ТЕМА 4. МАТЕМАТИЧЕСКА ТЕОРИЯ НА ФИРМИТЕ – ФУНКЦИЯ НА РАЗХОДИТЕ (продължение)

ТЕОРИЯ

1. Фирмата и отрасъла. Тъй като фирмата е конкурентна, то стоката, произвеждана от нея се произвежда и от много други фирми, съставляващи отрасъл. Разглежданата фирма генерира функция на предлагане, която е обратната функция на $p = MC(q)$. Функции на предлагане генерират и другите фирми в отрасъла. Чрез агрегиране на тези функции на предлагане получаваме функцията на предлагане за отрасъла, чиято графика е S-линията на левите чертежи на рис. 8 и 9.

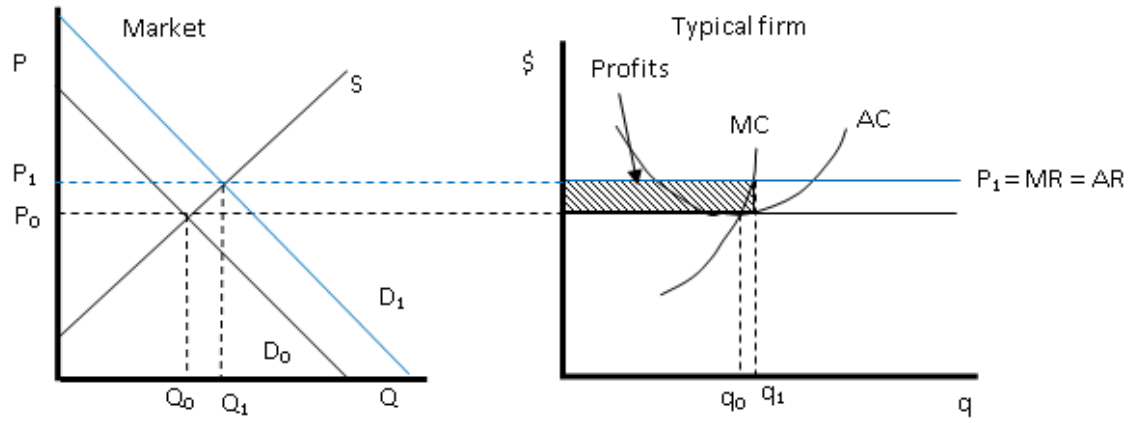


Рис. 1. Равновесие на фирмата и равновесие на отрасъла - случай на печалба за фирмата

От пресичането на тази S-линия с линията на търсене (D-линията) се определят равновесните величини на този отраслов пазар – цена и количество. Тъй като фирмата е конкурентна, тя възприема равновесната отраслова цена като даденост и за нея линията на търсене е хоризонтална ($p = const$). Тъй като линията на предлагане на фирмата е $p = MC(q)$, то равновесието за фирмата ще се получава при пресичането на хоризонталната линия на търсене и MC-линията. Ако това се случи в точката на пресичане на MC-линията с AC-линията, която е точка на минимум за последната (както е при цена P_0 на рис. 8 и 9), то тогава фирмата ще има нулева печалба. Ако обаче цената, определена от отрасловия пазар P_1 е по-голяма (по-малка) от P_0, тогава за равновесното количеството q_1, изравняващо фирменото търсене и предлагане ще имаме $P_1 = MC(q_1) > AC(q_1)$ ($P_1 = MC(q_1) < AC(q_1)$) и фирмата ще реализира печалба (загуба) в размер на $\left(P_1 - AC(q_1)\right)q_1$ ($(AC(q_1) - P_1)q_1$), равняваща се на лицето на защрихования правоъгълник на рис. 1 (рис. 2).

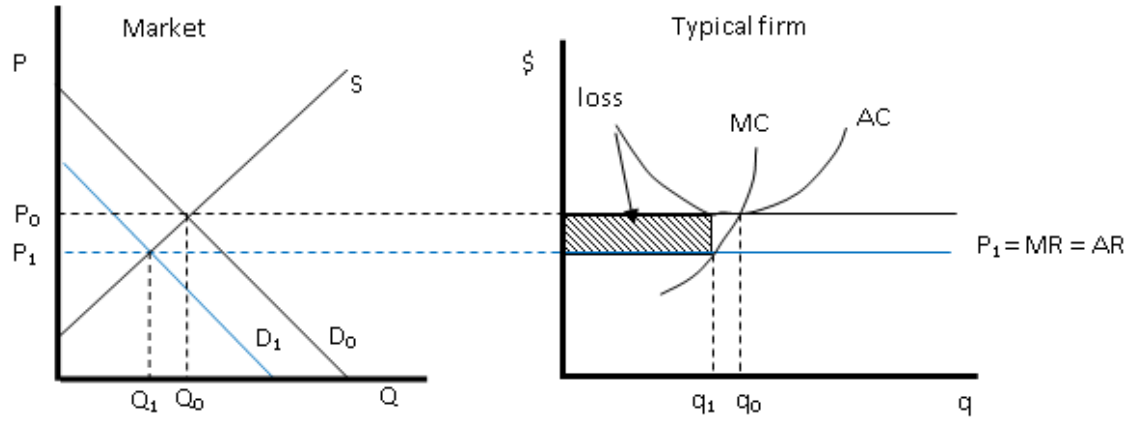


Рис. 2. Равновесие на фирмата и равновесие на отрасъла - случай на загуба за фирмата

2. Равновесие на отрасъла в дългосрочен план. Разграничението на „краткотраен период“ и „дълготраен период“ е в зависимост от това, дали производителят е ограничен или не от свои минали решения. В този смисъл, ако такова ограничение съществува, както е в краткосрочен план, съществуват и постоянни разходи. В дългосрочен план всички разходи се разглеждат като променливи, т.е. $FC = 0$.

На отрасловия пазар на съвършена конкуренция се установява цена, равна на минималните средни разходи и на маргиналните разходи по производството на стоката

$$p = AC_{min} = MC$$

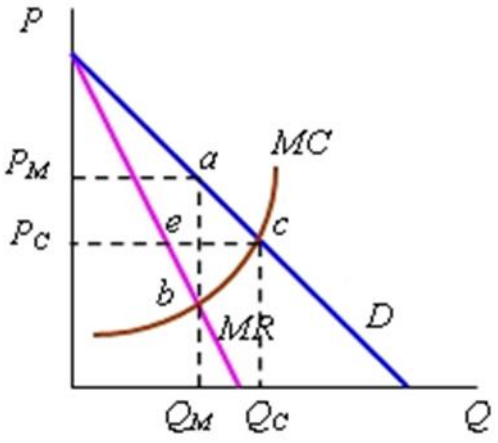
Това означава, че на пазара на съвършена конкуренция в дългосрочен план остават само фирми, които работят при нулева печалба. Това че в реалната икономика много фирми реализират печалба от дейността си се дължи на факта, че съвършената конкуренция е математико-икономическа идеализация – в икономическата практика тя не съществува. Но тя е много полезна идеализация, защото позволява (чрез сравняването с нея) да се прави оценка на основния фактор, генериращ печалбата – **пазарната власт на фирмата**.

3. Монопол. Как се реализира отрасловото равновесие в случай на монопол? Тогава цялото отраслово търсене $x = x(p)$ е насочено към фирмата-монополист, така че тя може да използва обратната функция на търсене $p = p(q)$ (за която имаме $x\big(p(q)\big) = q$) при решаване на задачата за максимализиране на печалбата си. Ще имаме

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = p(q)q - C(q)$$

Тогава условието от първи ред ще бъде

$$R'(q) = C'(q) \quad \text{или} \quad p'(q)q + p(q) = C'(q)$$



Горното условие може да се изрази така: монополът трябва да произведе количество, изравняващо маргиналните приходи с маргиналните разходи. Ако означим това количество с q_M, то ще се получава като решение на уравнението $R'(q_M) = C'(q_M)$. Цената p_M, на която монополът ще продава стоката си се определя от обратната функция на търсене, т.е. $p_M = p(q_M)$. Лесно може да се докаже, че (при една и съща функция на разходите и една и съща функция на търсене) цената на монополизирания пазар е по-висока от цената на конкурентния, а количеството е по-малко (виж графиката), т.е.

$$p_M > p_C \quad \text{и} \quad q_M < q_C$$

Тъй като при монопола винаги е изпълнено неравенството

$$p_M > C'(\, q_M)$$

в този случай се въвежда така наречения индекс на Лернер

$$I_L = \frac{p_M - C'(\, q_M)}{p_M}$$

който измерва пазарната власт на фирмата. Очевидно, при съвършена конкуренция имаме $I_L = 0$, а при монопол - $I_L \in (0, 1]$.

Забележка 1. Икономическият смисъл на неравенството $p_M > C'(\, q_M)$ се състои в това, че монополът винаги съумява да реализира стоката си в такова количество и на такава цена, че тази цена да надхвърля маргиналните разходи за производството на това количество. Това води до (виж графиката) изземване на значителна част от потребителския излишък от страна на фирмата-монополист.

Забележка 2. Условието от първи ред за максимализиране на печалбата на монопола $R'(q) = C'(q)$ е изпълнено и за конкурентната фирма, защото при нея $R(q) = pq \Longrightarrow R'(q) = p$. Разликата е, че при конкурента $p = const$ е пазарната цена, определена на отрасловия пазар от изравняването на отрасловото търсене и предлагане (където освен нашата фирма участват и много други), която цена фирмата възприема като даденост, а при монопола $p = p(q)$ е обратната функция на отраслово търсене, която монопола използва при максимализиране на печалбата си.

Забележка 3. В случая, когато разходната функция на монопола не включва променливи разходи ($C'(q) = 0$) на практика монополната фирма максимализира оборота си. Така излиза, че народната „мъдрост“, че печели този, който се стреми към максимален оборот се оказва вярна само в случай, че фирмата е монополист

на пазара и разходите ѝ не зависят от продаденото количество. За всички други фирми такова пазарно поведение е (меко казано) неоптимално.

Забележка 4. За разлика от конкурента, който максимализира печалбата си само в случай, че разходната му функция е изпъкнала, задачата за максимализиране на печалбата на монопола има решение при всяка разходна функция.

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ

Задача 1. Една фирма има функция на разходи $C(q) = 130q - 6q^2 + 0{,}1q^3$. Ако отрасъла, в който работи фирмата генерира отрасловото си равновесие на базата на функция на търсене $x(p) = 625 - 8p$ и функция на предлагане $y(p) = 6p - 460$, да се намерят равновесните стойности за отрасъла и фирмата, както и пазарния дял на фирмата в отрасъла. Да се намери печалбата на фирмата. Забележка: Предполага се, че количествата при отрасловия модел са в хиляди броя, а при фирмения – в броя.

Решение:

Отрасловото търсене $x(p)$ и предлагане $y(p)$ се изравняват $(625 - 8p = 6p - 460)$ при цена $p = 77{,}5$ и количество $q = 5$. Функцията на търсене за фирмата ще бъде $p = 77{,}5$. Изравняването на фирменото търсене и предлагане ($p = 77{,}5 = C'(q) = 130 - 12q + 0{,}3q^2$) дава две стойности за q: $q_1 = 35$ и $q_2 = 5$. Тъй като $q_2 = 5$ не е в дефиниционното множество на фирмената функция на предлагане $q \geq 30$, то фирмата ще трябва да произведе $q = 35$. Тъй като отрасловото производство е $q = 5000$, пазарният дял на фирмата в отрасъла ще възлиза на $\frac{35}{5000} \cdot 100\% = 0{,}7\%$. Печалбата е $\Pi(35) = \big(p - AC(35)\big)35 = (77{,}5 - 42{,}5)35 = 1225$.

Задача 2. В един отрасъл с функция на търсене $x = 32 - 5p$ функционират три групи фирми: 10 фирми , всяка от които има функция на разходите $C_1 = q_1 + 0{,}5{q_1}^2$; 10 фирми с функции на разходите $C_2 = 2q_2 + {q_2}^2$ и 15 фирми с функции на разходите $C_3 = 3q_3 + 1{,}5{q_3}^2$.

(а) Да се намерят функциите на предлагане на фирмите и отрасловата функция на предлагане.

(б) Да се намери цената на стоката и общото реализирано количество от нея при условие на съвършена конкуренция в отрасъла.

(в) Да се намерят произведените количества от всяка от фирмите, приходите, разходите и печалбите им.

Решение.

(а) Обратната функция на предлагане за всяка от фирмите от първата група ще бъде $p = C_1{}' = 1 + q_1$. Тогава функцията на фирмено предлагане е $q_1 = -1 + p$. Тъй като фирмите са общо 10 на брой с еднакви фирмени функции на предлагане, то общото предлагане за фирмите от първата група е $Y_1 = -10 + 10p$. Аналогично за всяка от фирмите от втората група получаваме обратна функция на фирмено предлагане $p = C_2{}' = 2 + 2q_2$, функция на фирмено предлагане $q_2 = -1 + 0{,}5p$ и фукция на общо предлагане за фирмите от групата $Y_2 = -10 + 5p$. За фирмите от третата група имаме $p = C_3{}' = 3 + 3q_3$, $q_3 = -1 + \frac{1}{3}p$ и $Y_3 = -15 + 5p$.

За да получим функцията на отраслово предлагане чрез агрегиране на функциите на групови предлагания Y_1, Y_2 и Y_3 трябва да отбележим, че $Y_1 \geq 0$ за $p \geq 1$; $Y_2 \geq 0$ за $p \geq 2$ и $Y_3 \geq 0$ за $p \geq 2$ (с други думи, фирмите от втората група предлагат стоката, ако цената ù е над 2 парични единици, за по-ниска цена – не предлагат).

Тогава за функцията на отраслово предлагане получаваме

$$Y(p) = \begin{cases} Y_1 = -10 + 10p \text{ при } p \in [1, 2) \\ Y_1 + Y_2 = -20 + 15p \text{ при } p \in [2, 3) \\ Y_1 + Y_2 + Y_3 = -35 + 20p \text{ при } p \in [3, +\infty) \end{cases}$$

(б) За да получим равновесните цена и количество ще трябва да приравним полученото отраслово предлагане с отрасловото търсене. Ще разгледаме отделно трите интервала за p.

При $p \in [1, 2)$ имаме $x(p) = 32 - 5p = -10 + 10p = Y(p) \Longrightarrow p = 2{,}8 \notin [1, 2)$.

При $p \in [2, 3)$ $x(p) = 32 - 5p = -20 + 15p \Longrightarrow p = 2{,}6 \in [2, 3)$ и

при $p \in [3, +\infty)$ $x(p) = 32 - 5p = -35 + 20p \Longrightarrow p = 2{,}68 \notin [3, +\infty)$.

Така получаваме окончателно, че равновесната цена е $p = 2{,}6$, а равновесното количество $q = x(2{,}6) = Y(2{,}6) = 19$.

(в) В интервала $p = 2{,}6 \in [2, 3)$ за отрасловото предлагане имаме $Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p)$. Тъй като $Y_1(2{,}6) = 16$ и $Y_2(2{,}6) = 3$, всяка от фирмите от първата група ще произвежда количество $q_1 = 1{,}6$, всяка от фирмите от втората група - $q_2 = 0{,}3$, а фирмите от третата група няма да произвеждат нищо ($q_3 = 0$).

Всяка фирма от първата група има приходи $R_1 = pq_1 = 2{,}6.1{,}6 = 4{,}16$, разходи $C_1 = C_1(1{,}6) = 1{,}6 + 0{,}5(1{,}6)^2 = 2{,}88$ и печалба $\pi_1 = R_1 - C_1 = 4{,}16 - 2{,}88 = 1{,}28$. За всяка фирма от втората група: приходи $R_2 = pq_2 = 2{,}6.0{,}3 = 0{,}78$, разходи $C_2 = C_2(0{,}3) = 2.0{,}3 + (0{,}3)^2 = 0{,}69$ и печалба $\pi_2 = R_2 - C_2 = 0{,}78 - 0{,}69 = 0{,}09$. За фирмите от третата група (поради липса на предлагане при тази цена) $R_3 = C_3 = \pi_3 = 0$.

Задача 3. В даден отрасъл фирмите работят по технология, предполагащи следната зависимост на общите разходи от произведеното количество: $C(q) = 10 + 8q + 4q^2$. Предполага се, че функцията на пазарно търсене за отрасъла е $Q^D = 120 - 3p$.

(а) Ако в даден момент в отрасъла функционират 20 еднакви фирми, какви количества и на каква цена ще реализират те продукцията си в краткосрочен план? Каква печалба ще има всяка от тях?

(б) Да се намери отрасловата функция на разходи.

(в) Каква ще бъде цената и количеството произведена продукция в дългосрочен план? Колко фирми ще функционират в отрасъла?

Решение:

(а) Конкурентната фирма има обратна функция на предлагане

$$p = MC(q) = C'(q) = 8 + 8q.$$

Тогава индивидуалната функция на предлагане на всяка от 20-те фирми ще бъде

$$q^S = \frac{p}{8} - 1,$$

а отрасловата функция на предлагане ще бъде

$$Q^S = 20q^S = 20\left(\frac{p}{8} - 1\right) = 2{,}5p - 20.$$

От изравняването на отрасловото търсене и предлагане получаваме равновесната цена

$$Q^D = Q^S \Leftrightarrow 120 - 3p = 2{,}5p - 20 \Leftrightarrow p = \frac{280}{11} \approx 25{,}45.$$

Като заместим тази равновесна цена във функцията на предлагане ще получим равновесното количество

$$Q = Q^S(25{,}45) = 2{,}5 \cdot 25{,}45 - 20 = 43{,}625.$$

Тогава всяка от конкуриращите се фирми ще произвежда една двадесета от това количество

$$q = \frac{Q}{20} = \frac{43{,}625}{20} = 2{,}18.$$

Приходите на конкурентната фирма ще възлизат на

$$R = pq = 25{,}45 \cdot 2{,}18 = 55{,}48,$$

а разходите –

$$C = C(q) = C(2{,}18) = 10 + 8 \cdot 2{,}18 + 4 \cdot 2{,}18^2 = 46{,}44.$$

Печалбата на тази фирма ще е

$$\pi = R - C = 55{,}48 - 46{,}44 = 9{,}04.$$

(б) Функцията на разходите за целия отрасъл не е сума от разходите на отделните фирми. Как се получава тази функция? Да я означим с $\bar{C}(q)$. За обратната функция на предлагане на отрасъла ще имаме

$$p = \bar{C}'(q)$$

От друга страна, получената в решението функция на отраслово предлагане е

$$Q^S = 2{,}5p - 20$$

с обратна функция

$$p = 8 + 0{,}4q.$$

Така, след интегриране на равенството

$$(p =)\bar{C}'(q) = 8 + 0{,}4q$$

получаваме

$$\bar{C}(q) = c_0 + 8q + 0{,}2q^2.$$

Интеграционната константа c_0 намираме от условието

$$\bar{C}(0) = c_0 = 20C(0) = 20 \cdot 10 = 200.$$

Така окончателно, за функцията на разходи за отрасъла получаваме

$$\bar{C}(q) = 200 + 8q + 0{,}2q^2.$$

(в) В дългосрочен план, при наличието на съвършена конкуренция в отрасъла, за фирмите не се предвижда печалба. По-точно, цената се определя от равенството

$$p = AC_{min}(q) = MC(q),$$

където с $AC(q)$ сме означили функцията на средните разходи. Тогава ще имаме

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{10 + 8q + 4q^2}{q} = \frac{10}{q} + 8 + 4q.$$

За да намерим този минимум ще трябва да нулираме първата производна на функцията:

$$AC'(q) = 0 \Leftrightarrow -\frac{10}{q^2} + 4 = 0.$$

Решавайки горното уравнение получаваме критичната точка $q^2 = 2{,}5 \Longrightarrow q = \sqrt{2{,}5} = 1{,}58$. Тъй като

$$AC''(q) = \frac{20}{q^3} > 0,$$

то става дума за екстремум от тип минимум. Сега да пресметнем този минимум от който ще получим равновесната цена в дългосрочен план:

$$p = AC_{min}(q) = AC(1{,}58) = \frac{10}{1{,}58} + 8 + 4 \cdot 1{,}58 = 6{,}33 + 8 + 6{,}32 = 20{,}65.$$

Равновесното количество за отрасъла ще получим, разбира се, от функцията на отраслово търсене:

$$Q = Q^D(20{,}65) = 120 - 3 \cdot 20{,}65 = 120 - 61{,}95 = 58{,}05.$$

Тъй като една от фирмите ще произвежда количество $q = 1{,}58$, а общото за отрасъла количество е $Q = 58{,}05$, то броят n на фирмите в отрасъла ще възлиза на

$$n = \frac{Q}{q} = \frac{58{,}05}{1{,}58} = 36{,}74 \approx 37.$$

Задача 4. Функцията на разходите в дългосрочен план за даден отрасъл е $C(q) = 50q - 4q^2 + 0{,}5q^3$, а функцията на търсене за стоката, произвеждана от отрасъла - $Q^D = 330 - 5p$. Да се пресметнат равновесните стойности на цената, количеството и оптималния брой фирми в случай на съвършена конкуренция. **Решение:**

При пазарите на съвършена конкуренция в дългосрочен план печалбата на фирмите е нулева, следователно равновесната пазарна цена е минимума на средните разходи, т.е.

$$p = AC_{min}(q) = MC(q)\,.$$

За функцията на средните разходи ще имаме

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{50q - 4q^2 + 0{,}5q^3}{q} = 50 - 4q + 0{,}5q^2.$$

Намираме критичната точка на функцията на средните разходи:

$$AC'(q) = 0 \Leftrightarrow -4 + q = 0 \Longrightarrow q = 4.$$

Тъй като

$$AC''(q) = 1 > 0,$$

то въпросният екстремум е от тип минимум.

Пресмятайки този минимум намираме въпросната равновесна цена

$$p = AC_{min}(q) = AC(4) = 42.$$

Сега от функцията на пазарно търсене ще определим общото количество от стоката, което ще трябва да произведат всички фирми в отрасъла:

$$Q = Q^D(42) = 330 - 5 \cdot 42 = 120.$$

Тогава оптималният брой n на фирмите в отрасъла ще бъде

$$n = \frac{Q}{q} = \frac{120}{4} = 30.$$

Задача 5. Нека отрасъла от зад. 2 да е монополизиран (това може да стане чрез корпоративни сливания или изкупувания).

(а) Да се намерят цената, количеството и индекса на Лернер при условие на монополизиране на отрасъла.

(б) да се намери отрасловата функция на разходите.

(в) Да се намерят приходите, разходите и печалбата на монопола.

Решение:

(а) При монопола равновесието се постига, когато $R'(q) = C'(q)$. От друга страна $p = C'(q)$ е обратната функция на предлагане при условие на съвършенна конкуренция. В решението на зад. 2 ние намерихме отрасловата функция на предлагане $q = Y(p)$, като количеството е функция на цената. Трябва да обърнем тази функция. Получаваме

$$p = \begin{cases} 1 + \dfrac{q}{10} & \text{при} \quad q \in [0, 10) \\ \dfrac{4}{3} + \dfrac{q}{15} & \text{при} \quad q \in [10, 25) \\ \dfrac{7}{4} + \dfrac{q}{20} & \text{при} \quad q \in [25, \infty) \end{cases}$$

или

$$C'(q) = \begin{cases} 1 + \dfrac{q}{10} & \text{при} \quad q \in [0, 10) \\ \dfrac{4}{3} + \dfrac{q}{15} & \text{при} \quad q \in [10, 25) \\ \dfrac{7}{4} + \dfrac{q}{20} & \text{при} \quad q \in [25, \infty) \end{cases}$$

Използвайки отрасловото търсене, намираме общия пазарен оборот като функция на количеството

$$R(q) = p(q)q = \left(\frac{32}{5} - \frac{1}{5}q\right)q = \frac{32}{5}q - \frac{1}{5}q^2$$

($p(q) = \frac{32}{5} - \frac{1}{5}q$ е обратната функция на търсене). Тогава ще имаме

$$R'(q) = \frac{32}{5} - \frac{2}{5}q,$$

което е валидно за всяко q. Така, че условието от първи ред $C'(q) = R'(q)$ ни дава:

1) за $q \in [0, 10)$ $\frac{32}{5} - \frac{2}{5}q = 1 + \frac{q}{10}$ с решение $q = 10{,}8 \notin [0, 10)$;

2) за $q \in [10, 25)$ $\frac{32}{5} - \frac{2}{5}q = \frac{4}{3} + \frac{q}{15}$ с решение $q = \frac{76}{7} \in [10, 25)$ и

3) за $q \in [25, \infty)$ $\frac{32}{5} - \frac{2}{5}q = \frac{7}{4} + \frac{q}{20}$ с решение $q = \frac{31}{3} \notin [25, \infty)$

Така, че количеството в условие на монополизация на отрасъла ще бъде $q = \frac{76}{7}$. Монополната цена ще намерим като заместим $q = \frac{76}{7}$ в обратната функция на търсене, получаваме $p = p\left(\frac{76}{7}\right) = \frac{148}{35}$. Сега да пресметнем индекса на Лернер

$$I_L = \frac{\frac{148}{35} - C'\left(\frac{76}{7}\right)}{\frac{148}{35}} = \frac{\frac{148}{35} - \frac{216}{105}}{\frac{148}{35}} = \frac{19}{37}$$

Функцията на разходите на монопола $C(q)$ ще намерим след интегриране на $C'(q)$

$$C(q) = \begin{cases} q + \dfrac{q^2}{20} + C_0^1 & \text{при} \quad q \in [0, 10) \\ \dfrac{4q}{3} + \dfrac{q^2}{30} + C_0^2 & \text{при} \quad q \in [10, 25) \\ \dfrac{7q}{4} + \dfrac{q^2}{40} + C_0^3 & \text{при} \quad q \in [25, \infty) \end{cases}$$

Очевидно, $C_0^1 = C_0^2 = C_0^3 = 0$ тъй като отделните предприятия нямат постоянни разходи. Тогава ще имаме

$$C(q) = \begin{cases} q + \dfrac{q^2}{20} & \text{при} \quad q \in [0, 10) \\ \dfrac{4q}{3} + \dfrac{q^2}{30} & \text{при} \quad q \in [10, 25) \\ \dfrac{7q}{4} + \dfrac{q^2}{40} & \text{при} \quad q \in [25, \infty) \end{cases}$$

Вече можем да пресметнем приходите R, разходите C и печалбата П на монопола. Имаме $R = pq = \frac{148}{35}\frac{76}{7} \approx 45{,}91$, $C = C\left(\frac{76}{7}\right) = \frac{4}{3}\frac{76}{7} + \frac{76^2}{7^2 30} \approx 14{,}48 + 3{,}93 = 18{,}41$ и $\Pi = R - C \approx 45{,}91 - 18{,}41 = 27{,}5$. За отбелязване е, че печалбата на монопола е много по-голяма от сумата от печалбите на всички фирми при условие на съвършенна конкуренция. И наистина, в този случай печалбата е $10\pi_1 + 10\pi_2 + 15\pi_3 = 10.1{,}28 + 10.0{,}09 + 15.0 = 12{,}8 + 0{,}9 + 0 = 13{,}7$.

Задача 6. Нека отрасъла от зад. 3 да е монополизиран

(а) Да се намерят цената, количеството и индекса на Лернер при условие на монополизиране на отрасъла.

(б) Да се намерят приходите, разходите и печалбата на монопола.

(в) Да се намери потребителския излишък в условие на съвършена конкуренция в краткосрочен и дългосрочен план и монопол.

Решение:

(а) При монопола равновесието се постига при изравняване на маргиналните приходи с маргиналните разходи:

$$R'(q) = C'(q).$$

Приходите на монопола възлизат на

$$R(q) = p(q)q,$$

където $p(q)$ е обратната функция на търсене. Тъй като функцията на търсене е $Q^D(p) = 120 - 3p$, то обратната функция ще бъде

$$p(q) = 40 - \frac{1}{3}q\ .$$

Ще имаме

$$R(q) = p(q)q = \left(40 - \frac{1}{3}q\right)q = 40q - \frac{1}{3}q^2 \quad \text{и} \quad R'(q) = 40 - \frac{2}{3}q.$$

Така получаваме

$$R'(q) = C'(q) \Leftrightarrow 40 - \frac{2}{3}q = 8 + 0{,}4q \Longrightarrow q = 30.$$

(заб.: $C'(q)$ вземаме от функцията на отрасловите разходи, намерена в (б) от зад. 3 и означена с $\bar{C}(q)$)

Цената на монопола се определя от обратната функция на търсене:

$$p = p(30) = 40 - \frac{1}{3}30 = 30.$$

Можем да пресметнем и индекса на Лернер за този монополизиран пазар. Ще имаме

$$I_L = \frac{p - C'(q)}{p} = \frac{30 - C'(30)}{30} = \frac{30 - 20}{30} = \frac{1}{3} \cong 0{,}33.$$

(б) Тогава приходите ще възлизат на

$$R = R(30) = 40 \cdot 30 - \frac{1}{3}30^2 = 900,$$

разходите –

$$C = C(q) = 200 + 8 \cdot 30 + 0{,}2 \cdot 30^2 = 620,$$

а печалбата - $\Pi = R - C = 900 - 620 = 280$.

(в) Можем да направим съпоставка на равновесните стойности при различните видове пазари. За целта ще пресметнем стойностите и на една друга важна величина – потребителския излишък. При линейна функция на търсене той се пресмята по формулата

$$CS = \frac{1}{2}(p_{max} - p)q,$$

където p и q са ефективно достигнатите цена и количество, а p_{max} е възможно най-високата цена, която позволява функцията на търсене. В конкретния случай ще имаме

$$p_{max} = p(q = 0) = 40,$$

а поради това че

$$q = Q^D = 120 - 3p = 3(40 - p)$$

за потребителския излишък получаваме

$$CS(p) = 1{,}5(40 - p)^2.$$

В случай на съвършена конкуренция в дългосрочен план ($p = 20{,}65$) ще имаме $CS = CS(20{,}65) = 561{,}63$, при конкуренция в краткосрочен план ($p = 25{,}45$) - $CS = CS(25{,}45) = 317{,}55$, а при монополизиран пазар ($p = 30$) - $CS = CS(30) = 150$. Получените резултати (за по-голяма прегледност) нанасяме в таблица

	конкуренция в дългосрочен план	конкуренция в краткосрочен план	монополизиран пазар
цена	20,65	25,45	30
количество	58,05	43,625	30
печалба	0	180,8	280
инд. на Лернер	0	0	0,33
потр. излишък	561,63	317,55	150

Задача 7. В конкурентен отрасъл функционират 10 фирми с еднакви функции на разходите $C_i = 4 + 2q_i + 0{,}5q_i^2$. Отрасловото търсене на произведената от тях стока се задава с функцията $q = 52 - 2p$. Собственикът на една от фирмите предлага на конкурентите си да му прехвърлят своите фирми, като той обещава да им изплаща регулярен доход, равняващ се на удвоената им печалба.

(а) Да се намерят равновесните цена, количества и печалби при условие на отраслова конкуренция в краткосрочен план.

(б) Да се намерят същите показатели и индекса на Лернер при условие на монополизиране на отрасъла.

Решение:

(а) Отраслова конкуренция. Всяка от 10-те конкурентни фирми има обратна функция на предлагане $p_i = MC_i = C_i' \Longrightarrow p_i = 2 + q_i$

От друга страна понеже фирмите имат еднакви разходни функции, те ще заемат еднакъв дял от пазара, следователно $q_i = 5{,}2 - 0{,}2p_i = \frac{1}{10}q$ е функцията на търсене за $\forall$ от фирмите. Тогава от $p_i = 2 + q_i$ и $q_i = 5{,}2 - 0{,}2p_i$ ще получим равновесните цени количество на конкурентите $p_i = 6$ и $q_i = 4$. Печалбата на всяка от тези фирми ще бъде

$$\Pi_i = p_i q_i - C_i = 6.4 - (4 + 2.4 + 0{,}5.4^2) = 24 - 20 = 4$$

(б) Монополизация на отрасъла. В условието на монопола ще бъде изпълнено условието $MR = MC$. Тъй като $R = p(q).q$, където $p(q)$ е обратна функция на търсене, получаваме

$$R(q) = \frac{52 - q}{2}.q = \left(26 - \frac{q}{2}\right)q = 26q - \frac{q^2}{2} \Longrightarrow MR(q) = R'(q) = 26 - q$$

За да изравним $MR(q)$ с $MC(q)$ ще трябва да намерим отрасловата ФР (която пак означаваме с $C(q)$). Функцията на предлагане на всяка от фирмите е $q_i = p - 2$, следователно отрасловата функция на предлагане е $q = 10q_i = 10p - 20$ с обратна функция $p = 2 + 0{,}1q$. Но в условие на съвършена конкуренция имаме $p = MC(q)$, следователно $C'(q) = 2 + 0{,}1q$ и (след интегриране) $C(q) = C + 2q + 0{,}05q^2$, като $C = 40$ (защото всяка от фирмите в отрасъла има постоянни разходи $C_i(0) = 4$). Тъй като $MC(q) = 2 + 0{,}1q$, от приравняването на $MR(q)$ и $MC(q)$ ще получим равновесното количество $q_M = \frac{240}{11} \cong 21{,}82$, характерно за монополизирания отрасъл. Като заместим q_M в обратната функция на търсене намираме и монополната цена $p_M = \frac{166}{11} \cong 15{,}09$. Тогава, за печалбата (на отрасъла) ще имаме

$$\Pi = R - C = p_M q_M - C(q_M) = 15{,}09.21{,}82 - (4 + 2.21{,}82 + 0{,}05.(21{,}82)^2)$$
$$= 329{,}26 - 107{,}45 = 221{,}81$$

Сега, според уговорката собственика изплаща на всяка от другите 9 фирми $4.2 = 8$ парични единици или общо 72, следователно за него остават близо 150 парични единици.

Пресмятаме индекса на Лернер

$$I_L = \frac{P_M - MC(q_M)}{P_M}$$

Тъй като $MC(q_M) = 2 + 0{,}1q_M = 4{,}18$, получаваме $I_L \cong 0{,}72$.

Задача 8. Ефекти от демонополизиране на отрасъл. Монопол има функция на маргинални разходи $MC(q) = -10 + 3q$ и функция на маргинални приходи $MR(q) = 40 - 2q$.

(а) Да се определят равновесните количество, цена на стоката и печалба на фирмата, както и индекса на Лернер.

(б) Да се определят равновесните количество, цена и печалба при демонополизиране на отрасъла и запазване на функциите на маргинални разходи и маргинални приходи.

Решение:

(а) Равенството на монопола предполага да се произведе количество, изравняващо маргиналните приходи с маргиналните разходи, т.е.:

$q_M: MC(q_M) = MR(q_M) \Longrightarrow$

$$-10 + 3q_M = 40 - 2q_M \Longrightarrow q_M = 10$$

Цената се определя от обратната функция на търсене. Тъй като $R(q) = p(q)q$, където $p(q)$ е обратната функция на търсене, а от друга страна

$$R(q) = \int MR(q)dq = \int (40 - 2q)dq = 40q - q^2 = (40 - q)q$$

Така получаваме, че $p(q) = 40 - q$ е обратната функция на търсене, тогава

$$P_M = 40 - q_M = 40 - 10 = 30.$$

За да оценим индекса на Лернер I_L, тъй като

$$I_L = \frac{p_M - MC(q_M)}{p_M} = \frac{30 - 20}{30} = \frac{1}{3},$$

което показва степента на монополизираност на отрасъла.

(б) Сега да определим съответните равновесни стойности характерни за съвършена конкуренция. Тук $p = MC(q)$ е функцията на предлагане на отрасъла и конкурентния отрасъл трябва да произведе количество, изравняващо отрасловото търсене с отрасловото предлагане, т.е.

$$q_c : p_c = MC(q_c) = p(q_c)$$

$$10 + 3q_c = 40 - q_c \Longrightarrow q_c = 12{,}5$$

$$p_c = 40 - 12{,}5 = 27{,}5$$

Вижда се, че: $p_c = 27{,}5 < 30 = p_M$ и $q_c = 12{,}5 > 10 = q_M$.

Задача 9. Предполага се, че $x_W(p) = a - bp$ е функцията на търсене на *Windows* на *Microsoft*, а всички потенциални потребители, не закупили операционната система *Windows* ще се снабдят с *Linux* безплатно. Разходите на *Microsoft* за разработването на *Windows* са d (постоянните разходи, не зависещи от реализирания брой копия). Каква е оптималната цена за реализация на едно копие на *Windows*? Колко ще бъдат клиентите на *Windows* и *Linux*?

Решение:

Тъй като $x_W(0) = a$, то капацитетът на този пазар е a. Тогава (тъй като всички потребители, които не са закупили *Windows* придобиват безплатно *Linux*):

$$x_L(p) = a - x_W(p) = bp,$$

където с $x_L(p)$ сме означили остатъчната функция на търсене на безплатната операционна система *Linux*.

Задачата, която стои пред корпорацията *Microsoft* е да определи така цената c, че печлбата ѝ да е максимална

$$\Pi_W = px_W(p) - d = p(a - bp) - d \to max$$

Тъй като

$$\Pi_W(p) = ap - bp^2 - d$$

условието от I-ви ред ще бъде

$$\Pi_W{}'(c) = a - 2bp = 0 \Leftrightarrow p_0 = \frac{a}{2b}$$

Тогава ще имаме

$$x_W(p_0) = a - b\frac{a}{2b} = \frac{a}{2} = x_L(p_0)$$

За максималната печалба на *Microsoft* получаваме

$$\Pi_W(p_0) = p_0 x_W(p_0) - d = \frac{a}{2b}\frac{a}{2} - d = \frac{a^2}{4b} - d$$

Така доказахме следното твърдение

Твърдение. Оптималната цена на лиценза на платения софтуер $p_0 = \frac{a}{2b}$ максимализира печалбата на комерсиалния производител в размер на $\Pi_W(p_0) = \frac{a^2}{4b} - d$, като при това комерсиалният и некомерсиален производител делят пазара по равно: $x_W(p_0) = \frac{a}{2} = x_L(p_0)$.

За отбелязване е, че всичко се свежда до обема на пазара и функцията на потребителското търсене. Така например, ако е изпълнено неравенството $a < 2\sqrt{bd}$ дори и максималната печалба би била всъщност минимална загуба.

Задача 10. Фирма с монополно положение на пазара предлага две различни хранителни добавки за спортисти - A и B, като A е от по-висок клас, предназначена за по-платежоспособни и/или претенциозни клиенти. Функциите на търсене на A и B са

$$q_A = 20 - \frac{p_A}{3} + \frac{p_B}{6} \quad \text{и} \quad q_B = 60 - 3p_B + p_A,$$

където p_A и p_B са съответните цени в лв. за брой, а q_A и q_B – количества в хил. бр. Функциите на разходите за производството на хранителните добавки са

$$C_A = 20 + 10q_A + {q_A}^2 \quad \text{и} \quad C_B = 5 + 5q_B + 0{,}25{q_B}^2.$$

Да се намерят цените, на които ще бъдат продавани добавките, количествата, приходите, разходите и печалбата на фирмата.

Решение:

Максимализирането на печалбата на фирмата предполага изравняването на маргиналните разходи с маргиналните приходи (по q_A и q_B). За приходите на фирмата ще имаме

$$R = p_A q_A + p_B q_B.$$

Тъй като фирмата е монопол, p_A и p_B ще бъдат обратните функции на търсене на стоките. Решаваме системата

$$q_A = 20 - \frac{p_A}{3} + \frac{p_B}{6} \quad \text{и} \quad q_B = 60 - 3p_B + p_A$$

относно p_A и p_B и получаваме

$$p_A = 84 - 3{,}6q_A - 0{,}2q_B \quad \text{и} \quad p_B = 48 - 1{,}2q_A - 0{,}4q_B.$$

Тогава за функцията на приходите ще имаме

$$\begin{aligned} R(q_A, q_B) &= (84 - 3{,}6q_A - 0{,}2q_B)q_A + (48 - 1{,}2q_A - 0{,}4q_B)q_B \\ &= 84q_A + 48q_B - 1{,}4q_A q_B - 3{,}6{q_A}^2 - 0{,}4{q_B}^2. \end{aligned}$$

Съответните маргинални приходи ще бъдат

$$\frac{\partial R}{\partial q_A} = 84 - 1{,}4q_B - 7{,}2q_A \quad \text{и} \quad \frac{\partial R}{\partial q_B} = 48 - 1{,}4q_A - 0{,}8q_B.$$

За разходите за производство ще имаме

$$C(q_A, q_B) = C_A + C_B = 25 + 10q_A + {q_A}^2 + 5q_B + 0{,}25{q_B}^2.$$

Тогава маргиналните разходи ще бъдат

$$\frac{\partial C}{\partial q_A} = 10 + 2q_A \quad \text{и} \quad \frac{\partial C}{\partial q_B} = 5 + 0{,}5q_B.$$

Приравняването на маргиналните приходи по q_A и q_B със съответните маргинални разходи ни води до системата от две уравнения

$$84 - 1{,}4q_B - 7{,}2q_A = 10 + 2q_A \ \text{ и } \ 48 - 1{,}4q_A - 0{,}8q_B = 5 + 0{,}5q_B$$

или

$$9{,}2q_A + 1{,}4q_B = 74 \quad \text{и} \quad 1{,}4q_A + 1{,}3q_B = 43.$$

Решавайки горната система получаваме $q_A = 3{,}6$ и $q_B = 29{,}2$. За да получим цените на стоките заместваме намерените стойности за количествата в обратните функции на търсене. Получаваме

$$p_A = 84 - 3{,}6q_A - 0{,}2q_B = 84 - 3{,}6 \cdot 3{,}6 - 0{,}2 \cdot 29{,}2 = 65{,}2$$

$$p_B = 48 - 1{,}2q_A - 0{,}4q_B = 48 - 1{,}2 \cdot 3{,}6 - 0{,}4 \cdot 29{,}2 = 32.$$

При тези стойности на цените и количествата, за приходите ще имаме

$$R = p_A q_A + p_B q_B = 65{,}2 \cdot 3{,}6 + 32 \cdot 29{,}2 = 234{,}72 + 934{,}4 = 1169{,}12.$$

За производствените разходи получаваме

$$C_A = 20 + 10q_A + {q_A}^2 = 20 + 10 \cdot 3{,}6 + 3{,}6^2 = 68{,}96$$

$$C_B = 5 + 5q_B + 0{,}25{q_B}^2 = 5 + 5 \cdot 29{,}2 + 0{,}25 \cdot 29{,}2^2 = 365{,}16$$

$$C = C_A + C_B = 68{,}96 + 365{,}16 = 434{,}12.$$

Тогава печалбата на фирмата ще възлиза на

$$\Pi = R - C = 1169{,}12 - 434{,}12 = 735.$$