ТЕМА 4. МАТЕМАТИЧЕСКА ТЕОРИЯ НА ФИРМИТЕ – ФУНКЦИЯ НА РАЗХОДИТЕ

ТЕОРИЯ

1. Функция на разходите и други функции, свързани с нея. Под функция на общите разходи (разходна функция) за производство ще разбираме зависимостта между количеството произведена продукция q и минималните разходи, необходими за производството ѝ. Означаваме $TC = C(q)$. Графиката на тази функция ще наричаме TC-линия.

С функцията на разходи се асоциират следните функции:

(а) функции на постоянните ($FC = F = const$) и променливите ($VC = V(q)$) разходи. Ясно е, че $C(q) = F + V(q)$.

(б) функции на средните общи ($ATC = AC(q) = \frac{C(q)}{q}$), средните постоянни ($AFC = AF(q) = \frac{F}{q}$) и средните променливи ($AVC = AV(q) = \frac{V(q)}{q}$) разходи.

(в) функция на маргиналните разходи: $MC = C'(q)$.

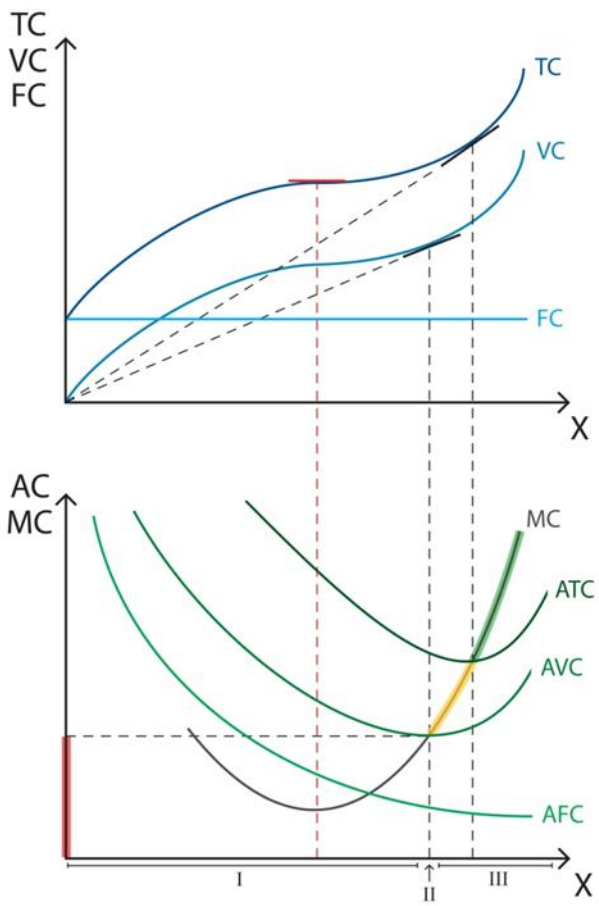
Така, с всяка функция на разходи се асоциира фамилията от линии: TC-линията, FC-линията, VC-линията, ATC-линията, AFC-линията, AVC-линията и MC-линията.

2. Основни видове функции на разходите (ФР):

(1) ФР с постоянни средни променливи разходи, т.е. $AVC = \frac{V(q)}{q} = const$, тогава TC-линията ще е права линия, съответно общите разходи ще са линейна функция на количеството: $C(q) = c_0 + c_1 q$. Тъй като средните постоянни разходи $AFC = \frac{c_0}{q}$ са намаляваща функция на q, то средните общи разходи ATC също ще бъдат намаляваща функция на q. Това намаляване е асимптотично, защото $\lim\limits_{q\to\infty} ATC = \lim\limits_{q\to\infty}\left(\frac{c_0}{q} + c_1\right) = c_1$ и $ATC > c_1$ за $\forall q$. Тъй като в този случай $MC = c_1 = const$ MC-линията е права, успоредна на абсцисата.

(2) ФР с намаляващи средни променливи разходи (или икономия от мащаба), т.е. $AVC = \frac{V(q)}{q}$ – намаляваща функция. Тогава TC-линията ще е вдлъбната крива. Подходящ пример за функция, моделираща този вид разходна функция е $C(q) = c_0 + c_1 q + c_2 q^{\alpha}, \alpha < 1$. Тъй като средните постоянни и променливи разходи AFC и AVC намаляват с нарастването на q, то същото може да се каже и за средните общи разходи ATC. И тук имаме асимптотика: $\lim\limits_{q\to\infty} ATC = \lim\limits_{q\to\infty}\left(\frac{c_0}{q} + c_1 +\right.$

$\frac{c_2}{q^{1-\alpha}}\Big) = c_1$ и $ATC > c_1$ за $\forall q$. Ясно е, че маргиналните разходи намаляват с нарастване на количеството.



(3) ФР с нарастващи средни променливи разходи (или преразход от мащаба). В този случай се допуска възможността при малки стойности на q ($q < q_1$) те да намаляват, а за по-големи стойности на q ($q > q_1$) – да растат. Лесно се вижда, че ако AVC намаляват, то и ATC намаляват, а при нарастване на ATC, AVC също нараства. Това показва, че количеството, минимизиращо AVC ($q = q_1$) е по-малко от количеството, минимизиращо ATC ($q = q_2$). От друга страна, маргиналните разходи MC за $q < q_0$ ще намаляват, при $q > q_0$ ще нарастват и при $q = q_0$ ще достигат минимума си. Ясно е, че трябва да са изпълнени неравенствата $0 \le q_0 \le q_1 \le q_2$. VC-линията и TC-линията ще имат вдлъбнат участък при малки стойности на $q < q_0$, инфлексия при $q = q_0$ и изпъкнал участък при $q > q_0$. На графиката е изобразена типична фамилия линии за функция на разходите с първоначално намаляване (участък I) и след това нарастване (участък III) на средните променливи разходи AVC, които в точка II достигат минимума си. С пунктири са показани и количествата, минимизиращи ATC и MC. Типични разходни функции от този тип са: квадратната функция $C(q) = c_0 + c_1 q + c_2 q^2$: $c_0 \ge 0$, $c_1 \ge 0$ и $c_2 > 0$ (при нея $0 = q_0 = q_1$) и кубичната функция $C(q) = c_0 + c_1 q + c_2 q^2 + c_3 q^3$: $c_0 \ge 0$, $c_1 \ge 0$, $c_2 \le 0$ и $c_3 > 0$. За този вид ФР е валидно следното

Твърдение. Ако функцията на разходите допуска минимум на средните променливи разходи AVC_{min}, то

$$MC(q_1) = AVC_{min}(q_1) \quad \text{и} \quad MC(q_2) = ATC_{min}(q_2),$$

с други думи, линията на маргиналните разходи пресича линиите на средни променливи и средни общи разходи в точките на техните минимуми.

3. Критична цена и критично количество. Общите приходи на конкурентната фирма са $TR = R(q) = pq$. Графиката на функцията на общите приходи, TR-линията е права, минаваща през координатното начало. Ясно е, че за конкурентната фирма средните общи приходи и маргиналните приходи съвпадат с цената:

$AR(q) = MR(q) = p$. Печалбата на конкурентната фирма е разликата между общите приходи и общите разходи: $\Pi(q) = pq - C(q)$.

Критична цена p_k за дадена разходна функция ще наричаме цена, при която:

1) за цени по-високи от критичната, фирмата може да реализира печалба, т.е. за $\forall p > p_k \exists q: \Pi(q) = pq - C(q) > 0$;

2) за цени по-ниски от критичната, фирмата със сигурност е на загуба, т.е. за $\forall p < p_k \forall q: \Pi(q) = pq - C(q) < 0$.

Ако за критичната цена p_k съществува единствено количество q_k при което печалбата е нулева (т.е. $\Pi(q_k) = p_k q_k - C(q_k) = 0$), това количество се нарича критично количество.

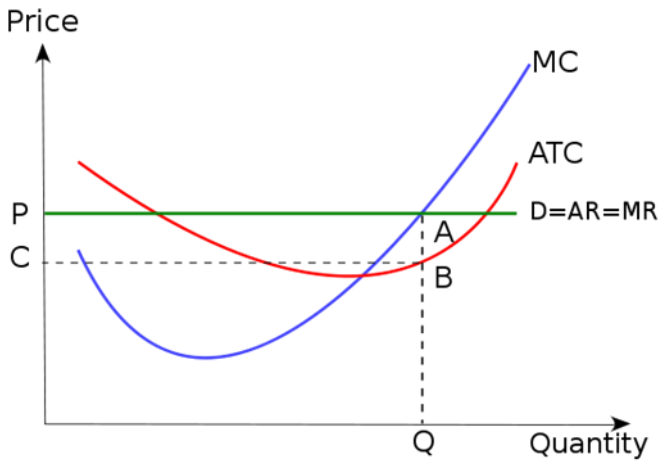
Тъй като условието $\Pi(q) = pq - C(q) < 0$ след като разделим с q добива вида $p < \frac{C(q)}{q} = AC(q)$, то критичната цена трябва да бъде равна на долната граница (инфинимума) на средните общи разходи $AC(q)$, т.е. $p_k = \inf_q\{AC(q)\}$. Да видим как стои въпросът с критичната цена при четирите вида разходни функции:

1. ФР с постоянни средни променливи разходи. При тази функция критичната цена ще е равна на тези средни разходи. И наистина, ако $C(q) = c_0 + c_1 q$ ($c_0 = FC, c_1 = AVC$) $p_k = \inf_q\{AC(q)\} = \inf_q\left\{\frac{c_0}{q} + c_1\right\} = c_1$. За $c_0 = 0$ и за всяко q печалбата е нулева при $p = p_k = c_1$, а при $c_0 \neq 0$ $\Pi(q) = -c_0$ при същата цена, следователно в този случай не съществува критично количество q_k.

2. ФР с намаляващи средни променливи разходи. При тази функция инфинимумът също не е минимум, поради това и в този случай не съществува критично количество q_k. В случая, когато $C(q) = c_0 + c_1 q + c_2 q^\alpha, \alpha < 1$ $p_k = \inf_q\{AC(q)\} = \inf_q\left\{\frac{c_0}{q} + c_1 + \frac{c_2}{q^{1-\alpha}}\right\} = c_1$.

3. ФР с растящи средни променливи разходи. За тази функция при $q > 0$ или при $q > q_1$, функцията на средните общи разходи винаги има минимум. Нека този минимум се достига при $q = q_k$(q_k е q_2 от твърдението в 2.), тогава $p_k = ATC_{min} = AC(q_k) = MC(q_k)$.

4. Максимализиране на печалбата за конкурентната фирма. Основната цел на фирмата на пазара е да максимализира своята печалба. Необходимото условие за това е $\Pi'(q) = p - C'(q) = 0$ или $p = C'(q) = MC(q)$, т.е. цената за продаденото количество трябва да е равна на маргиналните разходи за производството на това количество. Това е условието от първи ред. Достатъчното условие (или условието от втори ред) е $\Pi''(q) = -C''(q) < 0$ или $C''(q) > 0$.



Тъй като $C''(q) = MC'(q)$. Следователно, печалбата на конкурентната фирма достига максимум при такъв обем продукция, при който нарастващите маргинални разходи (за производството му) се изравнят с цената на продукцията. Тъй като при първите два вида разходни функции (при които средните променливи разходи не нарастват, а средните общи разходи намаляват) маргиналните разходи намаляват, то задачата за максимализиране на печалбата няма решение. При РФ с растящи средните променливи разходи тази задача притежава единствено решение, като това решение е в участъка на нарастване на $MC(q)$ (изпъкналата част от TC-линията).

5. Връзка между функцията на маргиналните разходи и функцията на предлагане. Тъй като винаги, когато има максимум на печалбата са изпълнени условията

$$p = C'(q) = MC(q), \qquad MC'(q) = C''(q) > 0,$$

то от математическа гледна точка може да се очаква, че линията на предлагане на фирмата , т.е. S-линията ще бъде тази част от MC-линята, при което MC расте, толкова повече, че монотонната функция е обратима. Така равенството $p = C'(q)$ задава обратната функция на предлагане на конкурентната фирма.

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ

Задача 1. Дадена е функцията на разходи на фирмата: (а) $C(q) = 10 + 5q$; (б) $C(q) = 20 + 5q + \sqrt{q}$; (в) $C(q) = 30 + 2q + 0{,}075q^2$; (г) $C(q) = 40 + 3q + 0{,}02q^3$. Да се намерят функциите на средни общи разходи, средни променливи разходи и маргинални разходи. Да се намери критичната цена и съответното ù критичното количество (ако съществува). За тези функции на разходите, допускащи максимализиране на печалбата, да се намери функцията на предлагане и функцията на печалбата (от цената).

Решение:

(а) За линейната разходна функция $C(q) = 10 + 5q$ получаваме функция на средните разходи

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{10 + 5q}{q} = \frac{10}{q} + 5,$$

функция на средните променливи разходи

$$AVC(q) = \frac{VC(q)}{q} = \frac{5q}{q} = 5$$

и функция на маргиналните разходи $MC(q) = C'(q) = 5$. За критичната цена ще имаме

$$p_k = inf\{AC(q)\} = inf\left\{\frac{10}{q} + 5\right\} = 5 = \lim_{q\to\infty}\left(\frac{10}{q} + 5\right),$$

което означава, че тази критична цена не се достига от никакво количество, т.е. няма критично количество. За всяка цена $p > p_k = 5$ е възможно фирмата да реализира печалба, която нараства неограничено с неограниченото нарастване на q. Поради това, задачата за максимализиране на печалбата на конкурентна фирма с такава разходна функция няма решение. Това важи за всички разходни функции с постоянни средни променливи разходи.

(б) За вдлъбнатата разходна функция $C(q) = 20 + 5q + \sqrt{q}$ (вдлъбната е, защото $C''(q) = -0{,}5q^{-1{,}5} < 0$) получаваме функция на средните разходи

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{20 + 5q + \sqrt{q}}{q} = \frac{20}{q} + 5 + \frac{1}{\sqrt{q}},$$

функция на средните променливи разходи

$$AVC(q) = \frac{VC(q)}{q} = \frac{5q + \sqrt{q}}{q} = 5 + \frac{1}{\sqrt{q}}$$

и функция на маргиналните разходи

$$MC(q) = C'(q) = 5 + \frac{1}{\sqrt{q}}.$$

За критичната цена ще имаме

$$p_k = inf\{AC(q)\} = inf\left\{\frac{20}{q} + 5 + \frac{1}{\sqrt{q}}\right\} = 5 = \lim_{q\to\infty}\left(\frac{10}{q} + 5 + \frac{1}{\sqrt{q}}\right),$$

което означава, че тази критична цена не се достига от никакво количество, т.е. няма критично количество. За всяка цена $p > p_k = 5$ е възможно фирмата да реализира печалба, която нараства неограничено с неограниченото нарастване на q. Поради това, задачата за максимализиране на печалбата на конкурентна фирма с такава разходна функция няма решение. Това важи за всички разходни функции с намаляващи средни променливи разходи.

(в) За изпъкналата разходна функция $C(q) = 30 + 2q + 0{,}075q^2$ (изпъкнала е защото $C''(q) = 0{,}15 > 0$) получаваме функция на средните разходи

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{30 + 2q + 0{,}075q^2}{q} = \frac{30}{q} + 2 + 0{,}075q,$$

функция на средните променливи разходи

$$AVC(q) = \frac{VC(q)}{q} = \frac{2q + 0{,}075q^2}{q} = 2 + 0{,}075q$$

и функция на маргиналните разходи

$$MC(q) = C'(q) = 2 + 0{,}15q.$$

За критичната цена ще имаме

$$p_k = inf\{AC(q)\} = inf\left\{\frac{30}{q} + 2 + 0{,}075q\right\} = min\left\{\frac{30}{q} + 2 + 0{,}075q\right\} = AC_{min}.$$

Да намерим абсолютния минимум на средните разходи AC_{min}. Условието от първи ред е

$$AC'(q) = -\frac{30}{q^2} + 0{,}075 = 0 \Leftrightarrow q = 20.$$

Тогава въпросният абсолютен минимум (и критичната цена) ще бъде

$$p_k = AC_{min} = AC(20) = \frac{30}{20} + 2 + 0{,}075 \cdot 20 = 1{,}5 + 2 + 1{,}5 = 5.$$

Така получихме, че критичната цена е $p_k = 5$ и съответното ù критично количество е $q_k = 20$. Това означава, че за всяка цена $p < p_k = 5$ фирмата работи на загуба, независимо от произведеното количество; за $p = p_k = 5$ и $q = q_k = 20$ фирмата има нулева печалба, а за всички други количества – загуба и за $p > p_k = 5$ при определени количества може да реализира печалба.

Функцията на предлагане се определя от условието от първи ред за максимализиране на печалбата

$$p = MC(q) = C'(q) = 2 + 0{,}15q.$$

Това е обратната функция на предлагане, следователно функцията на предлагане ще бъде

$$q = \frac{20}{3}(p - 2).$$

За да получим печалбата на конкурентната фирма (при положение, че тя максимализира печалбата си) ще трябва в израза за печалбата

$$\Pi = R - C = pq - (30 + 2q + 0{,}075q^2) = -0{,}075q^2 + (p - 2)q - 30$$

да заместим q с $\frac{20}{3}(p - 2)$. Получаваме

$$\Pi(p) = -0{,}075\left(\frac{20}{3}(p-2)\right)^2 + \frac{20}{3}(p-2)^2 - 30 = \frac{10}{3}(p-2)^2 - 30.$$

Такава картина (наличие на абсолютен минимум на средните разходи и възможност за максимализиране на печалбата и от там, наличие на функция на предлагане) получаваме при всички разходни функции с нарастващи средни променливи разходи.

(г) За изпъкналата разходна функция $C(q) = 40 + 3q + 0{,}02q^3$ (изпъкнала е защото $C''(q) = 0{,}12q > 0$) получаваме функция на средните разходи

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{40 + 3q + 0{,}02q^3}{q} = \frac{40}{q} + 3 + 0{,}02q^2,$$

функция на средните променливи разходи

$$AVC(q) = \frac{VC(q)}{q} = \frac{3q + 0{,}02q^3}{q} = 3 + 0{,}02q^2$$

и функция на маргиналните разходи

$$MC(q) = C'(q) = 3 + 0{,}06q^2.$$

За критичната цена ще имаме

$$p_k = inf\{AC(q)\} = inf\left\{\frac{40}{q} + 3 + 0{,}02q^2\right\} = min\left\{\frac{40}{q} + 3 + 0{,}02q^2\right\} = AC_{min}.$$

Да намерим абсолютния минимум на средните разходи AC_{min}. Условието от първи ред е

$$AC'(q) = -\frac{40}{q^2} + 0{,}04q = 0 \Leftrightarrow q = 10.$$

Тогава въпросният абсолютен минимум (и критичната цена) ще бъде

$$p_k = AC_{min} = AC(10) = \frac{40}{10} + 3 + 0{,}02 \cdot 100 = 4 + 3 + 2 = 9.$$

Аналогично на предишния случай, получаваме, че критичната цена е $p_k = 9$ и съответното ѝ критично количество е $q_k = 10$. Това означава, че за всяка цена $p < p_k = 9$ фирмата работи на загуба, независимо от произведеното количество; за $p = p_k = 9$ и $q = q_k = 10$ фирмата има нулева печалба, а за всички други количества – загуба и за $p > p_k = 9$ при определени количества може да реализира печалба.

Функцията на предлагане се определя от условието от първи ред за максимализиране на печалбата

$$p = MC(q) = C'(q) = 3 + 0{,}06q^2.$$

Това е обратната функция на предлагане, следователно функцията на предлагане ще бъде

$$q = 10\sqrt{\frac{(p-3)}{6}}.$$

За да получим печалбата на конкурентната фирма (при положение, че тя максимализира печалбата си) ще трябва в израза за печалбата

$$\Pi = R - C = pq - (40 + 3q + 0{,}02q^3) = -0{,}02q^3 + (p-3)q - 40$$

да заместим q с $10\sqrt{\frac{(p-3)}{6}}$. Получаваме

$$\Pi(p) = -0{,}02\left(10\sqrt{\frac{(p-3)}{6}}\right)^3 + 10(p-3)\sqrt{\frac{(p-3)}{6}} - 40$$

$$= \frac{20}{3}(p-3)\sqrt{\frac{(p-3)}{6}} - 40.$$

Задача 2. Разходите на фирма за производството на 100 бр. от дадена стока са 300 лв., а за производството на 500 бр. – 600 лв.

(а) Намерете функцията на разходи при предположение, че тя е линейна;

(б) какви са разходите за производството на 700 бр.

(в) каква е критичната цена и съответното и критично количество;

(г) определете критичните количества при цени за брой от 1 лв. и от 1,25 лв. съответно;

(д) пресметнете печалбата (загубата) на фирмата при производство и продажба на 700 бр. при цените от (г).

Решение:

(а) За линейната ФР ще имаме $C(q) = a + bq$. От данните на задачата получаваме $C(100) = a + 100b = 300$ и $C(500) = a + 500b = 600$, откъдето $b = 0{,}75$, $a = 225$ и $C(q) = 225 + 0{,}75q$.

(б) Получаваме $C(700) = 225 + 0{,}75 \cdot 700 = 750$.

(в) Критичната цена се получава от

$$p_k = \inf_q\{AC(q)\} = \inf_q\left\{\frac{225}{q} + 0{,}75\right\} = \lim_{q\to\infty}\left(\frac{225}{q} + 0{,}75\right) = 0{,}75.$$

Тъй като критичната цена се получава при граничен преход, то за тази цена критично количество не съществува.

(г) Трябва да определим количествата при които (при съответните цени) може да се формира печалба. За целта трябва да решим неравенствата $p - AC(q) > 0$ или

$$\frac{225}{q} + 0{,}75 < 1 \quad \text{и} \quad \frac{225}{q} + 0{,}75 < 1{,}25.$$

Получаваме $q > 900$ за първото и $q > 450$ за второто.

(д) За цена $p = 1$ имаме $\Pi(700) = R(700) - C(700) = 700 - 750 = -50$ – загуба, а при $p = 1{,}25$ - $\Pi(700) = R(700) - C(700) = 875 - 750 = 125$ – печалба.

Задача 3. Разходите на фирма за производството на 10 бр. от дадена стока са 234 лв., а на 20 бр. – 245 лв. Маргиналният разход за производството на тридесетия брой е 1,4 лв.

(а) Намерете функцията на разходи на фирмата при предположение, че тя е квадратна;

(б) какви са разходите за производството на 100 бр. А какъв е маргиналния разход?

(в) определете критичната цена и съответното и критично количество;

(г) намерете печалбата (загубата) при производство и продажба на 100 бр. при цена от 4,80 лв. за брой;

(д) определете стойностите на q при които се реализира печалба при цена от 4,80 лв. за брой;

(е) намерете количеството от стоката, максимализиращо печалбата при същата цена и печалбата на фирмата.

Решение:

(а) Нека ФР има вида $C(q) = a + bq + cq^2$, тогава функцията на маргиналните разходи е $MC(q) = C'(q) = b + 2cq$. От условията на задачата получаваме три уравнения за трите неизвестни a, b и c:

$$C(10) = a + 10b + 100c = 234, C(20) = a + 20b + 400c = 245 \text{ и } MC(30) = b + 60c = 1{,}4.$$

Ако извадим първото уравнение от второто и разделим на 10 получаваме $b + 30c = 1{,}1$, а като извадим това уравнение от третото - $30c = 0{,}3 \Longrightarrow c = 0{,}01$. Оттам $b = 0{,}8$ и $a = 225$. Възстановената ФР е $C(q) = 225 + 0{,}8q + 0{,}01q^2$.

(б) Като заместим $q = 100$ в намерените функции $C(q)$ и $MC(q) = 0{,}8 + 0{,}02q$ получаваме $C(100) = 225 + 80 + 100 = 405$ и $MC(100) = 0{,}8 + 2 = 2{,}8$.

(в) За да определим критичната цена p_k и критичното количество q_k трябва да намерим абсолютния минимум на функцията $AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{225}{q} + 0{,}8 + 0{,}01q$. Имаме $AC'(q) = -\frac{225}{q^2} + 0{,}01 = 0 \Leftrightarrow q_k = 150$ и $p_k = AC_{min} = AC(150) = \frac{225}{150} + 0{,}8 + 0{,}01 \cdot 150 = 1{,}5 + 0{,}8 + 1{,}5 = 3{,}8$, т.е. при цени $p > 3{,}8$ фирмата с такава РФ може да реализира печалба.

(г) При $p = 4{,}8$ и $q = 100$ приходите са $R(100) = 4{,}8 \cdot 100 = 480$ и тъй като разходите са $C(100) = 405$ (б), то печалбата е $\Pi(100) = R(100) - C(100) = 480 - 405 = 75$.

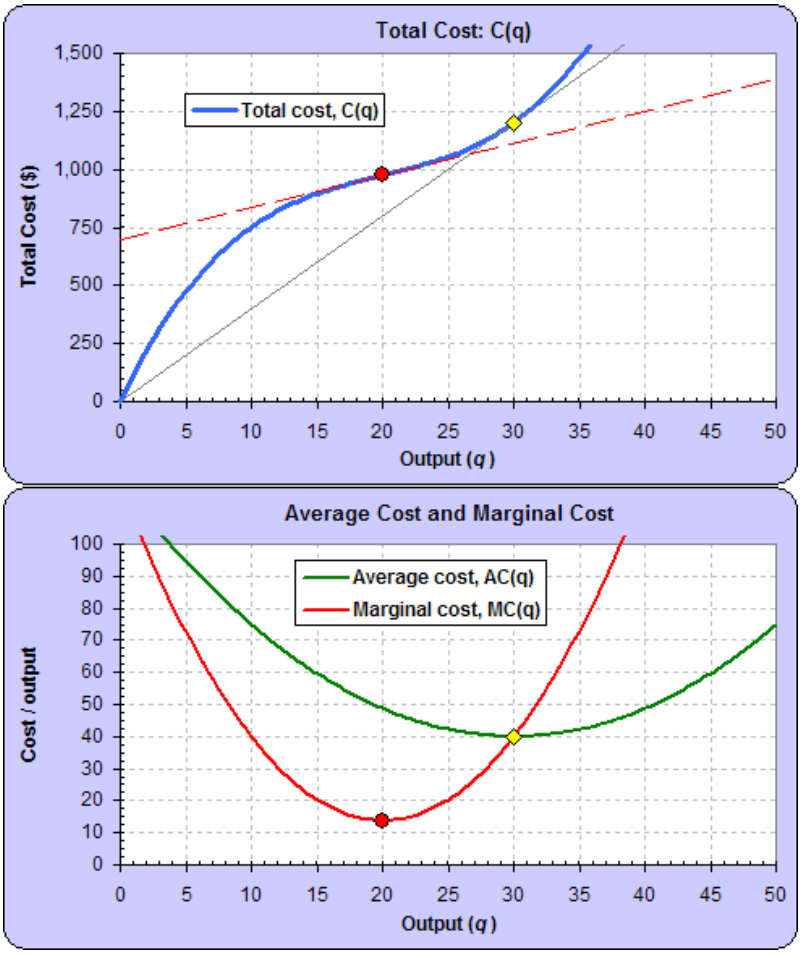
(д) За да намерим стойностите на q при които се реализира печалба, трябва да решим неравенството $p - AC(q) > 0$ или

$$AC(q) = \frac{225}{q} + 0{,}8 + 0{,}01q < 4{,}8 \Leftrightarrow 0{,}01q^2 - 4q + 225 < 0.$$

Решаваме квадратното уравнение $q^2 - 400q + 22500 = 0$: $q_{1,2} = 200 \pm \sqrt{40000 - 22500} = 200 \pm \sqrt{17500} = 200 \pm 50\sqrt{7}$, корените на което са $q_1 = 200 - 50\sqrt{7} \cong 67{,}7$ и $q_2 = 200 + 50\sqrt{7} \cong 332{,}3$. Тогава получаваме, че ако $q \in (67{,}7; 332{,}3)$ фирма с такава РФ ще бъде на печалба при такава цена.

(е) За да максимализираме печалбата, трябва да решим уравнението $p = MC(q)$ или $0{,}8 + 0{,}02q = 4{,}8$. Получаваме $q = 200$. Тогава максималната печалба ще възлиза на $\Pi(200) = R(200) - C(200) = 4{,}8 \cdot 200 - (225 + 0{,}8 \cdot 200 + 0{,}01 \cdot 40000) = 960 - 785 = 175$.

Задача 4. Да се възстанови функцията на разходи от графиките, ако тя е кубична. Да се намерят критичните цена и количество. Да се намери обратната функция на предлагане. Да се намерят стойностите на q за които фирма с такава ФР може да реализира печалба при цена $p = 130$ и да се намери максималната печалба при тази цена.



Решение:

Ясно е, че разходната функция би следвало да има вида $C(q) = aq - bq^2 + cq^3$ ($C(0) = 0$, т.е. няма постоянни разходи). Сигурните точки с кръгли стойности са $C(20) = 1000$ (горен чертеж - TC-линия) и $MC(30) = AC(30) = 40$ (долен чертеж – пресечната точка на MC-линията и AC-линията). Те са достатъчни за възстановяването на функцията на разходи. От $C(20) = 1000$ получаваме уравнението $a - 20b + 400c = 50$. Тъй като $MC(q) = C'(q) = a - 2bq + 2cq^2$ от $MC(30) = 40$ получаваме още едно уравнение $a - 60b + 2700c = 40$. Имаме $AC(q) = \frac{C(q)}{q} = a - bq + cq^2$, тогава от $AC(30) = 40$ получаваме последното уравнение $a - 30b + 900c = 40$. Решавйки линейната система от три уравнения за трите неизвестни a, b и c получавме еднозначно решение: $a = 130$, $b = 6$ и $c = 0{,}1$, така функцията на разходи е възстановена - $C(q) = 130q - 6q^2 + 0{,}1q^3$.

Точката на пресичане на MC-линията и AC-линията (в случая $AC = AVC$) ни дава критичните цена и количество: $p_k = 40$, $q_k = 30$ (тези стойности биха се получили и при минимализирането на AC - $p_k = AC_{min}(q_k) = MC(q_k)$).

Намираме обратната функция на предлагане $p = MC(q) = C'(q) = 130 - 12q + 0{,}3q^2 \geq 40$ при $q \geq 20$. Графиката ѝ – S-линията е частта от MC-линията, в която тя е растяща.

За да се намерят стойностите на q за които може да реализира печалба при цена $p = 130$ трябва да се реши неравенството $p - AC(q) > 0$ или

$$AC(q) = 130 - 6q + 0{,}1q^2 < 130 \Leftrightarrow 0{,}1q^2 - 6q = 0{,}1q(q - 60) < 0,$$

откъдето следва $q < 60$.

За да се намери максималната печалба трябва да се реши уравнението $p = MC(q)$ или $130 - 12q + 0{,}3q^2 = 130 \Leftrightarrow 0{,}3q^2 - 12q = 0{,}3q(q - 40) = 0 \Leftrightarrow q = 40$. При $q = 40$ за приходите ще имаме $R(40) = 130 \cdot 40 = 5200$, а за разходите - $C(40) = 130 \cdot 40 - 6 \cdot 40^2 + 0{,}1 \cdot 40^3 = 5200 - 9600 + 6400 = 2000$. Тогава печалбата ще възлиза на $\Pi(40) = R(40) - C(40) = 5200 - 2000 = 3200$.

Задача 5. Производител реализира продукцията си при цена от p лв. за бр. Средните променливи разходи са $a + bq^2$, а постоянни разходи – няма. Да се намери оптималния брой изделия, които производителят трябва да произвежда и продава, максималната му печалба и функцията на предлагане на продукта му.

Решение:

Имаме $C(q) = AVC(q) = (a + bq^2)q = aq + bq^3$ (поради липсата на постоянни разходи). ФР е с растящи средни променливи разходи (при всяко q), така че задачата за максимализиране на печалбата има еднозначно решение. Условието от първи ред за максимализиране на печалбата е $p = C'(q) = a + 3bq^2$. Получаваме $q = \sqrt{\frac{p-a}{3b}}$ за всяко $p > a$. На това равенство може да се гледа по два начина: при фиксирано p числото q е оптималния брой произведени и реализирани изделия; ако p е променлива, то равенството е функцията на предлагане на фирмата. Печалбата ще се получи от

$$\Pi = pq - C(q) = pq - (aq + bq^3) = q(p - a - bq^2) = \sqrt{\frac{p-a}{3b}}\left(p - a - \frac{p-a}{3b}\right)$$
$$= \sqrt{\frac{p-a}{3b}}(p-a)\left(1 - \frac{1}{3b}\right) = (3b-1)\left(\frac{p-a}{3b}\right)^{3/2}.$$

При $b < \frac{1}{3}$ тази максимална печалба ще бъде всъщност минимална загуба.

Задача 6. Известно е, че фирма предлага продукцията си с функция на предлагане $y(p) = -200 + 8p$, като критичната цена е 40 лв.

(а) Да се изведе функцията на разходи на фирмата;

(б) да се изрази функцията на печалба на фирмата $\pi = \pi(p)$.

Решение:

(а) След като функцията на предлагане е $q = y(p) = -200 + 8p = 8(p - 25)$, то обратната функция на предлагане ще бъде

$$p = p(q) = 25 + \frac{q}{8}.$$

От друга страна равновесието на конкурентната фирма предполага равенство на цената с маргиналните разходи, т.е.

$$p = p(q) = MC(q) = C'(q).$$

От горните две равенства произтича диференциалното уравнение

$$C'(q) = 25 + \frac{q}{8}$$

След интегриране на последното, получаваме

$$C(q) = c_0 + 25q + \frac{q^2}{16},$$

където c_0 е интеграционна константа, която ще определим от допълнителното условие за критичната цена. В случай на изпъкнала разходна функция (такава, която допуска максимализиране на печалбата) критичната цена е абсолютния минимум на функцията на средните разходи $AC(q)$. Ще имаме

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{c_0 + 25q + \frac{q^2}{16}}{q} = \frac{c_0}{q} + 25 + \frac{q}{16}.$$

Условието от първи ред е

$$AC'(q) = -\frac{c_0}{q^2} + \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow q = 4\sqrt{c_0}.$$

Тогава за критичната цена ще имаме

$$p_k = AC_{min} = AC\left(4\sqrt{c_0}\right) = \frac{c_0}{4\sqrt{c_0}} + 25 + \frac{4\sqrt{c_0}}{16} = 25 + \frac{\sqrt{c_0}}{2}.$$

Тъй като по условие $p_k = 40$, то от

$$25 + \frac{\sqrt{c_0}}{2} = 40 \Longrightarrow c_0 = 900 \quad \text{и} \quad C(q) = 900 + 25q + \frac{q^2}{16}.$$

(б) За да изразим печалбата (при положение че тя е максимализирана) ще трябва в израза

$$\pi = pq - C(q) = pq - 25q - \frac{q^2}{16} - 900$$

да заместим q с $8(p - 25)$ (от функцията на предлагане). Получаваме

$$\pi = \pi(p) = (p - 25) \cdot 8(p - 25) - \frac{\left(8(p - 25)\right)^2}{16} - 900 = 4(p - 25)^2 - 900.$$