},$$

за (3)

$$\frac{uK}{vL} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{K}{L} = \frac{v}{u},$$

за (4)

$$\frac{uK}{vL} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{K}{L} = \frac{1}{2}\frac{v}{u},$$

за (5)

$$\frac{uK}{vL} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{K}{L} = \frac{v}{u}$$

и за (6)

$$\frac{uK}{vL} = 2 \quad \text{и} \quad \frac{K}{L} = 2\frac{v}{u}.$$

При производствена $CES$ −функция

$$q = (aK^{\rho} + bL^{\rho})^{\frac{\gamma}{\rho}}, \rho < 1 \text{ и } \rho \neq 0;\ 0 < \gamma \leq 1$$

ще имаме

$$F_K = \frac{\gamma}{\rho}(aK^{\rho} + bL^{\rho})^{\frac{\gamma}{\rho}-1} a\rho K^{\rho-1} \quad \text{и} \quad F_L = \frac{\gamma}{\rho}(aK^{\rho} + bL^{\rho})^{\frac{\gamma}{\rho}-1} b\rho L^{\rho-1},$$

следователно

$$S_{KL} = \frac{F_K}{F_L} = \frac{aK^{\rho-1}}{bL^{\rho-1}} = \frac{u}{v} \quad \text{и} \quad \frac{K}{L} = \left(\frac{bu}{av}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}.$$

Такива са функциите от (7), (8), (9) и (10). За тях ще имаме

за (7) $a = 3$, $b = 1$ и $\rho = 1/2$:

$$\frac{K}{L} = \left(\frac{u}{3v}\right)^{-2} \Longrightarrow \frac{K}{L} = \frac{9v^2}{u^2},$$

за (8) $a = 8$, $b = 1$ и $\rho = -2$:

$$\frac{K}{L} = \left(\frac{u}{8v}\right)^{-\frac{1}{3}} = 2\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{1}{3}},$$

за (9) $a = 9$, $b = 4$ и $\rho = -1$:

$$\frac{K}{L} = \left(\frac{4u}{9v}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{1}{2}},$$

и за (10) $a = 1$, $b = 1$ и $\rho = 1/2$:

$$\frac{K}{L} = \left(\frac{u}{v}\right)^{-2} \Longrightarrow \frac{K}{L} = \frac{v^2}{u^2}.$$

Производствената функция в (2) е линейна. За нея ще имаме

$$S_{KL} = \frac{F_K}{F_L} = \frac{0{,}2}{2} = \frac{u}{v},$$

следователно само при специфичното съотношение на цените $v = 10u$ ще имаме оптимално разпределение на ресурсите, и то за произволни количества от тези ресурси.

В (11) имаме производствена функция на Леонтиев. При нея оптимумът се достига при изпълнение на равенството

$$q = 0{,}2K = 0{,}5L,$$

т.е. при

$$\frac{K}{L} = 2{,}5$$

ще имаме оптимално разпределение на ресурсите, независимо от техните цени.

(в) За намирането на разходната функция има два алгоритъма, които ще илюстрираме чрез функцията, зададена в (1).

**Алгоритъм, използващ оптималното разпределение на ресурсите.**

А. Изразяваме $K$ чрез $L$ (използвайки оптималното съотношение на ресурсите). В случая ще имаме

$$K = \frac{vL}{2u}.$$

Б. Заместваме така получения израз в производствената функция и по този начин $q$ се изразява само чрез $L$ (при условие на оптимално разпределение на $K$ и $L$). За този пример получаваме

$$q = \frac{1}{2^2}\left(\frac{vL}{2u}\right)^{\frac{1}{2}} L = \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}}.$$

В. Намираме обратната функция, т.е. изразяваме $L$ чрез $q$:

$$L = 2^{\frac{5}{3}}\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{3}} q^{\frac{2}{3}}.$$

Г. Сега, използвайки израза от А., изразяваме $K$ чрез $q$:

$$K = \frac{1}{2}\frac{v}{u}2^{\frac{5}{3}}\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{2}{3}}q^{\frac{2}{3}}.$$

Д. Накрая, заместваме получените изрази за $L$ (от В.) и $K$ (от Г.) в израза $C = uK + vL$ и получаваме функцията на разходи $C = C(q)$ ($u$, $v$ – параметри). В този случай ще имаме

$$C = uK + vL = u2^{\frac{2}{3}}\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{2}{3}}q^{\frac{2}{3}} + v2^{\frac{5}{3}}\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}q^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{5}{3}}u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}q^{\frac{2}{3}}$$
$$= 3 \cdot 2^{\frac{2}{3}}u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}q^{\frac{2}{3}}.$$

**Алгоритъм, използващ определението на функцията на разходите.** Да припомним, че разходната функция $C = C(q)$ се определя при положение, че разходите за производство на определеното количество са минимални.

А. От производствената функция изразяваме $K$ чрез $L$ ($q$-параметър):

$$K = \frac{16q^2}{L^2}.$$

Б. Заместваме така полученото $K$ в израза $C = uK + vL$ и по този начин получаваме $C$ като функция само на $L$:

$$C = uK + vL = u\frac{16q^2}{L^2} + vL = C(L).$$

В. Намираме това $L$ при което горната функция $C(L)$ достига своя минимум. Условието от първи ред за тази оптимизационна задача е

$$C'(L) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2^5q^2u}{L^3} + v = 0 \text{ и } L = 2^{\frac{5}{3}}\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}}.$$

(условието от втори ред е изпълнено автоматично).

Г. Така получения израз за $L$ заместваме в $C(L)$ и получаваме $C(q)$:

$$C(q) = \frac{2^4uq^2}{\left(2^{\frac{5}{3}}\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}}\right)^2} + v2^{\frac{5}{3}}\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}q^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{5}{3}}u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}q^{\frac{2}{3}} = 3 \cdot 2^{\frac{2}{3}}u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}q^{\frac{2}{3}}.$$

(3) По първия алгоритъм получаваме: след А.:

$$K = \frac{v}{u}L,$$

след Б.:

$$q = \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{1}{3}} L^{\frac{2}{3}},$$

след В.:

$$L = \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{2}},$$

след Г.:

$$K = \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{2}},$$

след Д.:

$$C = uK + vL = u\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{2}} + v\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{2}} = u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}} = 2u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}}.$$

(4) Ще имаме последователно

$$K = \frac{vL}{2u}, \qquad q = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{1}{4}} L^{\frac{3}{4}}, \qquad L = 2^{\frac{1}{3}}\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{3}} q^{\frac{4}{3}}, \qquad K = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{2}{3}} q^{\frac{4}{3}},$$

$$C = uK + vL = u\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{2}{3}} q^{\frac{4}{3}} + v2^{\frac{1}{3}}\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{3}} q^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}q^{\frac{4}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}q^{\frac{4}{3}}$$
$$= \left(\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} + 2^{\frac{1}{3}}\right)u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}q^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2^{\frac{2}{3}}}u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}q^{\frac{4}{3}}.$$

(5) Получаваме

$$K = \frac{vL}{u}, q = \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{1}{2}} L, L = \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{2}} q, K = \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{1}{2}} q, C = uK + vL = u\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{1}{2}} q + v\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{2}} q$$
$$= u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}q + u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}q = 2u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}q.$$

(6) Ще имаме

$$K = 2\frac{v}{u}L, q = 2^{\frac{2}{3}}\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{2}{3}} L, L = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{2}{3}} q, K = 2^{\frac{1}{3}}\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{1}{3}} q, C = uK + vL$$
$$= u2^{\frac{1}{3}}\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{1}{3}} q + v\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{2}{3}} q = 2^{\frac{1}{3}}u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}}q + \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}}q$$
$$= \left(2^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right)u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}}q = \frac{3}{2^{\frac{2}{3}}}u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}}q.$$

(7) А. Изразяваме $K$ чрез $L$:

$$K = \frac{9v^2}{u^2} L.$$

Б. Заместваме получения израз в производствената функция и по този начин $q$ се изразява само чрез $L$:

$$q = \left(L^{\frac{1}{2}} + 3\frac{3v}{u} L^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{u+9v}{u}\right)^{\frac{4}{3}} L^{\frac{2}{3}}.$$

В. Намираме обратната функция, т.е. изразяваме $L$ чрез $q$:

$$L = \left(\frac{u}{u+9v}\right)^2 q^{\frac{3}{2}}.$$

Г. Използвайки израза от А., изразяваме $K$ чрез $q$:

$$K = \frac{9v^2}{u^2}\left(\frac{u}{u+9v}\right)^2 q^{\frac{3}{2}} = \frac{9v^2}{(u+9v)^2} q^{\frac{3}{2}}.$$

Д. Заместваме получените изрази за $L$ (от В.) и $K$ (от Г.) в израза $C = uK + vL$ и получаваме функцията на разходи $C = C(q)$:

$$C = uK + vL = u\frac{9v^2}{(u+9v)^2} q^{\frac{3}{2}} + v\frac{u^2}{(u+9v)^2} q^{\frac{3}{2}} = \frac{9uv^2 + u^2v}{(u+9v)^2} q^{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{uv(u+9v)}{(u+9v)^2} q^{\frac{3}{2}} = \frac{uv}{u+9v} q^{\frac{3}{2}}.$$

(9) Последователно получаваме

$$K = \frac{3}{2}\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{1}{2}} L, q = \frac{v^{\frac{1}{4}}}{\left(6u^{\frac{1}{2}} + 4v^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}} L^{\frac{1}{2}}, L = \frac{\left(6u^{\frac{1}{2}} + 4v^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{v^{\frac{1}{2}}} q^2,$$

$$K = \frac{3}{2}\frac{\left(6u^{\frac{1}{2}} + 4v^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{1}{2}}} q^2,$$

$$C = uK + vL = u\frac{3}{2}\frac{\left(6u^{\frac{1}{2}} + 4v^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{1}{2}}} q^2 + v\frac{\left(6u^{\frac{1}{2}} + 4v^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{v^{\frac{1}{2}}} q^2$$

$$= \frac{3u^{\frac{1}{2}} + 2v^{\frac{1}{2}}}{2}\left(6u^{\frac{1}{2}} + 4v^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} q^2 = \frac{\left(3u^{\frac{1}{2}} + 2v^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} q^2.$$

(10) Ще имаме

$$K = \frac{v^2}{u^2}L, q = \frac{u+v}{u}L^{\frac{1}{2}}, L = \frac{u^2}{(u+v)^2}q^2, K = \frac{v^2}{(u+v)^2}q^2,$$

$$C = uK + vL = u\frac{v^2}{(u+v)^2}q^2 + v\frac{u^2}{(u+v)^2}q^2 = \frac{uv}{u+v}q^2.$$

(2) Тъй като при линейната производствена функция отсъства съотношение за оптимално разпределение на ресурсите, ние не можем да намерим и израз за функцията на разходите.

(11) Тъй като за производствената функция на Леонтиев оптимумът се достига при изпълнение на равенството

$$q = 0{,}2K = 0{,}5L,$$

то $K = 5q$ и $L = 2q$. Тогава, за разходите ще имаме

$$C = uK + vL = u \cdot 5q + v \cdot 2q = (5u + 2v)q.$$

**Задача 5.** За тези от производствените функции, зададени в зад. 2 при които са изпълнени условията за наличие на глобален максимум на печалбата да се намерят: функцията на предлагане на готова продукция $q = q(p, u, v)$, функцията на търсене на труд $L = L(p, u, v)$ , функцията на търсене на капитал $K = K(p, u, v)$ и функцията на печалба на фирмата $\Pi = \Pi(p, u, v)$.

**Решение:**

Мултипликативните функции, зададени в (3) $q = L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{3}}$ и (4) $q = L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{4}}$ и $CES$ −функциите (7) $q = \left(L^{\frac{1}{2}} + 3K^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}$, (9) $q = (4L^{-1} + 9K^{-1})^{-\frac{1}{2}}$ и (10) $q = L^{\frac{1}{2}} + K^{\frac{1}{2}}$ изпълняват условията за наличие на глобален максимум на печалбата. Това е така поради тяхната строга изпъкналост. Освен това те са хомогенни функции със степен на хомогенност по-малка от единица и производствени функции с намаляваща възвращаемост от мащаба.

(3) Ще покажем два алгоритъма за решаване на задачата.

**Алгоритъм, основаващ се на намерена функция на разходите.**

А. Намиране на обратната функция на предлагане на стоката. Тъй като в предишната задача сме установили, че

$$C = 2u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}},$$

а е известно, че обратната функция на предлагане се задава чрез равенството

$$p = MC(q) = C'(q),$$

то в разглеждания случай ще имаме

$$p = C'(q) = 3u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}.$$

Б. Намиране на функцията на предлагане на стоката $q = q(p, u, v)$. Това се получава, като от горния израз изразим $q$ чрез $p$ (като гледаме на $u$ и $v$ като на параметри). Ще имаме

$$p^2 = 9uvq \Longrightarrow q = \frac{p^2}{9uv}.$$

В. Намиране на функциите на търсене на ресурси $K = K(p, u, v)$ и $L = L(p, u, v)$. Тъй като в предишната задача сме намерили изрази за $K$ и $L$ а именно

$$K = \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{2}} \quad \text{и} \quad L = \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{2}},$$

то ако заместим в тях $q$ от функцията на предлагане ще получим изразите за въпросните функции. Ще имаме

$$K = \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{p^2}{9uv}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{p^3}{27u^2v} \quad \text{и} \quad L = \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{p^2}{9uv}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{p^3}{27uv^2}.$$

Г. Намиране на функцията на печалбата $\Pi = \Pi(p, u, v)$. Тя се пресмята така:

$$\Pi = \Pi(p, u, v) = R(p, u, v) - C(p, u, v) = pq(p, u, v) - \big(uK(p, u, v) + vL(p, u, v)\big)$$
$$= p\frac{p^2}{9uv} - \left(u\frac{p^3}{27u^2v} + v\frac{p^3}{27uv^2}\right) = \frac{p^3}{9uv} - \frac{2p^3}{27uv} = \frac{p^3}{27uv}.$$

**Алгоритъм, използващ директния подход.**

А. Намиране на функциите на търсене на ресурси от

$$F_K = \frac{u}{p} \quad \text{и} \quad F_L = \frac{v}{p}.$$

В конкретния случай ще имаме

$$F_K = \frac{L^{\frac{1}{3}}}{3K^{\frac{2}{3}}} = \frac{u}{p} \quad \text{и} \quad F_L = \frac{K^{\frac{1}{3}}}{3L^{\frac{2}{3}}} = \frac{v}{p}.$$

Гледаме на горните равенства като на система от две уравнения с две неизвестни – $K$ и $L$. Решаваме я и получаваме (очаквано)

$$K = \frac{p^3}{27u^2v} \quad \text{и} \quad L = \frac{p^3}{27uv^2}.$$

Б. Намиране на функцията на предлагане, като се използва производствената функция. В израза за производствената функция заместваме $K$ и $L$ с получените по-горе изрази

$$q = L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{p^3}{27uv^2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{p^3}{27u^2v}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{p}{3u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}}\frac{p}{3u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}}} = \frac{p^2}{9uv}.$$

В. Намиране на функцията на печалбата $\Pi = \Pi(p, u, v)$ по същия начин, както в предишния алгоритъм.

За другите ПФ, допускащи абсолютен максимум на печалбата, ще използваме първия алгоритъм.

(4) След А. получаваме

$$p = C'(q) = \left(\frac{3}{2^{\frac{2}{3}}}u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}q^{\frac{4}{3}}\right)' = 2^{\frac{4}{3}}u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}q^{\frac{1}{3}},$$

след Б.

$$q = \frac{p^3}{16uv^2}.$$

След В.

$$K = \frac{p^4}{64u^2v^2} \quad \text{и} \quad L = \frac{p^4}{32uv^3}.$$

За функцията на печалбата получаваме

$$\Pi = \Pi(p, u, v) = R(p, u, v) - C(p, u, v) = pq(p, u, v) - \big(uK(p, u, v) + vL(p, u, v)\big)$$
$$= p\frac{p^3}{16uv^2} - \left(u\frac{p^4}{64u^2v^2} + v\frac{p^4}{32uv^3}\right) = \frac{p^4}{64uv^2}.$$

(7) След А. получаваме

$$p = C'(q) = \left(\frac{uv}{u + 9v}q^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3uv}{u + 9v}q^{\frac{1}{2}},$$

след Б.

$$q = \frac{4(u + 9v)^2p^2}{9u^2v^2}.$$

След В.

$$K = \frac{8(u + 9v)p^3}{3u^3v} \quad \text{и} \quad L = \frac{8(u + 9v)p^3}{27uv^3}.$$

За функцията на печалбата получаваме

$$\begin{aligned}\Pi = \Pi(p,u,v) = R(p,u,v) - C(p,u,v) = pq(p,u,v) - \big(uK(p,u,v) + vL(p,u,v)\big)\\ = p\frac{4(u+9v)^2p^2}{9u^2v^2} - \left(u\frac{8(u+9v)p^3}{3u^3v} + v\frac{8(u+9v)p^3}{27uv^3}\right)\\ = \frac{4(u+9v)^2p^3}{27u^2v^2}.\end{aligned}$$

(9) След А. за обратната функция на предлагане получаваме

$$p = C'(q) = \left(\frac{\left(3u^{\frac{1}{2}} + 2v^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}q^2\right)' = 2^{\frac{1}{2}}\left(3u^{\frac{1}{2}} + 2v^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}q,$$

след Б. намираме функцията на предлагане

$$q = \frac{p}{2^{\frac{1}{2}}\left(3u^{\frac{1}{2}} + 2v^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

След В. получаваме функциите на търсене на капитал и труд:

$$K = \frac{3p^2}{2^{\frac{3}{2}}u^{\frac{1}{2}}\left(3u^{\frac{1}{2}} + 2v^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{5}{2}}} \quad \text{и} \quad L = \frac{p^2}{2^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}\left(3u^{\frac{1}{2}} + 2v^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{5}{2}}}.$$

За функцията на печалбата получаваме

$$\begin{aligned}\Pi = \Pi(p,u,v) = R(p,u,v) - C(p,u,v) = pq(p,u,v) - \big(uK(p,u,v) + vL(p,u,v)\big)\\ = p\frac{p}{2^{\frac{1}{2}}\left(3u^{\frac{1}{2}} + 2v^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}}\\ - \left(u\frac{3p^2}{2^{\frac{3}{2}}u^{\frac{1}{2}}\left(3u^{\frac{1}{2}} + 2v^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{5}{2}}} + v\frac{p^2}{2^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}\left(3u^{\frac{1}{2}} + 2v^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{5}{2}}}\right)\\ = \frac{p^2}{2^{\frac{3}{2}}\left(3u^{\frac{1}{2}} + 2v^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

(10) След А. за обратната функция на предлагане получаваме

$$p = C'(q) = \left(\frac{uv}{u+v}q^2\right)' = \frac{2uv}{u+v}q,$$

след Б. намираме функцията на предлагане

$$q = \frac{p(u+v)}{2uv}.$$

След В. получаваме функциите на търсене на капитал и труд:

$$K = \frac{p^2}{4u^2} \quad \text{и} \quad L = \frac{p^2}{4v^2}.$$

За функцията на печалбата получаваме

$$\begin{aligned}\Pi = \Pi(p,u,v) = R(p,u,v) - C(p,u,v) = pq(p,u,v) - \big(uK(p,u,v) + vL(p,u,v)\big)\\ = p\frac{p(u+v)}{2uv} - \left(u\frac{p^2}{4u^2} + v\frac{p^2}{4v^2}\right) = \frac{p^2(u+v)}{4uv}.\end{aligned}$$

**Задача 6.** Производствената функция е $q = LK$, цената на труда е 4, а цената на капитала – 5.

(а) Какво е максималното количество продукти, което може да се произведе при разходи, не по-големи от 30;

(б) при какви минимални разходи може да се произведат не по-малко от 80 единици продукция.

**Решение:**

(а) В този случай трябва да решаваме първата основна задача на фирмата:

$$q = LK \to \max \text{ при } 4L + 5K \leq 30.$$

Условието за оптимално разпределение на ресурсите е

$$\frac{F_K}{F_L} = \frac{L}{K} = \frac{5}{4} = \frac{u}{v} \Longrightarrow 4L = 5K.$$

Заместваме в разходното ограничение и получаваме $5K + 5K = 30 \Longrightarrow K = 3$ и $L = \frac{15}{4}$. Тогава максималното произведено количество е $q_{\max} = \frac{15}{4} \cdot 3 = \frac{45}{4}$.

(б) Сега имаме да решаваме първата дуална задача на фирмата:

$$C = 4L + 5K \to \min \text{ при } LK \geq 80.$$

Условието за оптимално разпределение на ресурсите е същото и след заместването му в ограничението на задачата получаваме $\frac{5}{4}K \cdot K = 80 \Longrightarrow K = 8$ и $L = 10$.

Тогава минималният разход, за да се произведе това количество е $C_{\min} = 4 \cdot 10 + 5 \cdot 8 = 80$.