ТЕМА 3. МАТЕМАТИЧЕСКА ТЕОРИЯ НА ПОТРЕБИТЕЛИТЕ (продължение)

ТЕОРИЯ

1. Кръстосано влияние на цените. Функциите на търсене (маршалови и хиксови) ни дават възможност да изследваме реакцията на търсенето на факторите, които го обуславят – цени, доход и полезност.

Тъй като при хиксовите функции на търсене има симетрия при частните производни спрямо цените, т.е.

$$\frac{\partial {x_i}^H}{\partial p_j} = \frac{\partial {x_j}^H}{\partial p_i},$$

те могат да се използват за класифициране на стоките по двойки. Стоките i и j се наричат:

- заместители (субститути, сублементи), ако е изпълнено $\frac{\partial {x_i}^H}{\partial p_j} = \frac{\partial {x_j}^H}{\partial p_i} > 0$;
- допълващи се (комплементи) при $\frac{\partial {x_i}^H}{\partial p_j} = \frac{\partial {x_j}^H}{\partial p_i} < 0$;
- неутрални, ако $\frac{\partial {x_i}^H}{\partial p_j} = \frac{\partial {x_j}^H}{\partial p_i} = 0$.

Тъй като за маршаловите функции на търсене в общия случай имаме $\frac{\partial {x_i}^M}{\partial p_j} \neq \frac{\partial {x_j}^M}{\partial p_i}$, такава класификация на двойки стоки не може да се направи. Ще дадем следните определения:

- i-тата стока се нарича основен заместител на j-тата, ако $\frac{\partial {x_i}^M}{\partial p_j} > 0$;
- i-тата стока се нарича основна допълваща стока на j-тата, ако $\frac{\partial {x_i}^M}{\partial p_j} < 0$;
- i-тата стока се нарича основна неутрална стока за j-тата, ако $\frac{\partial {x_i}^M}{\partial p_j} = 0$

2. Диференциално тъждество на Слуцки. То е известно като уравнение на Слуцки и в общия случай изглежда така:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \frac{\partial {x_i}^H}{\partial p_j} - x_j \frac{\partial x_i}{\partial m}$$

или при $i = j$

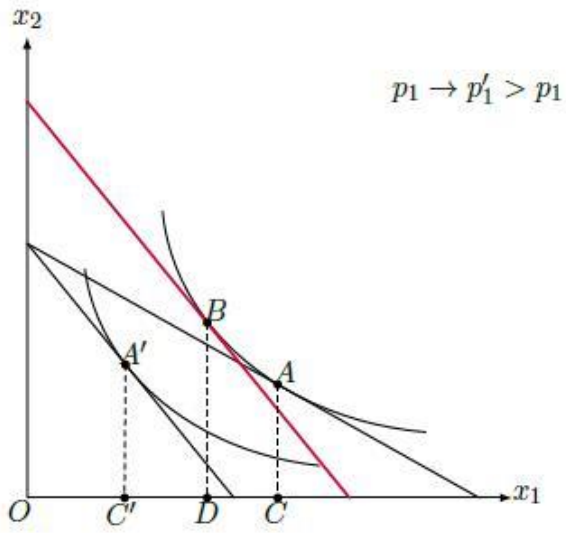
$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i} = \frac{\partial {x_i}^H}{\partial p_i} - x_i \frac{\partial x_i}{\partial m}$$

Уравнението на Слуцки разделя общия ефект върху търсенето от изменението на цената (лявата страна на тъждеството) на две съставящи: ефект на заместването (първия член от дясната страна на равенството) и ефект на дохода (втория член).

3. Тъждество на Слуцки във вид на крайни разлики. Ако имаме пред вид едно малко изменение на цената на i-тата стока Δp_i, то уравнението на Слуцки може да се запише така

$$\Delta \boldsymbol{x_i} = \Delta \boldsymbol{x_i}^{\boldsymbol{H}} + \Delta \boldsymbol{x_i}^{\boldsymbol{m}},$$

където Δx_i е общото изменение на потреблението на i-тата (т.е. общия ефект), $\Delta x_i{}^H$ – ефекта от заместването (наричан също компенсационен ефект), а $\Delta x_i{}^m$ – ефекта на дохода. За да направим геометрична интерпретация, ще разгледаме случая при $n = 2, i = 1$. Нека първоначалните цени са p_1 и p_2, а дохода е m. Тогава равновесието на потребителя е в т. A (на графиката). Първата координата на A ще бъде $x_1(p_1, p_2, m)$ (означена на графиката с C).



Нека сега, първата стока да е поскъпнала до $p_1{}' > p_1$. При запазване на дохода m новата бюджетната права би се получила от старата чрез ротация около точката $(0, p_2)$ като пресечната точка с абсцисата сега е $m/p_1{}' < m/p_1$. За тази нова бюджетна права би се намерила друга линия на безразличие, така че новото равновесие на потребителя ще е в точка A'. Първата координата на A' (означена на графиката с C') ще бъде $x_1(p_1{}', p_2, m)$. Сега да си представим, че потребителя е компенсиран с нов доход $m' > m$, така че при повишената цена на първата стока да може да достигне това ниво на полезност, което е имал преди повишението. Геометрично това означава транслация на втората бюджетна права до положение, при което тя става допирателна към първата линия на безразличие. Тогава точката на допиране B ще е на същата линия на безразличие както A и нейната първа координата ще е $x_1(p_1{}', p_2, m')$ (означена на графиката с D). Тогава ще имаме

$$\Delta x_i = x_1(p_1{}', p_2, m) - x_1(p_1, p_2, m) = \overrightarrow{CC'} - \text{общ ефект } (m = const)$$

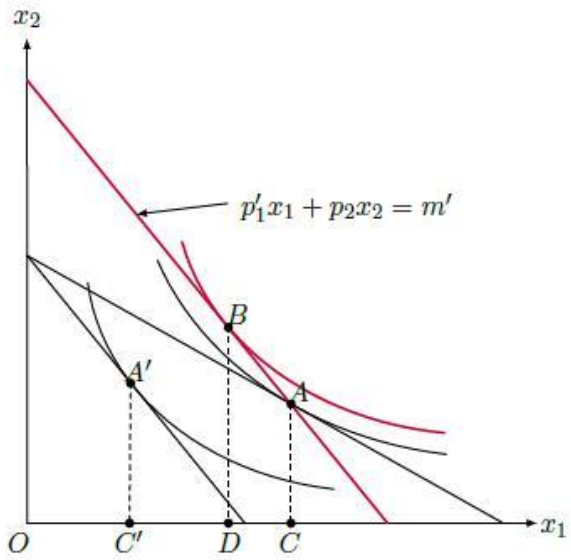
$$\Delta x_i{}^H = x_1(p_1{}', p_2, m') - x_1(p_1, p_2, m) = \overrightarrow{CD} - \text{ефект на заместването } (u = const)$$

$$\Delta x_i{}^m = x_1(p_1{}', p_2, m) - x_1(p_1{}', p_2, m') = \overrightarrow{DC'} - \text{ефект на дохода } (p_1{}' = const)$$

Такова компенсиране на дохода на потребителя при изменение на цените, при което той да може да запази достигнатото ниво на полезност се нарича компенсиране по Хикс. Друг вариант на компенсиране е когато дохода му се промени така, че той да може да си позволи стария набор от стоки – компенсиране по Слуцки. За компенсирането по Слуцки също е валидно уравнението на Слуцки

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \frac{\partial {x_i}^S}{\partial p_j} - x_j \frac{\partial x_i}{\partial m} \text{ или } \Delta x_i = \Delta {x_i}^S + \Delta {x_i}^m,$$

като функциите на компенсирано по Слуцки търсене ${x_i}^S$ са аналози на функциите на компенсирано по Хикс търсене ${x_i}^H$ и се дефинират по съответния начин. Ясно е, че на практика компенсирането по Слуцки се прилага много по-вече от компенсирането по Хикс, защото много по-лесно може да се каже какъв набор от стоки е потребяван преди промяната на цените, отколкото да се конструира линията на безразличие на типичния потребител. На графиката е дадена геометрична илюстрация на компенсирането по Слуцки при ценна стока. Вижда се, че новия доход $m' > m$ е избран така, че потребителят да може да потребява набор A, той обаче не прави това, а избира набор B с което повишава нивото на полезност, достигнато преди промяната на цените.



РЕШЕНИ ЗАДАЧИ

Задача 1. За функциите на полезност

(1) $U = {x_1}^2{x_2}^3$; (2) $U = x_1 + 4\sqrt{x_2}$; (3) $U = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$: (4) $U = min\{x_1, 3x_2\}$.

(а) Да се проверят двойките стоки дали са заместители, допълващи се или неутрални една на друга;

(б) Да се провери всяка от стоките за съответната функция на полезност дали се явява основен заместител, основна допълваща или основна неутрална за другата стока;

(в) За функцията на полезност (3) да се разложат реакциите на ${x_1}^M$ по отношение на p_1 и p_2 съгласно диференциалното тъждество на Слуцки.

Решение:

(а) Ще трябва да оценим знака на частната производна $\frac{\partial {x_1}^H}{\partial p_2}$ за всяка от функциите на полезност, като можем да ползваме резултатите от зад. 6.

(1) Имаме ${x_1}^H = u^{1/5}\left(\frac{2p_2}{3p_1}\right)^{3/5} = u^{1/5}\left(\frac{2}{3p_1}\right)^{3/5}{p_2}^{3/5} \Longrightarrow \frac{\partial {x_1}^H}{\partial p_2} = \frac{3}{5}u^{1/5}\left(\frac{2}{3p_1}\right)^{3/5}\frac{1}{{p_2}^{2/5}} > 0$, следователно стоките се явяват заместители една спрямо друга.

(2) ${x_1}^H = u - 8\frac{p_1}{p_2} \Longrightarrow \frac{\partial {x_1}^H}{\partial p_2} = 8\frac{p_1}{{p_2}^2} > 0$ – заместители.

(3) ${x_1}^H = \left(\frac{up_2}{p_1+p_2}\right)^2 \Longrightarrow \frac{\partial {x_1}^H}{\partial p_2} = 2\frac{up_2}{p_1+p_2}\cdot u\cdot\frac{(p_1+p_2)-p_2}{(p_1+p_2)^2} = \frac{2u^2p_1p_2}{(p_1+p_2)^3} > 0$ – заместители.

(4) ${x_1}^H = u \Longrightarrow \frac{\partial {x_1}^H}{\partial p_2} = 0$ – неутрални.

(б) Поради липсата на симетрия, както е при хиксовите функции на търсене, за маршаловите функции трябва да разгледаме реакциите поотделно, т.е. $\frac{\partial {x_1}^M}{\partial p_2}$ и $\frac{\partial {x_2}^M}{\partial p_1}$.

(1) Тъй като ${x_1}^M = \frac{2m}{5p_1}$ и ${x_2}^M = \frac{3m}{5p_2}$ (т.е. търсенето на всяка стока зависи само от нейната цена), то $\frac{\partial {x_1}^M}{\partial p_2} = \frac{\partial {x_2}^M}{\partial p_1} = 0$ и стоките са основно неутрални една за друга.

(2) Имаме ${x_1}^M = \frac{m}{p_1} - 4\frac{p_1}{p_2} \Longrightarrow \frac{\partial {x_1}^M}{\partial p_2} = 8\frac{p_1}{{p_2}^2} > 0$ и ${x_2}^M = \frac{4{p_1}^2}{{p_2}^2} \Longrightarrow \frac{\partial {x_2}^M}{\partial p_1} = 8\frac{p_1}{{p_2}^2} > 0$, следователно двете стоки са основни заместители една за друга.

(3) ${x_1}^M = \frac{mp_2}{p_1(p_1+p_2)} \Longrightarrow \frac{\partial {x_1}^M}{\partial p_2} = \frac{m}{p_1}\frac{(p_1+p_2)-p_2}{(p_1+p_2)^2} = \frac{m}{(p_1+p_2)^2} = \frac{\partial {x_2}^M}{\partial p_1}$ (от съображения за симетрия), следователно, стоките са основни заместители една за друга.

(4) ${x_1}^M = \frac{3m}{3p_1+p_2} \Longrightarrow \frac{\partial {x_1}^M}{\partial p_2} = -\frac{3m}{(3p_1+p_2)^2} < 0$ и ${x_2}^M = \frac{m}{3p_1+p_2} \Longrightarrow \frac{\partial {x_2}^M}{\partial p_1} = -\frac{3m}{(3p_1+p_2)^2} < 0$ – основни допълващи се стоки една за друга.

(в) Реакция на ${x_1}^M$ от изменението на собствената цена. Ще трябва да проверим диференциалното тъждество на Слуцки във варианта

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{\partial {x_1}^H}{\partial p_1} - x_1\frac{\partial x_1}{\partial m}.$$

(Тук с x_1 сме означили маршаловото търсене ${x_1}^M$). За лявата страна ще имаме

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{\partial}{\partial p_1}\left[\frac{mp_2}{p_1(p_1+p_2)}\right] = -\frac{mp_2(2p_1+p_2)}{{p_1}^2(p_1+p_2)^2}.$$

Пресмятаме компенсационната съставяща

$$\frac{\partial {x_1}^H}{\partial p_1} = \frac{\partial}{\partial p_1}\left[\left(\frac{up_2}{p_1+p_2}\right)^2\right] = -2\frac{u^2{p_2}^2}{(p_1+p_2)^3},$$

а след това – доходната съставяща

$$x_1 \frac{\partial x_1}{\partial m} = \frac{mp_2}{p_1(p_1+p_2)} \frac{p_2}{p_1(p_1+p_2)} = \frac{m{p_2}^2}{{p_1}^2(p_1+p_2)^2}.$$

Тогава дясната страна на равенството ще има вида

$$\frac{\partial {x_1}^H}{\partial p_1} - x_1 \frac{\partial x_1}{\partial m} = -2\frac{u^2{p_2}^2}{(p_1+p_2)^3} - \frac{m{p_2}^2}{{p_1}^2(p_1+p_2)^2}$$
$$= -\frac{{p_2}^2}{(p_1+p_2)^2}\left(2\frac{u^2}{(p_1+p_2)} + \frac{m}{{p_1}^2}\right).$$

Връзката между бюджета m и полезността u се намира от условието, че доходът е похарчен при условие $u = const$ (което е характерно за хиксовите компенсационни функции), следователно

$$m = p_1{x_1}^H + p_2{x_2}^H = p_1\left(\frac{up_2}{p_1+p_2}\right)^2 + p_2\left(\frac{up_1}{p_1+p_2}\right)^2 = \frac{u^2(p_1{p_2}^2 + p_2{p_1}^2)}{(p_1+p_2)^2}$$
$$= \frac{u^2p_1p_2(p_1+p_2)}{(p_1+p_2)^2} = \frac{u^2p_1p_2}{(p_1+p_2)} \Rightarrow u^2 = \frac{m(p_1+p_2)}{p_1p_2}.$$

Заместваме u^2 в израза за дясната страна на тъждеството на Слуцки и получаваме

$$\frac{\partial {x_1}^H}{\partial p_1} - x_1 \frac{\partial x_1}{\partial m} = -\frac{{p_2}^2}{(p_1+p_2)^2}\left(\frac{2m}{p_1p_2} + \frac{m}{{p_1}^2}\right) = -\frac{m{p_2}^2}{p_1(p_1+p_2)^2}\left(\frac{2}{p_2} + \frac{1}{p_1}\right)$$
$$= -\frac{m{p_2}^2}{p_1(p_1+p_2)^2}\frac{(2p_1+p_2)}{p_1p_2} = -\frac{mp_2(2p_1+p_2)}{{p_1}^2(p_1+p_2)^2} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}.$$

По аналогичен начин се проверява тъждеството за кръстосаната реакция на ${x_1}^M$ от изменението на цената на втората стока.

Задача 2. Да дена е функцията на търсене

$$x(p;m) = \frac{5m}{p^2+5p}.$$

(а) Да се намери диференциалния компенсационен ефект, ако цената на стоката е $p = 5$, а дохода $m = 180$.

(б) Да се намерят ефектите Δx_i, $\Delta {x_i}^S$ и $\Delta {x_i}^m$ (предполага се, че потребителя е компенсиран по Слуцки), ако стоката е поскъпнала 2 пъти.

Решение:

(а) Първо намираме потреблението на стоката преди промяната на цената ѝ:

$$x(p;m) = x(5;180) = \frac{5\cdot 180}{5^2+5\cdot 5} = 18.$$

Пресмятаме диференциалния общ ефект:

$$\frac{\partial x}{\partial p}(5;180) = -\frac{5m(2p+5)}{(p^2+5p)^2} = -\frac{900 \cdot 15}{50 \cdot 50} = -5{,}4.$$

Пресмятаме също и диференциалния ефект на дохода

$$x\frac{\partial x}{\partial m}(5;180) = 18\frac{5}{p^2+5p} = 1{,}8.$$

Тъй като от уравнението на Слуцки имаме

$$\frac{\partial x^H}{\partial p} = \frac{\partial x}{\partial p} + x\frac{\partial x}{\partial m} = -5{,}4 + 1{,}8 = -3{,}6.$$

Така общият ефект $(-5{,}4)$ се разлага на две съставящи: компенсационен ефект $(-3{,}6)$ и ефект на дохода $(-1{,}8)$.

(б) Нека стоката е променила цената си от $p = 5$ до $p' = 10$. Тогава със същия доход $(m = 180)$ потребителят ще закупи количество

$$x(p';m) = x(10;180) = \frac{5 \cdot 180}{10^2 + 5 \cdot 10} = 6.$$

За да може да закупи същото количество, очевидно, дохода му трябва да се утрои, т.е. $m' = 540$.

Тогава за общия ефект и ефекта на дохода ще имаме

$$\Delta x_i = x(p';m) - x(p;m) = 6 - 18 = -12,$$

$$\Delta {x_i}^m = x(p';m) - x(p';\ m') = 6 - 18 = -12.$$

Ясно е, че това се дължи на отсъствието на друга стока – компенсационният ефект се дължи на замяната на количества от по-неизгодната стока с количества от друга стока, докато тук имаме $x(p;m) = x(p';\ m')$.

Задача 3. Функцията на потребителска полезност има вида

$$u(x_1, x_2) = x_1 + 6\sqrt{x_2}$$

(а) Намерете оптималния набор от стоки при цени $p_1 = 10$, $p_2 = 6$ и доход $m = 270$.

(б) Намерете новия оптимален набор и новия доход на потребителя, ако втората стока е поскъпнала с 4, а потребителя е компенсиран по Слуцки.

(в) Същото като във (б) при положение, че потребителя е компенсиран по Хикс.

(г) Разложете общият ефект на ефект от субституцията и ефект от дохода при промяната на цени – доход както е във (б) и (в).

Решение:

(а) Имаме

$$S_{12} = \frac{\sqrt{x_2}}{3} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{10}{6} \Longrightarrow x_2 = 25.$$

Тогава за втората стока са похарчени 150 лв., следователно, за първата остават 120 лв. и $x_1 = 12$. Така ще имаме $x(p; m) = (12{,}25)$.

(б) Когато втората стока промени цената си до $p_2{}' = 10$, тогава ще се промени и условието за оптималност:

$$S_{12} = \frac{\sqrt{x_2}}{3} = \frac{p_1}{p_2{}'} = \frac{10}{10} \Longrightarrow x_2 = 9.$$

Тогава, при същия доход, потребителят ще изразходва 90 лв. за втората стока, за първата му остават 180 лв., следователно, $x_1 = 18$ и получаваме $x(p'; m) = (18{,}9)$. Той е компенсиран така, че да може да закупи стария набор от стоки, тогава $m' = 10 \cdot 12 + 10 \cdot 25 = 370$. Той обаче няма да го закупи, защото сега е изправен пред нова оптимизационна задача:

$$u(x_1, x_2) = x_1 + 6\sqrt{x_2} \to max, \text{ако } 10x_1 + 10x_2 = 370.$$

Тогава, очевидно, $x_2 = 9$, но $x_1 = 28$ и $x(p';\ m') = (28{,}9)$.

Общ ефект: $x(p'; m) - x(p; m) = (18{,}9) - (12{,}25) = (6, -16)$;

Ефект от дохода: $x(p'; m) - x(p';\ m') = (18{,}9) - (28{,}9) = (-10{,}0)$;

Ефект от замяната: $x(p';\ m') - x(p; m) = (28{,}9) - (12{,}25) = (16, -16)$.

(в) Нека потребителят да е компенсиран така, че да запази старото ниво на полезност $u(12{,}25) = 12 + 6\sqrt{25} = 42$. Тогава, понеже условието за оптималност е същото, като в (б), ще имаме $x_2 = 9$, а x_1 ще определим от условието $x_1 + 6\sqrt{9} = 42 \Longrightarrow x_1 = 24$ и новият му доход ще бъде $m' = 10 \cdot 24 + 10 \cdot 9 = 330$. Тогава, новата му оптимизационна задача ще изглежда така

$$u(x_1, x_2) = x_1 + 6\sqrt{x_2} \to max, \text{ако } 10x_1 + 10x_2 = 330.$$

Тогава неговият избор ще бъде $x_1 = 24$ и $x_2 = 9$. В този случай получаваме $x(p';\ m') = (24{,}9)$ ($x(p'; m) = (18{,}9)$ както в (б)).

Общ ефект: $x(p'; m) - x(p; m) = (18{,}9) - (12{,}25) = (6, -16)$;

Ефект от дохода: $x(p'; m) - x(p';\ m') = (18{,}9) - (24{,}9) = (-6{,}0)$;

Ефект от замяната: $x(p';\ m') - x(p; m) = (24{,}9) - (12{,}25) = (12, -16)$.

Задача 4. Известно е, че по отношение на две стоки потребител има функция на полезност на Стоун:

$$u(x, y) = (x - a)(y - b).$$

Освен това е известно, че:

(1) стоковите набори $A(7,72)$, $B(19,24)$ и $C(35,16)$ са безразлични един спрямо друга за него: при всеки един от тях той достига до една и също ниво на полезност $u = u_0$;

(2) при закупуването на наборите A или B той изразходва целия си наличен бюджет от 25 лв.

Да се намерят:

(а) функцията на полезност на потребителя, както и нивото на полезност $u = u_0$;

(б) цените на стоките;

(в) оптималния за него набор, ако трябва за достигането на ниво на полезност $u = u_0$ да изразходи минимум средства;

(г) оптималния за него набор, ако трябва да изхарчи целия си бюджет, за да постигне максимална полезност.

Решение:

(а) Тъй като стоковите набори $A(7,72)$, $B(19,24)$ и $C(35,16)$ са еквивалентни, точките с техните координати ще лежат на линията на безразличие

$$(x - a)(y - b) = u_0.$$

Като заместим техните координати в горното уравнение, получаваме системата

$$(7 - a)(72 - b) = (19 - a)(24 - b) = (35 - a)(16 - b) = u_0.$$

или

$$504 - 7b - 72a + ab = 456 - 19b - 24a + ab = 560 - 35b - 16a + ab.$$

От всеки от равните изрази изваждаме $456 + ab$ и след това умножаваме с -1, така получаваме

$$7b + 72a - 48 = 19b + 24a = 35b + 16a - 104.$$

От първото уравнение $48a = 12b + 48$ получаваме $a = 0{,}25b + 1$, което заместваме във второто уравнение $8a - 16b + 104 = 0$ и намираме $b = 8$ и $a = 3$. Така функцията на полезност на потребителя е

$$u(x, y) = (x - 3)(y - 8).$$

За да получим достигнатото в A, B и C ниво на полезност u_0 е достатъчно да заместим координатите на една от тях, например A. Ще имаме

$$u_0 = u(7,72) = (7 - 3)(72 - 8) = 4 \cdot 64 = 256.$$

(б) Нека цените на стоките са p_x и p_y. Тогава уравнението на бюджетната линия ще бъде

$$p_x x + p_y y = m = 25.$$

Тъй като при $A(7,72)$ и $B(19,24)$ имаме пълно изхарчване на бюджета, техните координати ще удовлетворяват горното уравнение. Получаваме

$$7p_x + 72p_y = 19p_x + 24p_y = 25.$$

От първото уравнение имаме $p_x = 4p_y$ и като заместим във второто намираме $p_x = 1$ и $p_y = 0{,}25$.

Във (в) имаме дуалната задача на потребителя: $p_x x + p_y y = x + 0{,}25y \to min$ при $(x-3)(y-8) = 256$, а б (г) – основната задача: $u(x,y) = (x-3)(y-8) \to max$ ако $x + 0{,}25y = 25$. И за двете задачи трябва да е изпълнено условието за оптималност $(x-3) = 0{,}25(y-8) \Longrightarrow x = 0{,}25y + 1$.

(в) Заместваме условието за оптималност в ограничението на задачата $(x-3)(y-8) = 256$ и получаваме $(0{,}25y - 2)(y-8) = 256 \Longrightarrow 0{,}25(y-8)^2 = 256$ или $(y-8)^2 = 1024$. Така намираме оптималния за тази задача набор: $y = 40$ и $x = 11$. За закупуването на този набор ще са похарчени $11 + 0{,}25 \cdot 40 = 21$ лв.

(г) Заместваме условието за оптималност в бюджетното ограничение и получаваме $0{,}25y + 1 + 0{,}25y = 25$, откъдето $y = 48$ и $x = 13$. Нивото на полезност, което ще бъде достигнато при закупуването на този набор е $u(13{,}48) = (13-3)(48-8) = 10 \cdot 40 = 400$.

Задача 5. В таблицата са дадени цените и маргиналните полезности от придобиването на един брой от всяка от четирите стоки: посещение в нощен клуб, покупка на книга, гледане на филм в киносалон и закупуване на музикален диск. Да се намери оптималния набор от тези четири стоки за потребител, разполагащ с бюджет от 95 лв. за тях.

	Нощен клуб 30 лв.	Книга 15 лв.	Кино 10 лв.	CD 5 лв.
1	21	18	15	6
2	18	15	10	4
3	9	12	9	3.5
4	7.5	10.5	8	3
5	6	9	7	3

Пояснение към таблицата. Маргиналната полезност на първото закупено CD е 6, на второто – 4, на третото – 3,5 и т.н.)

Решение:

Намираме маргиналните полезности на 1 лв., разделяйки указаните в таблицата маргинални полезности за добиване на един брой от тези стоки ц цените им. Резултатите нанасяме в нова таблица

	Нощен клуб 30 лв.	Книга 15 лв.	Кино 10 лв.	CD 5 лв.
1	0,7	1,2	1,5	1,2
2	0,6	1,0	1,0	0,8
3	0,3	0,8	0,9	0,7
4	0,25	0,7	0,8	0,6
5	0,2	0,6	0,7	0,6

Маргиналните полезности за един похарчен лев за всяка стока трябва да съвпадат в точката на оптимума, т.е.

$$\frac{M_1}{p_1} = \frac{M_2}{p_2} = \frac{M_3}{p_3} = \frac{M_4}{p_4} = \lambda.$$

(тук с M_i сме означили маргиналната полезност на i-тата стока).

Сега извършваме пресмятания за различни стойности на λ:

- $\lambda = 0{,}6$ – включваме бройките, при които частните $\frac{M_i}{p_i} \geq 0{,}6$: 2 посещения на нощен клуб (общо 60 лв.) + 5 книги (75 лв.) + 5 посещения на кино (50 лв.) + 5 бр. CD (25 лв.) или сумарно 210 лв. (преразход на бюджета!);

- $\lambda = 0{,}7$ - 1 посещение на нощен клуб (30 лв.) + 4 книги (60 лв.) + 5 посещения на кино (50 лв.) + 3 бр. CD (15 лв.) или сумарно 155 лв. (преразход!);

- $\lambda = 0{,}8$ - 3 книги (45 лв.) + 4 посещения на кино (40 лв.) + 2 бр. CD (10 лв.) или сумарно 95 лв. (точно!);

- $\lambda = 0{,}9$ - 2 книги (30 лв.) + 3 посещения на кино (30 лв.) + 1 бр. CD (5 лв.) или сумарно 65 лв. (остатък!);

- $\lambda = 1{,}0$ - 2 книги (30 лв.) + 2 посещения на кино (20 лв.) + 1 бр. CD (5 лв.) или сумарно 55 лв. (остатък!).

Очевидно, $\lambda = 0{,}8$ и $\frac{M_i}{p_i} \geq 0{,}8$ ще важи за маргиналните полезности в оптималния за потребителя набор, т.е. ще бъдат закупени 3 книги, 4 билета за кино и 2 бр. CD. Общата полезност за потребителя ще бъде $18 + 15 + 12 + 15 + 10 + 9 + 8 + 6 + 4 = 97$.

Задача 6. Индивид има функции на полезност за две стоки: $u(x) = 20x - x^2$ и $v(y) = 40y - 0{,}5y^2$, като полезността от двете стоки е сума от двете функции на полезност. Цените на стоките са $p_x = 2$ и $p_y = 1$, а общия доход на индивида, използван за тези две стоки е I. Определете интервала на изменение на I, оптималните количества от двете стоки в зависимост от дохода и при конкретни стойности на I – 30, 35 и 40.

Решение:

Условието за оптимален потребителски избор е

$$\frac{u'(x)}{p_x} = \frac{v'(y)}{p_y} = \lambda,$$

Тъй като маргиналната полезност на първата стока е $u'(x) = 20 - 2x$, то от условието $u'(x) \geq 0$, получаваме $x \leq 10$. Аналогично, маргиналната полезност на втората стока е $v'(y) = 40 - y$, следователно $y \leq 40$. В горното равенство заместваме маргиналните полезности и съответните цени и получаваме

$$\frac{20 - 2x}{2} = \frac{40 - y}{1} \Leftrightarrow y = 30 - x.$$

Бюджетното равенство за тази задача е

$$p_x x + p_y y = 2x + y = I.$$

Като заместим y с $30 - x$ в последното уравнение, получаваме

$$x = I - 30 \Longrightarrow y = 60 - I.$$

Условието $0 \leq x \leq 10$ е еквивалентно на $30 \leq I \leq 40$, а условието $0 \leq y \leq 40$ – на $20 \leq I \leq 60$. Сечението на двете множества е $30 \leq I \leq 40$. За дадените стойности на бюджета I получаваме следните разпределения на потреблението на двете стоки таблицата

I	x	y
30	0	30
35	5	25
40	10	20

Задача 7. Разглеждаме три пазара – на кашкавал, сирене и имитационен продукт с растителни мазнини (лъжесирене). На тези пазари съществуват три групи потребители – двама богати, трима средни и петима бедни. Богатите заделят по 100 лв. общо за трите стоки в съотношение 60% за кашкавал и 40% за сирене. Средните – по 50 лв. – 30% за кашкавал, 60% за сирене и 10% за лъжесирене. Бедните – 20 лв. – 10% за кашкавал, 50% за сирене и 40% за лъжесирене. Функциите на предлагане на тези стоки са линейни, освен това е известно, че предлагането на кашкавала започва от 7 лв., на сиренето – от 4 лв., а на лъжесиренето – от 2 лв. При предлагане от по 25 кг. За всяка от стоките цените са – 15 лв. за кашкавала, 8 лв. за сиренето и 3 лв. за лъжесиренето. Да се намерят индивидуалните и пазарни функции на търсене на всяка една от стоките; функциите им на предлагане; равновесните цени и количества и потреблението на всяка от стоките от страна на всеки от участниците в тези пазари.

Решение:

Ако функцията на полезност на потребителя е мултипликативна

$$U = a{x_1}^{\alpha_1}{x_2}^{\alpha_2}{x_3}^{\alpha_3} \text{ като } \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

и общият бюджет за всички стоки е I, т.е. бюджетното равенство е

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = I,$$

тогава, в условие на оптимален избор, съотношението между разходите за отделните стоки ще съвпада със съотношението между степенните показатели във функцията на полезност:

$$p_1x_1 : p_2x_2 : p_3x_3 = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3.$$

Тогава ще имаме

$$p_1x_1 = \alpha_1 I, \;\; p_2x_2 = \alpha_2 I, \;\; p_3x_3 = \alpha_3 I.$$

Означаваме индивидуалните функции на търсене с ${x_i}^k$, като долният индекс е за стоката (1- кашкавал, 2 – сирене и 3 – лъжесирене), а горния – за вида потребител (1 – богат, 2 – среден и 3 – беден).

Съгласно казаното по-горе, индивидуалните функции на търсене на богатия потребител ще бъдат

$${x_1}^1 = \frac{60}{p_1}, \;\; {x_2}^1 = \frac{40}{p_2}, \;\; {x_3}^1 = 0;$$

за средния –

$${x_1}^2 = \frac{15}{p_1}, \;\; {x_2}^2 = \frac{30}{p_2}, \;\; {x_2}^2 = \frac{5}{p_3};$$

а за бедния –

$${x_1}^3 = \frac{2}{p_1}, \;\; {x_2}^3 = \frac{10}{p_2}, \;\; {x_2}^3 = \frac{8}{p_3}.$$

Сега ще съставим сумарните функции на търсене за трите стоки. За първата стока (кашкавала) тя ще бъде

$$x_1(p_1) = 2{x_1}^1 + 3{x_1}^2 + 5{x_1}^3 = \frac{120}{p_1} + \frac{45}{p_1} + \frac{10}{p_1} = \frac{175}{p_1};$$

за втората стока (сиренето) –

$$x_2(p_2) = 2{x_2}^1 + 3{x_2}^2 + 5{x_2}^3 = \frac{80}{p_2} + \frac{90}{p_2} + \frac{50}{p_2} = \frac{220}{p_2}$$

и за третата (лъжесиренето) –

$$x_3(p_3) = 2{x_3}^1 + 3{x_2}^2 + 5{x_2}^3 = 0 + \frac{15}{p_3} + \frac{40}{p_3} = \frac{55}{p_3}.$$

Сега трябва да възстановим функциите на предлагане на стоките, като използваме данните за тях. За първата стока линейната функция на предлагане трябва да бъде

$$y_1(p_1) = -a_1 + b_1 p_1,$$

като коефициентите a_1 и b_1 определяме от

$$y_1(7) = -a_1 + 7b_1 = 0 \quad \text{и} \quad y_1(15) = -a_1 + 15b_1 = 25.$$

Като решим горната система получаваме

$$a_1 = \frac{175}{8}, b_1 = \frac{25}{8} \quad \text{и} \quad y_1(p_1) = -\frac{175}{8} + \frac{25}{8}p_1.$$

Аналогично, линейната функция на предлагане за втората стока ще бъде

$$y_2(p_2) = -a_2 + b_2 p_2,$$

като $y_2(4) = -a_2 + 4b_2 = 0$ и $y_2(8) = -a_2 + 8b_2 = 25$. Решението е

$$a_2 = 25, b_2 = \frac{25}{4} \quad \text{и} \quad y_2(p_2) = -25 + \frac{25}{4}p_2.$$

Линейната функция на предлагане за третата стока ще е

$$y_3(p_3) = -a_3 + b_3 p_3,$$

като $y_3(2) = -a_3 + 2b_3 = 0$ и $y_3(3) = -a_3 + 3b_3 = 25$. Решението е

$$a_3 = 50, b_3 = 25 \quad \text{и} \quad y_3(p_3) = -50 + 25p_3.$$

След като получихме функциите на пазарно търсене и предлагане за трите стоки, можем да съставим уравненията на пазарно равновесие за тях и от решенията им да получим равновесните величини – цени и количества. За първата стока ще имаме

$$q_1 = x_1(p_1) = \frac{175}{p_1} = -\frac{175}{8} + \frac{25}{8}p_1 = y_1(p_1),$$

откъдето получаваме квадратното уравнение за p_1

$${p_1}^2 - 7p_1 - 56 = 0$$

с положителен корен

$$p_1 = \frac{7 + \sqrt{49 + 224}}{2} \approx 11{,}76.$$

За равновесното количество на първата стока ще имаме

$$q_1 = x_1(11{,}76) = y_1(11{,}76) = 14{,}88.$$

Аналогично, уравнението на пазарното равновесие за втората стока е

$$q_2 = x_2(p_2) = \frac{220}{p_2} = -25 + \frac{25}{4}p_2 = y_2(p_2).$$

Квадратното уравнение за p_2 ще бъде

$$5{p_2}^2 - 20p_2 - 176 = 0$$

с положителен корен

$$p_2 = \frac{10 + \sqrt{100 + 880}}{5} \approx 8{,}26.$$

а равновесното количество на тази стока е

$$q_2 = x_2(8{,}26) = y_2(8{,}26) = 26{,}63.$$

За третата стока получаваме

$$q_3 = x_3(p_3) = \frac{55}{p_3} = -50 + 25p_3 = y_3(p_3),$$

$$5{p_3}^2 - 10p_3 - 11 = 0,$$

$$p_3 = \frac{5 + \sqrt{25 + 55}}{5} \approx 2{,}79,$$

$$q_3 = x_3(2{,}79) = y_3(2{,}79) = 19{,}71.$$

Сега трябва да видим как тези равновесни количества ще бъдат разпределени между отделните потребители. За първата стока (долният индекс е 1) ще имаме: за индивидуален богат потребител

$${q_1}^1 = {x_1}^1(p_1) = \frac{60}{11{,}76} = 5{,}10;$$

за среден потребител

$${q_1}^2 = {x_1}^2(p_1) = \frac{15}{11{,}76} = 1{,}28;$$

за беден потребител

$${q_1}^3 = {x_1}^3(p_1) = \frac{2}{11{,}76} = 0{,}17.$$

За втората стока (долният индекс е 2) получаваме:

$${q_2}^1 = {x_2}^1(p_2) = \frac{40}{8{,}26} = 4{,}84;$$

за среден потребител

$$q_2{}^2 = x_2{}^2(p_2) = \frac{30}{8{,}26} = 3{,}63;$$

за беден потребител

$$q_2{}^3 = x_2{}^3(p_2) = \frac{10}{8{,}26} = 1{,}21;$$

За третата стока (долният индекс е 3) ще имаме:

$$q_3{}^1 = x_3{}^1(p_3) = 0;$$

за среден потребител

$$q_3{}^2 = x_3{}^2(p_3) = \frac{5}{2{,}79} = 1{,}79;$$

за беден потребител

$$q_3{}^3 = x_3{}^3(p_3) = \frac{8}{2{,}79} = 2{,}87.$$