ТЕМА 3. МАТЕМАТИЧЕСКА ТЕОРИЯ НА ПОТРЕБИТЕЛИТЕ

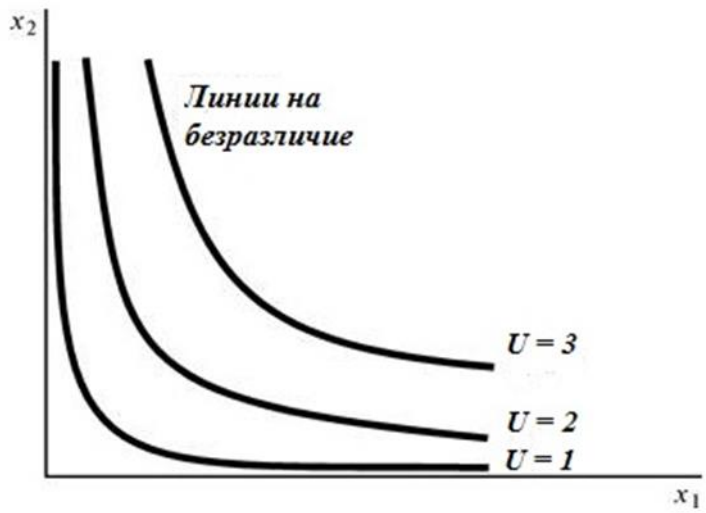
ТЕОРИЯ

1. Функция на потребителската полезност. Под потребителски набор от стоки ще разбираме наредената n-торка $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, където $x_i, i = 1,2, \dots, n$ е количеството от i-тата стока. Очевидно, $x_i \geq 0$ (в частност може за някои номера i да имаме $x_i = 0$ ако i-тата стока не присъства в набора). Така наборите от стоки ще бъдат елементи на множеството

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \,/ x_i \geq 0; i = 1,2, \dots, n\}.$$

Това множество $\mathbb{R}_+^n$ ще наричаме пространство на потребителските набори.

Функцията $U(x) = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$, дефинирана в $\mathbb{R}_+^n$ наричаме **функция на полезност** (utility function), ако тя измерва „ползата“, която получава потребителя от даден стоков набор (цигарите са „полезни“ за пушача). Нека $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y(y_1, y_2, \dots y_n)$ са два потребителски набора и потребителя предпочита y пред x ($y \succ x$), тогава трябва да е изпълнено $U(y) > U(x)$.



Множеството от такива стокови набори x, за които $U(x) = \alpha$ се нарича линия на безразличие, съответстваща на достигнато ниво на полезност α. Като варираме α получаваме еднопараметрична фамилия от линии за U, която се нарича карта на безразличие за функцията на полезност U. На линиите на безразличие, които са по-отдалечени от началото на координатната система ще отговарят по-големи стойности на функцията на полезност (така, както е показано на чертежа).

За дадено потребителско предпочитание съответстващата функция на полезност не е единствена. Нека $\widehat{U} = h(U)$ като $h(.)$ е монотонно растяща функция. Тогава, тъй като $\widehat{U}(x) > \widehat{U}(y) \Leftrightarrow U(x) > U(y) \Leftrightarrow x \succ y$ функцията $\widehat{U}(x)$ ще бъде функция на полезност за същото предпочитание.

2. Примери за функции на полезност. Нека U е функция на полезност. Тогава i-тата първа частна производна $U_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}$ ще наричаме маргинална полезност на i-

тата стока от потребителския набор. Неокласическа функция на полезност се нарича такава функция, която изпълнява първия закон на Госен: маргиналната полезност на всяка стока не нараства с нарастването на количеството на стоката. Математически, това означава, че за вторите частни производни е изпълнено условието $U_{ii} \leq 0$.

За моделиране на потребителската полезност основно се използват следните функции:

1. Линейна функция на полезност или функция на полезност за напълно взаимозаменяеми стоки. Видът и е

$$U(x) = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n$$

2. Функция на полезност на Леонтиев – нарича се още функция на полезност за напълно взаимодопълващи се стоки. Има вида

$$U(x) = min\left\{\frac{x_1}{b_1}, \frac{x_2}{b_2}, \dots, \frac{x_n}{b_n}\right\}$$

3. Мултипликативна функция на полезност или функция на полезност от Кооб-Дъгласов тип. При $n = 2$ видът и е

$$U(x) = a{x_1}^{b_1}{x_2}^{b_2}, b_1 > 0 \text{ и } b_2 > 0$$

При $b_1 + b_2 = 1$ тя се нарича функция на Кооб-Дъглас.

4. Функция на полезност на Стоун. Има вида (при $n = 2$)

$$U(x) = a(x_1 - c_1)^{b_1}(x_2 - c_2)^{b_2}$$

Тъй като $U(c_1, x_2) = U(x_1, c_2) = U(c_1, c_2) = 0$ за потребителското предпочитание, моделирано с тази функция на полезност се предполага, че c_1 и c_2 са минималните количества от стоките, необходими на потребителя.

5. Обобщена мултипликативна функция. Тъй като

$$U(x) = a(x_1 + c_1)^{b_1}(x_2 + c_2)^{b_2} \text{ и } U(x) = a(x_1 + c_1)^{b_1}(x_2 - c_2)^{b_2}$$

са функции на полезност, то можем да обобщим мултипликативната функция на полезност, функцията на полезност на Стоун и горните две функции на полезност чрез

$$U(x) = a(x_1 + \varepsilon_1c_1)^{b_1}(x_2 + \varepsilon_2c_2)^{b_2},\ \varepsilon_i = 0, +1, -1, i = 1,2$$

6. Функция на полезност на Бернули или логаритмична функция на полезност. Има вида (при $n = 2$)

$$U(x) = b_1 \ln(x_1 - c_1) + b_2 \ln(x_2 - c_2),\ b_i > 0, x_i \geq c_i, i = 1,2$$

Лесно се вижда, че тя е еквивалентна на функцията на полезност на Стоун.

7. Квазилинейна функция на полезност. В случая, когато $n = 2$, тя има вида

$$U(x) = f(x_1) + x_2 \ ,$$

където $f(x_1)$ е произволна растяща вдлъбната функция (т.е. неокласическа функция на полезност за една стока).

8. Адитивна функция на полезност. За $n = 2$ има вида

$$U(x) = f(x_1) + g(x_2),$$

като $f(x_1)$ и $g(x_2)$ са произволни растящи вдлъбнати функции. Адитивната функция на полезност е обобщение на линейната, квазилинейната и бернулиевата функция на полезност.

3. Маргинална норма на заместване. Норма на заместване на втората стока с първата е величината

$$RS_{12} = -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \ |_{U=const} > 0,$$

която показва с колко единици трябва да намалее количеството на втората (заместваната) стока, ако количеството на първата (заместващата) стока е нарастнало с една единица, така че потребителя да запази нивото на полезност. Маргинална норма на заместване е границата на нормата на заместване при $\Delta x \to 0$

$$MRS_{12} = \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} \ |_{U=const} = -\frac{dx_2}{dx_1} \ |_{U=const}$$

От формулата за пълния диференциал на U $dU = U_1 dx_1 + U_2 dx_2$ и $dU = 0$ върху линията на безразличие получаваме

$$MRS_{12} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} \ .$$

4. Бюджетно множество. Нека $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ са цените на стоките. Тогава, ако $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ са количествата им в един произволен стоков набор, то скаларното произведение $px = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$ на ценовия вектор с количествения вектор е сумата, която потребителят изразходва, за да придобие набора x. Нека m е дохода на потребителя (бюджета, заделен за придобиването на тези стоки). Условието е стойността на набора от стоки x да не надвиши бюджета m е

$$px = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \leq m$$

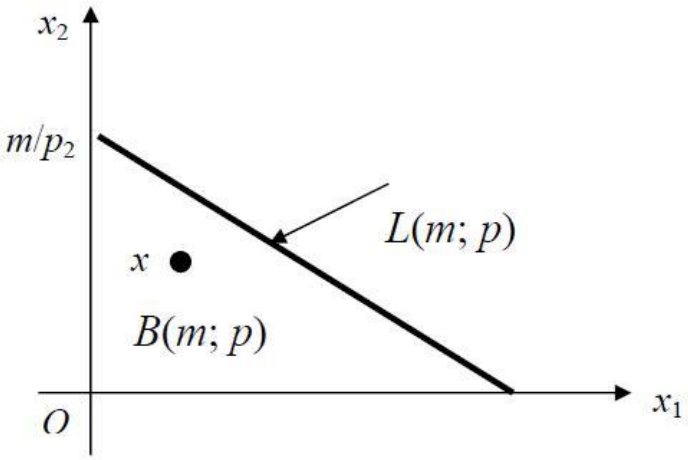
Множеството от стокови набори, достъпни за потребителя

$$B(m, p) = \{x \in \mathbb{R}_+^n / px \leq m\}$$

се нарича бюджетно множество, а границата му

$$L(m,p) = \{x \in \mathbb{R}_+^n / px = m\}$$

бюджетна равнина.



В случай, че $n = 2$ говорим за бюджетната права (на графиката) $p_1x_1 + p_2x_2 = m$. Тя съединява точките $\left(\frac{m}{p_1}, 0\right)$ и $\left(0, \frac{m}{p_2}\right)$, получаващи се при похарчването на целия бюджет само за една от стоките. Ако варираме m, но запазваме цените $p = (p_1, p_2)$ ще получаваме бюджетни прави, успоредни помежду си. За всяка от тях ценовия вектор p ще бъде нормален вектор.

5. Оптимизационни задачи на потребителя. Основната задача се формулира така: какви количества от стоките трябва да закупи потребителя, за да удовлетвори максимално потребностите си, без да надвишава своя бюджет. Наред с тази задача, може да се формулира и друга: какви количества от стоките трябва да закупи потребителя, за да похарчи минимум средства, като постигне определена степен на удовлетвореност. Първата задача се нарича основна задача на потребителя, а втората – дуална задача. Двете задачи са взаимно дуални. От решенията на тези задачи ще се определя неговото оптимално поведение на стоковите пазари – така наречения потребителски избор.

основна задача: $U(x_1, x_2) \to \max$	при $px = p_1x_1 + p_2x_2 \leq m$
дуална задача: $px = p_1x_1 + p_2x_2 \to \min$	при $U(x) \geq u$

Доказва се, че задачите на потребителя могат да се сведат до

основна задача: $U(x_1, x_2) \to \max$	при $px = p_1x_1 + p_2x_2 = m$
дуална задача: $px = p_1x_1 + p_2x_2 \to \min$	при $U(x) = u$

Решение на основната задача: При зададени цени p_1, p_2 и доход m (екзогенните величини за модела) получаваме равновесните стойности на количествата от стоките ${x_1}^*, {x_2}^*$ и множителя λ^*(ендогенните величини), за които е в сила:

$$\frac{U_1({x_1}^*, {x_2}^*)}{p_1} = \frac{U_2({x_1}^*, {x_2}^*)}{p_2} = \lambda^* \quad \text{и} \quad p_1{x_1}^* + p_2\,{x_2}^* = m.$$

Множителят λ^* се нарича маргинална полезност на похарчените пари (в условие на оптимален избор).

Решение на дуалната задача: при задаване на стойностите на екзогенните величини p_1, p_2 и u се получават равновесните значения на ендогенните величини за модела ${x_1}^{**}, {x_2}^{**}$ и μ^{**}, за които е в изпълнено

$$\frac{p_1}{U_1({x_1}^{**}, {x_2}^{**})} = \frac{p_2}{U_2({x_1}^{**}, {x_2}^{**})} = \mu^{**} \quad \text{и} \quad U({x_1}^{**}, {x_2}^{**}) = u.$$

Вижда се (и при двете задачи), че за оптималния набор е характерно изравняването на отношенията на маргиналните полезности към цените за всички стоки от набора.

Друг извод: в условие на оптимален избор маргиналната норма на заместване е равна на отношението на цените на стоките:

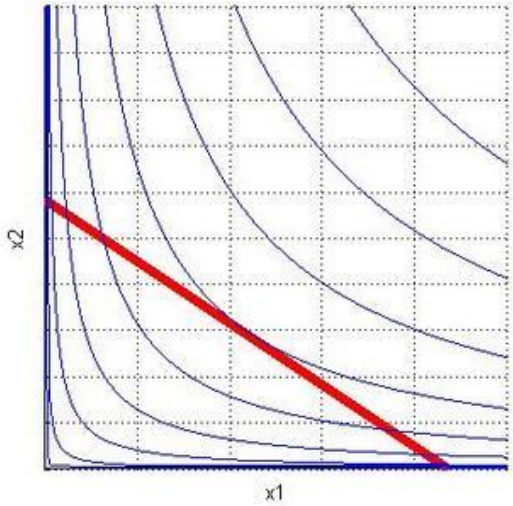
$$S_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} \Big|_{U=const} = \frac{U_i}{U_j} = \frac{p_i}{p_j}.$$

За решенията на двете взаимно дуални задачи на потребителя е валиден принципа на дуалност в потребителската теория: ако максималната полезност, която се достига при решаването на основната задача е u (ограничението на дуалната задача), то минималният бюджет, получаващ се при решаване на дуалната задача е m (ограничението на основната задача) и обратното. Освен това, решенията на двете задачи съвпадат, т.е. ${x_1}^{*} = {x_1}^{**}$ и ${x_2}^{*} = {x_2}^{**}$.

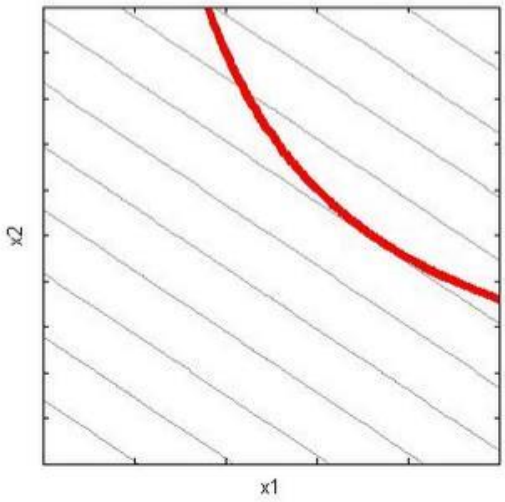
6. **Геометрична интерпретация**. Ценовия вектор $p(p_1, p_2, \dots, p_n)$ е нормален вектор за бюджетната равнина (права при $n = 2$) във всяка нейна точка. От друга страна, градиентът $U'(x) = gradU(x) = \big(U_1(x), U_2(x), \dots, U_n(x)\big)$ е нормален вектор за повърхнината (линията) на безразличие в произволна нейна точка. В точките на равновесие за двете задачи е изпълнено

$$U'(x) = \lambda p \text{ за основната задача и } p = \mu U'(x) \text{ за дуалната,}$$

т.е. ценовият вектор и градиентът са колинеарни. Тогава можем да кажем, че в условие на оптимален избор потребителят избира такива точки от пространството на стоките, в които бюджетната равнина (права) е допирателна равнина (права) към повърхнината (линията) на безразличие. На рис.14. са показани геометричните интерпретации на решенията на основната и дуалната задача.



Геометрична интерпретация на решението на основната задача



Геометрична интерпретация на решението на дуалната задача

При основната задача е фиксирана бюджетната права $p_1x_1 + p_2x_2 = m$, тогава измежду линиите на безразличие $U(x_1, x_2) = \alpha, \alpha > 0$ ние избираме тази, за която бюджетната права е допирателна. При дуалната задача е фиксирана линията на безразличие $U(x_1, x_2) = u$ и от всички бюджетни прави $p_1x_1 + p_2x_2 = \beta, \beta > 0$ се избира тази, която е допирателна към линията на безразличие.

7. Функции на потребителско търсене. Ако при основната задача предполагаме, че цените p_1, p_2 и дохода m са независими променливи, то решенията на задачата са функции на три променливи – Маршалови функции на търсене:

$$x_1{}^M = x_1{}^M(p_1, p_2, m) \text{ и } x_2{}^M = x_2{}^M(p_1, p_2, m), \text{такива че}$$

$$U(x_1{}^M, x_2{}^M) = U_{max} \text{ и } p_1x_1{}^M + p_2x_2{}^M = m.$$

По аналогичен начин от решението на дуалната задача се определят Хиксовите функции на потребителско търсене

$$x_1{}^H = x_1{}^H(p_1, p_2, u) \text{ и } x_2{}^H = x_2{}^H(p_1, p_2, u), \text{такива че}$$

$$p_1x_1{}^H + p_2x_2{}^H = (p_1x_1 + p_2x_2)_{min} \text{ и } U(x_1{}^H, x_2{}^H) = u.$$

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ

Задача 1. Да се намерят еквивалентните функции на полезност, описващи еднакво потребителско предпочитание: $u_1 = 2\sqrt{xy}$, $u_2 = 0{,}5x + y$, $u_3 = 0{,}5\ln x + \ln y$,

$u_4 = 4x^2 + 4xy + y^2$, $u_5 = 4x^2 + 4 + y^2$, $u_6 = 0{,}5x^2y$, $u_7 = x + 0{,}5y$, $u_8 = (2x)^2 + y^2$, $u_9 = 3xy^2$, $u_{10} = x + 0{,}5$.

Решение:

Трябва за всяка от функциите на полезност да проверим дали друга функция може да се получи от нея чрез монотонна трансформация, тогава двете функции ще , описват еднакво потребителско предпочитание. Основни монотонни трансформации са: добавяне на константа, умножение с константа, степенуване (коренуване) и логаритмуване).

За функцията $u_1 = 2\sqrt{x}y$ ще имаме $\frac{3}{4}{u_1}^2 = \frac{3}{4}\left(2\sqrt{x}y\right)^2 = 3xy^2 = u_9 \Longrightarrow u_1 \sim u_9$. За същата функция ще имаме и $\ln\frac{u_1}{2} = \ln\sqrt{x}y = \ln\sqrt{x} + \ln y = 0{,}5\ln x + \ln y = u_3$, така че $u_1 \sim u_3$. Естествено, поради транзитивността на релацията на еквивалентност, ще имаме и $u_3 \sim u_9$.

За функцията $u_4 = 4x^2 + 4xy + y^2$ получаваме $u_4 = (2x + y)^2 = \left(2(x + 0{,}5y)\right)^2 = 4{u_7}^2$, така че $u_4 \sim u_7$.

За $u_5 = 4x^2 + 4 + y^2$ ще имаме $u_5 = (2x)^2 + y^2 + 4 = u_8 + 4$.

Функциите на полезност u_2, u_6 и u_{10} се вижда, че не са еквивалентни с никоя друга функция.

Задача 2. Разглеждаме потребителско предпочитание, зададено с функцията на полезност $U = {x_1}^{\frac{1}{2}}{x_2}^{\frac{1}{2}}$ и потребителски набор $x^0 = (4{,}9)$.

(а) да се състави уравнението на линията на безразличие за този потребителски набор и уравнението на допирателната към нея в точката x^0.

(б) нека x^1 е друг потребителски набор, безразличен спрямо x^0, при който първата стока е в количество 6. Да се намери количеството на втората стока и да се пресметне съответната норма на заместване.

(в) да се определят цените на стоките p_1 и p_2, ако е известно, че за закупуването на потребителския набор x^0 са похарчени 360 лв. и този набор съответства на оптималния избор на потребителя.

Решение:

(а) Тъй като $U(4{,}9) = 6$, то през точката x^0 минава линия на безразличие – хиперболата ${x_1}^{\frac{1}{2}}{x_2}^{\frac{1}{2}} = 6$ $(x_1 . x_2 = 36)$. Нормалният вектор към линията в произволна

точка е $gradU = (U_1, U_2) = \left(\frac{1}{2}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}}\right)$, а в точка x^0 - $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{3}\right)$. Тогава, уравнението на допирателната към линията в точка x^0 е

$$\frac{3}{4}(x_1 - 4) + \frac{1}{3}(x_2 - 9) = 0 \text{ или } 9x_1 + 4x_2 = 72.$$

(б) Втората координата на x^1 се определя от условието $\sqrt{6}\sqrt{x_2} = 6$, следователно, $x_2 = 6$ и $x^1 = (6,6)$. Тъй като при прехода от набора x^0 към набора x^1 количеството на втората стока намалява (от 9 до 6), а на първата нараства (от 4 до 6), то част от втората се замества с количество от първата (за да се запази полезността), следователно съответната норма на заместване е RS_{12}. Получаваме

$$RS_{12} = -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\ |_{U=const} = -\frac{(-3)}{2} = -\frac{3}{2}.$$

(в) При условие на оптимален избор имаме интересно геометрично свойство: бюджетната линия е допирателна към линията на безразличие в точката с координати – количествата стоки от оптималния набор. От (а) знаем, че допирателната към линията на безразличие през x^0 е $9x_1 + 4x_2 = 72$. От друга страна уравнението на бюджетната линия е $p_1x_1 + p_2x_2 = 360$. Двете уравнения са уравнения на една и съща права – ако умножим първото с 5 получаваме $45x_1 + 20x_2 = 360$, следователно, $p_1 = 45$ и $p_2 = 20$.

Задача 3. Милена изхарчва 32 лв. на месец за портокали – x кг и банани – y кг при цени $p_x = 1$ лв. и $p_y = 2$ лв. Колко портокали и банани е закупила Милена, ако полезността на портокалите и бананите се задава с:

(а) $u(x, y) = 8x + 4y + xy$; (б) $u(x, y) = \sqrt{5x} + \sqrt{6y}$; (в) $u = \frac{xy}{x+2y}$?

Решение:

(а) За частните производни ще имаме

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial x} = 8 + y \quad \text{и} \quad u_2 = \frac{\partial u}{\partial y} = 4 + x.$$

Тогава условието за оптималност на потребителския избор е

$$S_{12} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{8 + y}{4 + x} = \frac{p_x}{p_y} = \frac{1}{2} \Longrightarrow 16 + 2y = 4 + x \text{ или } x = 12 + 2y.$$

Заместваме в бюджетното ограничение $p_x x + p_y y = x + 2y = 32$ и получаваме $12 + 2y + 2y = 12 + 4y = 32 \Longrightarrow y = 5$ и $x = 22$.

(б) частни производни:

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}} \quad \text{и} \quad u_2 = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{y}},$$

Условие за оптималност:

$$S_{12} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{y}}{\sqrt{6}\sqrt{x}} = \frac{p_x}{p_y} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{5y}{6x} = \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad y = 0{,}3x.$$

Заместваме в бюджетното условие $x + 2y = 32$ и получаваме $1{,}6x = 32 \Longrightarrow x = 20$ и $y = 6$.

(в) частни производни:

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y(x+2y) - xy}{(x+2y)^2} = \frac{2y^2}{(x+2y)^2} \; ; \; u_2 = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x(x+2y) - xy \cdot 2}{(x+2y)^2} = \frac{x^2}{(x+2y)^2}.$$

Условие за оптималност:

$$S_{12} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{2y^2}{x^2} = \frac{p_x}{p_y} = \frac{1}{2} \Longrightarrow 4y^2 = x^2 \quad \text{или} \quad y = 0{,}5x.$$

Заместваме в бюджетното условие $x + 2y = 32$ и получаваме $2x = 32 \Longrightarrow x = 16$ и $y = 8$.

Задача 4. Да се докаже, че потребител, чиято функция на полезност е мултипликативна, разпределя бюджетите си за покупка на отделните стоки (в условие на оптимален избор) в същото отношение, което имат степенните им показатели.

Решение:

Да разгледаме потребителско предпочитание, зададено с мултипликативна функция на полезност $U = a{x_1}^{b_1}{x_2}^{b_2}$. За частните производни ще имаме

$$U_1 = ab_1{x_1}^{b_1-1}{x_2}^{b_2} \quad \text{и} \quad U_2 = ab_2{x_1}^{b_1}{x_2}^{b_2-1}$$

Условието за оптимално разпределение на стоките (според полезността и цените) в този случай е:

$$S_{12} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{ab_1{x_1}^{b_1-1}{x_2}^{b_2}}{ab_2{x_1}^{b_1}{x_2}^{b_2-1}} = \frac{b_1x_2}{b_2x_1} = \frac{p_1}{p_2} \Longrightarrow \frac{p_2x_2}{p_1x_1} = \frac{b_2}{b_1}.$$

Забележка: В случай на набори от n стоки ще имаме

$$p_1x_1 : p_2x_2 : \dots : p_nx_n = b_1 : b_2 : \dots : b_n.$$

Задача 5. Потребител изхарчва общо 260 лв. за четири вида стоки: бензин в количество x при цена от 2,50 лв./литър, билети за кино y при цена от 10 лв. за билет, бира в количество z бутилки при цена от 2 лв. за бутилка и t на брой кафета при цена от 1 лв. за брой. Какъв е неговия оптимален набор от стоки, при положение, че функцията му на полезност е $u = x^5y^2z^3t^3$?

Решение:

Тъй като функцията на полезност е мултипликативна, бюджетите за покупка на отделните стоки ще бъдат разпределени в такова отношение, както степенните показатели. Ще имаме

$$2{,}5x : 10y : 2z : t = 5 : 2 : 3 : 3.$$

От друга страна, в сила е бюджетното ограничение

$$2{,}5x + 10y + 2z + t = 260.$$

Това означава, че бюджетът за покупка на бензин $(2{,}5x)$ ще бъде $5/13$ от целия (260лв.), т.е. ще възлиза на 100 лв., което прави $x = 40$; бюджетът за кино $(10y)$ - $2/13$ от 260 лв. или 40 лв., следователно, $y = 4$; бюджетът за бира $(2z)$ - $3/13$ от 260 лв. или 60 лв., $z = 30$; бюджетът кафе (t) - $3/13$ от 260 лв. или 60 лв., $t = 60$.

Задача 6. За функциите на потребителска полезност:

(а) $U = {x_1}^2{x_2}^3$; (б) $U = x_1 + 4\sqrt{x_2}$; (в) $U = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$: (г) $U = min\{x_1, 3x_2\}$.

да се:

(1) пресметне маргиналната норма на заместване S_{12};

(2) намери условието за оптималност;

(3) намерят маршаловите функции на търсене ${x_1}^M = {x_1}^M(p_1, p_2, m)$ и ${x_2}^M = {x_2}^M(p_1, p_2, m)$;

(4) намерят хиксовите функции на търсене ${x_1}^H = {x_1}^H(p_1, p_2, u)$ и ${x_2}^H = {x_2}^H(p_1, p_2, u)$.

Решение:

(а) (2) От решението на зад. 4 условието за оптималност е $p_1x_1 : p_2x_2 = 2 : 3$. (3) Следователно бюджетът на първата стока е $p_1x_1 = \frac{2}{5}m$, а бюджетът на втората - $p_2x_2 = \frac{2}{5}m$. Тогава маршаловите функции на търсене са ${x_1}^M = \frac{2m}{5p_1}$ и ${x_2}^M = \frac{3m}{5p_2}$. (4)

От условието за оптималност изразяваме x_2 чрез x_1: $x_2 = \frac{3p_1x_1}{2p_2}$ и заместваме в ограничението на дуалната задача ${x_1}^2{x_2}^3 = u$:

$$\frac{27{p_1}^3{x_1}^5}{8{p_2}^3} = u \Longrightarrow {x_1}^H = u^{1/5}\left(\frac{2p_2}{3p_1}\right)^{3/5} \text{ и } {x_2}^H = u^{1/5}\left(\frac{3p_1}{2p_2}\right)^{2/5}.$$

(б) (1) За частните производни на тази квазилинейна функция на полезност имаме $U_1 = 1$ и $U_2 = \frac{2}{\sqrt{x_2}}$, тогава за маргиналната норма на заместване получаваме $S_{12} = \frac{\sqrt{x_2}}{2}$. (2) Условието за оптималност ще бъде $S_{12} = \frac{\sqrt{x_2}}{2} = \frac{p_1}{p_2}$ или $x_2{p_2}^2 = 4{p_1}^2$. (3) От условието за оптималност изразяваме $x_2 = \frac{4{p_1}^2}{{p_2}^2}$ и заместваме в бюджетното ограничение $p_1x_1 + p_2x_2 = m$, получаваме $p_1x_1 + \frac{4{p_1}^2}{p_2} = m$, откъдето намираме първата маршалова функция на търсене ${x_1}^M = \frac{m}{p_1} - 4\frac{p_1}{p_2}$. Необходимостта от неотрицателност на x_1 налага ограничение върху екзогенните величини $m \geq \frac{4{p_1}^2}{p_2}$. Ясно е, че за втората маршалова функция на търсене ще имаме ${x_2}^M = \frac{4{p_1}^2}{{p_2}^2}$. (4) Като заместим $x_2 = \frac{4{p_1}^2}{{p_2}^2}$ в условието на дуалната задача $x_1 + 4\sqrt{x_2} = u$ получаваме $x_1 + 8\frac{p_1}{p_2} = u$, откъдето, ${x_1}^H = u - 8\frac{p_1}{p_2}$. Естествено, втората хиксова функция на търсене е същата ${x_2}^H = \frac{4{p_1}^2}{{p_2}^2}$.

(в) (1) За частните производни на тази адитивна функция на полезност ще имаме $U_1 = \frac{1}{2\sqrt{x_1}}$ и $U_2 = \frac{1}{2\sqrt{x_2}}$, тогава маргиналната норма на заместване е $S_{12} = \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}$. (2) Въз основа на това получаваме условието за оптималност $S_{12} = \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} = \frac{p_1}{p_2}$ или ${p_1}^2x_1 = {p_2}^2x_2$. (3) Заместваме $x_2 = \frac{{p_1}^2x_1}{{p_2}^2}$ в бюджетното ограничение и получаваме $p_1x_1 + p_2\frac{{p_1}^2x_1}{{p_2}^2} = m$, откъдето ${x_1}^M = \frac{mp_2}{p_1(p_1+p_2)}$ и ${x_2}^M = \frac{mp_1}{p_2(p_1+p_2)}$. (4) Заместваме $x_2 = \frac{{p_1}^2x_1}{{p_2}^2}$ в $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = u$ и получаваме $\sqrt{x_1} + \frac{p_1}{p_2}\sqrt{x_1} = u$, откъдето ${x_1}^H = \left(\frac{up_2}{p_1+p_2}\right)^2$ и ${x_2}^H = \left(\frac{up_1}{p_1+p_2}\right)^2$.

(г) Тъй като наклона на бюджетната линия $p_1x_1 + p_2x_2 = m$ не може да съвпада с наклона на никоя от линиите $x_1 = u$ и $3x_2 = u$ (за това е необходимо едната стока да е безплатна: или $p_2 = 0$ или $p_1 = 0$, което е невъзможно), то допирането на двете фамилии от линии ще става в точките, за които $x_1 = 3x_2$. Това е и условието за оптималност. Като го заместим в бюджетното ограничение, получаваме

$3p_1x_2 + p_2x_2 = m$, откъдето ${x_2}^M = \frac{m}{3p_1+p_2}$ и ${x_1}^M = \frac{3m}{3p_1+p_2}$. От $min\{x_1, 3x_2\} = u$ директно получаваме хиксовите функции на търсене: ${x_1}^H = u$ и ${x_2}^H = \frac{u}{3}$.

Задача 7. Потребител изразходва парите си за покупката на две стоки, като функцията му на полезност е $U = min\{4x_1, 2x_1 + x_2\}$. Известно е, че количествата, закупени от него са $x_1 = 15$ количествени единици и $x_2 = 10$ к. е. Цената на първата стока е 10$. Какъв е дохода на потребителя?

Решение:

Бюджетното ограничение на тази задача на потребителя ще бъде $10x_2 + p_2x_2 = m$. Оптималният набор се явява точката на допиране на бюджетната линия с линията на безразличие. Да намерим значението на функцията на полезност в тази точка: $U = min\{60,40\} = 40$, като линията на безразличие в тази точка е $2x_1 + x_2 = 40$. Тогава правите $2x_1 + x_2 = 40$ и $10x_2 + p_2x_2 = m$ трябва да съвпадат. Умножавайки двете страни на уравнението на първата права с 5 получаваме $10x_1 + 5x_2 = 200$, от което следва, че $p_2 = 5$ и $m = 200$.