# Тема 2. ЧАСТИЧЕН РАВНОВЕСЕН МОДЕЛ (продължение)

## ТЕОРИЯ

**1. Агрегиране на търсенето и предлагането.** Агрегиране на икономически величини - сумиране, натрупване. Обратния процес е сегментиране. Пазарното търсене и пазарното предлагане се получават в резултат на агрегиране на отделните индивидуални търсения и предлагания на всички участници в този пазар.

– **Функции на търсене**. Нека на даден пазар имаме $n$ купувача, всеки със своята индивидуална функция на търсене $x_1(p), x_2(p),\ldots,x_n(p)$.

**(1)** Определяме всички стойности на $p$, при които индивидуалните функции на търсене се нулират и ги подреждаме по възходящ ред $p_1 < p_2 <\ldots< p_k$. $k \leq n$, защото евентуално някои от функциите се анулират за едно и също $p$. Възможно е $p_k = \infty$

**(2)** За всяко $i = 1, \ldots, k$ сумираме онези функции, нулиращи се при $p = p_i$. Така получаваме новите функции $x_1(p), x_2(p),\ldots,x_k(p)$.

**(3)** Окончателно получаваме

$$x(p) = \begin{cases} x_1(p) + \cdots + x_k(p) & \text{при } p \in [0, p_1) \\ x_2(p) + \cdots + x_k(p) & \text{при } p \in [p_1, p_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k(p) & \text{при } p \in [p_{k-1}, p_k) \\ 0 & \text{при } p \in [p_k, \infty). \end{cases}$$

– **Функции на предлагане**. Нека на даден пазар имаме $n$ продавача, всеки със своята индивидуална функция на предлагане $y_1(p), y_2(p),\ldots,y_n(p)$.

**(1)** Определяме всички стойности на $p$, при които индивидуалните функции на предлагане се нулират и ги подреждаме по възходящ ред $p_1 < p_2 <\ldots< p_k$. $k \leq n$, защото евентуално някои от функциите се анулират за едно и също $p$. Възможно е $p_1 = 0$

**(2)** За всяко $i = 1, \ldots, k$ сумираме онези функции, нулиращи се при $p = p_i$. Така получаваме новите функции $y_1(p), y_2(p),\ldots,y_k(p)$.

**(3)** Окончателно получаваме

$$y(p) = \begin{cases} 0 & \text{при } p \in [0, p_1) \\ y_1(p) & \text{при } p \in [p_1, p_2) \\ y_1(p) + y_2(p) & \text{при } p \in [p_2, p_3) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1(p) + \cdots + y_k(p) & \text{при } p \in [p_k, \infty). \end{cases}$$

2. **Сравнителна статика – най-общо.** Нека за дадена стока, в определен момент от времето да са се формирали функции на пазарно търсене и предлагане $x = x_0(p)$ и $y = y_0(p)$ и на базата на тях – равновесна цена $p_0$ и равновесно количество $q_0$, т.е.

$$q_0 = x_0(p_0) = y_0(p_0)$$

В друг момент от времето, под въздействие на различни пазарни сили, функциите на търсене и предлагане ще бъдат други - $x = x_1(p)$ и $y = y_1(p)$. Те ще формират и други равновесни стойности $p_1$ и $q_1$, така че

$$q_1 = x_1(p_1) = y_1(p_1)$$

Можем да си представим следната опростена картина – всяка от тези функции или се запазва или се променя по посока на разширяване или на свиване. Какво става във всички от тези случаи с равновесните цена и количество.

| **пазарно търсене** | **пазарно предлагане** | **равновесна цена** | **равновесно количество** |
|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{x_1 = x_0}$ | $\boldsymbol{y_1 = y_0}$ | $\boldsymbol{p_1 = p_0}$ | $\boldsymbol{q_1 = q_0}$ |
| $\boldsymbol{x_1 = x_0}$ | $\boldsymbol{y_1 > y_0}$ | $\boldsymbol{p_1 < p_0}$ | $\boldsymbol{q_1 > q_0}$ |
| $\boldsymbol{x_1 = x_0}$ | $\boldsymbol{y_1 < y_0}$ | $\boldsymbol{p_1 > p_0}$ | $\boldsymbol{q_1 < q_0}$ |
| $\boldsymbol{x_1 > x_0}$ | $\boldsymbol{y_1 = y_0}$ | $\boldsymbol{p_1 > p_0}$ | $\boldsymbol{q_1 > q_0}$ |
| $\boldsymbol{x_1 > x_0}$ | $\boldsymbol{y_1 > y_0}$ | **не е ясно** | $\boldsymbol{q_1 > q_0}$ |
| $\boldsymbol{x_1 > x_0}$ | $\boldsymbol{y_1 < y_0}$ | $\boldsymbol{p_1 > p_0}$ | **не е ясно** |
| $\boldsymbol{x_1 < x_0}$ | $\boldsymbol{y_1 = y_0}$ | $\boldsymbol{p_1 < p_0}$ | $\boldsymbol{q_1 < q_0}$ |
| $\boldsymbol{x_1 < x_0}$ | $\boldsymbol{y_1 > y_0}$ | $\boldsymbol{p_1 < p_0}$ | **не е ясно** |
| $\boldsymbol{x_1 < x_0}$ | $\boldsymbol{y_1 < y_0}$ | **не е ясно** | $\boldsymbol{q_1 < q_0}$ |

Тези изводи могат да бъдат направени лесно на базата на съответните D-линии и S-линии.

**3. Сравнителна статика по цената на друга стока.** Нека търсенето на една стока да зависи не само от цената ѝ $p$, но и от цената на друга стока $\bar{p}$, а предлагането да е функция само на $p$, т.е. равновесната система има вида

$$x(p, \bar{p}) = y(p) = q.$$

Тогава са в сила **уравненията на сравнителната статика**

$$\frac{dp}{d\bar{p}} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \bar{p}}}{\frac{dy}{dp} - \frac{\partial x}{\partial p}} \quad \text{и} \quad \frac{dq}{d\bar{p}} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \bar{p}}\frac{dy}{dp}}{\frac{dy}{dp} - \frac{\partial x}{\partial p}},$$

които показват каква е реакцията на равновесните $p$ и $q$ спрямо изменението на $\bar{p}$.

В случаите, когато

$$\frac{\partial x(p,\bar{p})}{\partial \bar{p}}\begin{cases} > 0 \text{ стоката с цена } \bar{p} - \text{заместваща стока} \\ < 0 \text{ стоката с цена } \bar{p} - \text{допълваща стока} \\ = 0 \text{ стоката с цена } \bar{p} - \text{неутрална стока,} \end{cases}$$

спрямо стоката с цена $p$.

Уравненията на сравнителната статика налагат следните изводи:

(1) $\frac{dx}{d\bar{p}} > 0 \Longrightarrow \frac{dp}{d\bar{p}} > 0$ и $\frac{dq}{d\bar{p}} > 0$ т.е. изменението на цената на заместващата стока води до изменения на цената и количеството на основната стока в същата посока. Механизмът за това е следния: $\bar{p}$ расте, в следствие на това търсенето на стоката-заместител намалява, това води до увеличено търсене на основната стока, което е сигнал за търговците, че трябва да вдигнат цената ѝ.

(2) $\frac{dx}{d\bar{p}} < 0 \Longrightarrow \frac{dp}{d\bar{p}} < 0$ и $\frac{dq}{d\bar{p}} < 0$ т.е. промяната на цената на допълващата стока води до промяна на цената и количеството на основната стока в противоположна посока. И наистина, ако допълващата стока поскъпне, нейното търсене ще намалее, ще намалее и търсенето на основната стока, което ще доведе до поевтиняването ѝ.

**Кръстосана еластичност** наричаме еластичността на функцията на търсене на една стока по отношение на цената на друга стока.

$$E\big(x(\bar{p})\big) = \frac{\partial x(p,\bar{p})}{\partial \bar{p}}\frac{\bar{p}}{x(p,\bar{p})}$$

Очевидно $E\big(x(\bar{p})\big) > 0$ при заместваща стока и $E\big(x(\bar{p})\big) < 0$ – при допълваща.

**Уравненията на сравнителната статика в еластичен вид.**

$$E\big(p(\bar{p})\big) = \frac{E\big(x(\bar{p})\big)}{E\big(y(p)\big) - E\big(x(p)\big)} \quad \text{и} \quad E\big(q(\bar{p})\big) = \frac{E\big(x(\bar{p})\big)E\big(y(p)\big)}{E\big(y(p)\big) - E\big(x(p)\big)}.$$

В горните равенства $E\big(p(\bar{p})\big) = \frac{dp}{d\bar{p}}\frac{\bar{p}}{p}$ и $E\big(q(\bar{p})\big) = \frac{dq}{d\bar{p}}\frac{\bar{p}}{q}$ са еластичностите на равновесната цена и на равновесното количество на основната стока по цената на другата (свързана с нея) стока и показват с колко % се изменят те при изменение на $\bar{p}$ с 1%. Тези равенства служат за прогнозиране на новите цена и количество на една стока при промяна на цената на друга стока, ако са известни коефициентите на ценови еластичности (при равни други условия).

## РЕШЕНИ ЗАДАЧИ

**Задача 1. Равновесие на няколко пазара – поотделно и заедно.** Търсенето и предлагането на захар в Пловдив се задава чрез функциите $x_1 = 1700 - 800p_1$ и $y_1 = 400p_1 - 400$, а в Стара Загора - $x_2 = 1050 - 600p_2$ и $y_2 = 200p_2 - 150$ (цените се измерват в лв. за кг, а количествата – в т).

а) Да се намерят равновесните цени и количества на продажби на захар в Пловдив и Стара Загора;

б) Да допуснем, че е възможен безплатен превоз на захарта в двете посоки. Да се намерят новите равновесни цена и количества, както и количеството транспортирана захар;

в) Да се намерят новите равновесни цена и количества, както и количеството транспортирана захар при цена на транспорта 0,10 лв. за кг.

**Решение:**

а) За равновесието на пазара на захар в Пловдив ще имаме

$$q_1 = x_1(p_1) = 1700 - 800p_1 = 400p_1 - 400 = y_1(p_1).$$

Решаването на това уравнение ни дава равновесните цена и количество в Пловдив:

$$1700 - 800p_1 = 400p_1 - 400 \Longrightarrow 1200p_1 = 2100 \Longrightarrow p_1 = \frac{7}{4} = 1{,}75;$$

$$q_1 = x_1\left(\frac{7}{4}\right) = 1700 - 800 \cdot \frac{7}{4} = 300.$$

Уравнението на пазарното равновесие в Стара Загора е

$$q_2 = x_2(p_2) = 1050 - 600p_2 = 200p_2 - 150 = y_2(p_2).$$

От неговото решаване получаваме равновесните величини за този пазар:

$$1050 - 600p_2 = 200p_2 - 150 \Longrightarrow 800p_2 = 1200 \Longrightarrow p_2 = 1{,}50;$$

$$q_2 = x_2(1{,}50) = 1050 - 600 \cdot 1{,}50 = 150.$$

б) Нека сега да разгледаме общия пазар на захар, получил се от обединението на двата пазара. Тогава на този пазар ще има само една цена, следователно $p_1 = p_2 = p$. Освен това, на този пазар ще действат сумарни (агрегирани) функции на търсене и предлагане.

Да намерим сумарната функция на търсене. Функцията на търсене за пловдивския пазар е дефинирана за $p \in (0; 2{,}125)$ (в този интервал функцията $x_1 = 1700 - 800p$ е положителна), а старозагорската – за $p \in (0; 1{,}75)$. Следователно, при $p \in (0; 1{,}75)$ ще има търсене в двата града, а за $p \in (1{,}75; 2{,}125)$ – само в Пловдив. Въз основа на това съставяме функцията на сумарно търсене на захар:

$$x(p) = \begin{cases} x_1 + x_2 = 2750 - 1400p \text{ за } p \in (0; 1{,}75) \\ x_1 = 1700 - 800p \quad \text{за} \quad p \in (1{,}75; 2{,}125) \end{cases}$$

По аналогичен начин съставяме функцията на сумарно предлагане. Предлагането на захар в Пловдив се реализира при $p \in (1{,}00; \infty)$, а предлагането в Стара Загора – при $p \in (0{,}75; \infty)$. Така, при $p \in (0{,}75; 1)$ ще има предлагане само в Стара Загора, а при $p \in (1{,}00; \infty)$ - и в двата града. Следователно, сумарната функция на предлагане ще бъде

$$y(p) = \begin{cases} y_2 = 200p - 150 \quad \text{за} \quad p \in (0{,}75; 1) \\ y_1 + y_2 = 600p - 550 \text{ за } p \in (1{,}00; \infty) \end{cases}$$

Равновесната цена за общия пазар ще се получи при изравняване на сумарното търсене със сумарното предлагане. Тези две функции съществуват едновременно в ценовите интервали $(0{,}75; 1)$, $(1; 1{,}75)$ и $(1{,}75; 2{,}125)$. В първият интервал търсене съществува и в двата града, а предлагане – само в Стара Загора; във втория има търсене и предлагане и в двата града; а в третия – търсенето е само в Пловдив, а предлагането – в двата града. Пресичането на двете начупени линии – на търсенето и предлагането може да се реализира само в един от интервалите. Да вземем средния интервал - $p \in (1; 1{,}75)$. Тогава от

$$x(p) = 2750 - 1400p = 600p - 550 = y(p)$$

получаваме $p = 1{,}65$. Тъй като $1{,}65 \in (1; 1{,}75)$, то това е равновесната цена за този модел. Равновесното количество получаваме от

$$q = x(1{,}65) = y(1{,}65) = 440.$$

Какво е положението в двата града? В Пловдив: търсенето е $x_1 = x_1(1{,}65) = 380$, а предлагането - $y_1 = y_1(1{,}65) = 220$. В Стара Загора: търсене - $x_2 = x_2(1{,}65) = 60$, предлагане - $y_2 = y_2(1{,}65) = 180$. Очевидно ще имаме $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = 120$ – 120 т от старозагорското предлагане ще задоволяват пловдивското търсене. Вижда се, че при обединението на пазарите облагодетелствани са потребителите от по-скъпия пазар (преди обединението) и производителите от по-евтиния, а ощетени – производителите от по-скъпия и потребителите от по-евтиния.

в) Тъй като от решението на а) вече знаем, че пловдивският пазар на захар е по-скъп, то транспортирането на захар ще е в една посока – от по-евтиния старозагорски пазар към по-скъпия пловдивски. Ако положим за $p = p_2$ цената в Стара Загора, то цената на захарта в Пловдив ще бъде $p_1 = p + 0{,}1$ – цената в Стара Загора, оскъпена с транспортните разходи. Сега трябва да изразим всички функции на търсене и предлагане чрез $p$. Старозагорските функции вече са изразени. За пловдивските получаваме

$$x_1(p) = x_1(p + 0{,}1) = 1700 - 800(p + 0{,}1) = 1620 - 800p \text{ за } p \in (0; 2{,}025)$$

$$y_1(p) = y_1(p + 0{,}1) = 400(p + 0{,}1) - 400 = 400p - 360 \text{ за } p \in (0{,}90; \infty)$$

Така за функциите на сумарно търсене и предлагане получаваме нови изрази:

$$x(p) = \begin{cases} x_1 + x_2 = 2670 - 1400p \text{ за } p \in (0; 1{,}75) \\ x_1 = 1620 - 800p \quad \text{за} \quad p \in (1{,}75; 2{,}025) \end{cases}$$

$$y(p) = \begin{cases} y_2 = 200p - 150 \quad \text{за} \quad p \in (0{,}75; 0{,}90) \\ y_1 + y_2 = 600p - 510 \text{ за } p \in (0{,}90; \infty) \end{cases}$$

За интервала $p \in (0{,}90; 1{,}75)$ ще имаме

$$x(p) = y(p) \Leftrightarrow 2670 - 1400p = 600p - 510 \Leftrightarrow p = 1{,}59$$

$$q = x(1{,}59) = y(1{,}59) = 444$$

Какво е положението в двата града? В Пловдив: търсенето е $x_1 = x_1(1{,}59) = 348$, а предлагането - $y_1 = y_1(1{,}59) = 276$. В Стара Загора: търсене - $x_2 = x_2(1{,}59) = 96$, предлагане - $y_2 = y_2(1{,}59) = 168$. Очевидно ще имаме $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = 72$ – 72 т от старозагорското предлагане ще задоволяват пловдивското търсене. Очевидно, цената в Стара Загора ще бъде $p_2 = p = 1{,}59$, а цената в Пловдив - $p_1 = p + 0{,}1 = 1{,}69$. Вижда се, че при този модел на общ пазар с отчитане на транспортните разходи има омекотяване на ефектите от сливането на двата пазара (в сравнение с б)).

**Задача 2.** Да се анализира влиянието на описаните по-долу събития на пазара на компютри. Обяснете как ще се изменят равновесните цена и обем продажби, ако:

(а) в резултат на икономическа криза се съкратят доходите на потребителите;

(б) фалирали са част от фирмите, продаващи компютри;

(в) двете събития са настъпили едновременно.

**Решение:**

(а) В случай на съкращение на потребителските доходи е логично да предположим, че се съкращава и търсенето на компютри, т.е. $x_1 < x_0$ (с долен индекс 0 са означени старите функции, а с 1 – новите, след настъпване на промяната). Предполага се, че предлагането се запазва: $y_1 = y_0$. Тогава (според таблицата ще имаме $p_1 < p_0$ и $q_1 < q_0$ или ще се продават по-малко на брой компютри на по-ниски цени. Тук се получава привиден парадокс: при по-ниски цени би трябвало да се продава повече – функцията на търсене е намаляваща (т.е. с обратна реакция спрямо цената). Но в случая това важи за „мигновената“ функция на търсене, а тук имаме две различни функции на търсене $x_0$ и $x_1$ – всяка в различно време.

(б) В този случай се предполага, че предлагането ще се свие, т.е. $y_1 < y_0$ при запазено търсене: $x_1 = x_0$. От таблицата се вижда, че $p_1 > p_0$ и $q_1 < q_0$ или ще се продават по-малко компютри, но на по-високи цени.

(в) В този случай ($x_1 < x_0$ и $y_1 < y_0$) може да се направи извод само за равновесното количество – ще намалее ( $q_1 < q_0$), но за новата равновесна цена не може да се каже нищо.

**Задача 3.** Предполага се, че търсенето и предлагането са с постоянни еластичности $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{1}{6}$ ($\varepsilon_x$ за търсенето и $\varepsilon_y$ за предлагането). Търсенето нараства с 10%, а предлагането – с 20%. Да се оцени изменението на равновесните цена и количество.

**Решение:**

При този случай може да се каже (от таблицата), че продаваното количество ще нарасне със сигурност, но за продажната цена не е ясно.

Нека $\varepsilon_x$ и $\varepsilon_y$ да са произволни. Тъй като функциите на търсене и предлагане са с постоянни еластичности, те ще са степенни функции на $p$:

$$x_0(p) = \frac{a}{p^{\varepsilon_x}} \text{ и } y_0(p) = bp^{\varepsilon_y}$$

(функцията на търсене е с отрицателна еластичност, фактически $\varepsilon_x$ е модула на ценовата еластичност на търсене). Нека и темповете на изменение да са произволни. Тогава ще имаме

$$x_1(p) = \alpha x_0(p) \text{ и } y_1(p) = \beta y_0(p),$$

където $\alpha = \frac{x_1}{x_0}$ е темпа на изменение на търсенето, а $\beta = \frac{y_1}{y_0}$ – на предлагането. Ако приемем, че $p_0 = q_0 = 1$, за новите равновесни стойности ще получим $\frac{p_1}{p_0}$ и $\frac{q_1}{q_0}$. Тогава ще имаме

$$x_0(p) = \frac{1}{p^{\varepsilon_x}} \Rightarrow x_1(p) = \frac{\alpha}{p^{\varepsilon_x}} \text{ и } y_0(p) = p^{\varepsilon_y} \Rightarrow y_1(p) = \beta p^{\varepsilon_y}$$

От новото пазарно равновесие $x_1(p) = y_1(p)$ получаваме

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{\varepsilon_x+\varepsilon_y}} \text{ и } \frac{q_1}{q_0} = \alpha^{\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x+\varepsilon_y}}\beta^{\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_x+\varepsilon_y}}$$

В горните формули заместваме $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{1}{6}$ и $\alpha = 1{,}1$, $\beta = 1{,}2$ и пресмятаме темповете на изменение на равновесните цена и количество:

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{\varepsilon_x+\varepsilon_y}} = \left(\frac{1{,}1}{1{,}2}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}} = \left(\frac{1{,}1}{1{,}2}\right)^{3} \cong 0{,}77;$$

$$\frac{q_1}{q_0} = (1{,}1)^{\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}}(1{,}2)^{\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}} = (1{,}1)^{\frac{1}{2}}(1{,}2)^{\frac{1}{2}} \cong 1{,}15.$$

Т.е. имаме спад на продажната цена с цели 23% (за която нищо не можеше да се каже) и ръст на продаденото количество с 15% (предвидимо). При съчетаване на много нееластично търсене с много нееластично предлагане (ако и двата коефициента на еластичност $\varepsilon_x$ и $\varepsilon_y$ са близки до нулата) дори и малки промени в търсенето и предлагането могат да доведат до големи промени в равновесните количество и цена.

**Задача 4. Промени в търсенето и предлагането.** Търсенето на стаи под наем в Пловдив се изразява чрез функцията $x(p) = 10 - \frac{p}{15}$ , а предлагането – чрез $(p) = -\frac{10}{3} + \frac{p}{15}$ , където $p$ е месечния наем, а $x(p)$ и $y(p)$ се измерват в хил. стаи.

а) Да се намерят броя на стаите, отдадени под наем и цената на месечния наем;

б) Същото, като в а), ако търсенето се увеличи с 20% при запазено предлагане;

в) Същото, като в а), ако предлагането се увеличи с 20% при запазено търсене;

г) Същото, като в а), ако предлагането и търсенето едновременно се увеличат с 20%;

д) Как би се отразило на пазарното равновесие от а) настаняването на 3000 ученици и студенти в общежитие (които в противен случай биха търсили стаи под наем). Имайте пред вид, че в общежитията са двама в стая.

**Решение:**

а) Уравнението на равновесието на пазара на стаи под наем в Пловдив е

$$q = x(p) = 10 - \frac{p}{15} = -\frac{10}{3} + \frac{p}{15} = y(p).$$

Решавайки горното уравнение получаваме равновесните стойности на модела $p$ и $q$:

$$10 - \frac{p}{15} = -\frac{10}{3} + \frac{p}{15} \Longrightarrow p = 100, \quad q = x(100) = 10 - \frac{100}{15} = \frac{10}{3} = 3{,}333.$$

б) Сега търсенето се е променило (нараснало) при запазено предлагане. Би трябвало да очакваме нарастване както при цената, така и при количеството. Нека с $\bar{x}(p)$ да означим новата функция на търсене, ще имаме

$$\bar{x}(p) = 1{,}2x(p) = 1{,}2\left(10 - \frac{p}{15}\right) = 12 - \frac{1{,}2p}{15}.$$

Тогава уравнението на пазарното равновесие ще бъде

$$q = \bar{x}(p) = 12 - \frac{1{,}2p}{15} = -\frac{10}{3} + \frac{p}{15} = y(p).$$

От решаването на горното уравнение получаваме новите равновесни величини:

$$12 - \frac{1{,}2p}{15} = -\frac{10}{3} + \frac{p}{15} \Longrightarrow p = 104{,}5, \quad q = y(104{,}5) = -\frac{10}{3} + \frac{104{,}5}{15} = 3{,}633.$$

С други думи, при нарастване на търсенето с 20% и запазено предлагане цената се увеличава с 4,5% при увеличено количество с 9%.

в) При нарастване на предлагането и запазване на търсенето, би трябвало да очакваме спад на цената при увеличено потребление. Означаваме с $\bar{y}(p)$ новата функция на предлагане. Ще имаме

$$\bar{y}(p) = 1{,}2y(p) = 1{,}2\left(-\frac{10}{3} + \frac{p}{15}\right) = -4 + \frac{1{,}2p}{15}.$$

Така получаваме уравнението на пазарното равновесие за този модел

$$q = x(p) = 10 - \frac{p}{15} = -4 + \frac{1{,}2p}{15} = \bar{y}(p),$$

което решаваме, за да получим новите равновесни величини. Ще имаме

$$10 - \frac{p}{15} = -4 + \frac{1{,}2p}{15} \Longrightarrow p = 95{,}5, \quad q = x(95{,}5) = 10 - \frac{95{,}5}{15} = 3{,}633.$$

Т.е. при нарастване на предлагането с 20% и запазено търсене цената спада с 4,5% при нарастване на количеството с 9%.

г) При едновременно нарастване на търсенето и предлагането, равновесното количество нараства със сигурност, но за равновесната цена не може да се каже нищо (без да разполагаме с конкретните функции). В нашия случай ще имаме

$$q = 1{,}2x(p) = 1{,}2y(p) \Longrightarrow x(p) = y(p),$$

следователно равновесната цена остава както в а) ($p = 100$), а равновесното количество нараства с 20% в сравнение с това от а), т.е. $q = 1{,}2\frac{10}{3} = 4$.

д) Настаняването на 3000 ученици и студенти в 1,5 хил. стаи в новопостроени общежития би се отразило на пазарното търсене, то би намаляло с 1,5. Ако $\bar{x}(p)$ е новото търсене, то ще имаме

$$\bar{x}(p) = x(p) - 1{,}5 = \left(10 - \frac{p}{15}\right) - 1{,}5 = 8{,}5 - \frac{p}{15}.$$

Тогава уравнението на пазарното равновесие за този модел е

$$q = \bar{x}(p) = 8{,}5 - \frac{p}{15} = -\frac{10}{3} + \frac{p}{15} = y(p).$$

Решенията на горното уравнение са

$$8{,}5 - \frac{p}{15} = -\frac{10}{3} + \frac{p}{15} \Longrightarrow p = 88{,}75 \quad \text{и} \quad q = y(88{,}75) = -\frac{10}{3} + \frac{88{,}75}{15} = 2{,}583.$$

Да отбележим, че сега са настанени много повече ученици и студенти, отколкото в а) – 1500 – безплатно (или при много по-нисък наем от пазарния) и $2583$ – при наем от $88{,}75$ лв. – общо 4083 (със 750 повече).

**Задача 5.** Прогнозирайте цената и количеството продадени ябълки, ако е известно, че:

(1) ценовата еластичност на предлагането е $1{,}5$, ценовата еластичност на търсенето е $-1{,}0$, кръстосаната еластичност на търсенето на ябълки по отношение на цената на бананите е $0{,}5$;

(2) при цена на бананите от 3 лв./кг. са продадени (за една седмица) 35 т. ябълки по цена 2,5 лв./кг.

(3) следващата седмица цената на бананите се е променила на 2,40 лв. за килограм.

**Решение:**

Прилагаме формулите на сравнителната статика (по отношение на цената на друга стока) в еластичен вид

$$E\big(p(\bar{p})\big) = \frac{E\big(x(\bar{p})\big)}{E\big(y(p)\big) - E\big(x(p)\big)} \quad \text{и} \quad E\big(q(\bar{p})\big) = \frac{E\big(x(\bar{p})\big)E\big(y(p)\big)}{E\big(y(p)\big) - E\big(x(p)\big)}.$$

По условие имаме $E\big(x(\bar{p})\big) = 0{,}5$ ($p$ е цената на ябълките, а $\bar{p}$ – на бананите), $E\big(y(p)\big) = 1{,}5$ и $E\big(x(p)\big) = -1$. Тогава получаваме

$$E\big(p(\bar{p})\big) = \frac{0{,}5}{1{,}5 - (-1)} = 0{,}2 \quad \text{и} \quad E\big(q(\bar{p})\big) = \frac{0{,}5 \cdot 1{,}5}{2{,}5} = 0{,}3.$$

Тъй като

$$E\big(p(\bar{p})\big) = \frac{dp}{d\bar{p}}\frac{\bar{p}}{p} = \frac{\frac{dp}{p}}{\frac{d\bar{p}}{\bar{p}}} \cong \frac{\frac{\Delta p}{p}}{\frac{\Delta \bar{p}}{\bar{p}}}$$

и $\Delta\bar{p} = 2{,}4 - 3 = -0{,}6$; $\frac{\Delta\bar{p}}{\bar{p}} = \frac{(-0{,}6)}{3} = -0{,}2$, то $\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta\bar{p}}{\bar{p}} E\big(p(\bar{p})\big) = (-0{,}2)0{,}2 = -0{,}04$ и $\Delta p = \frac{\Delta p}{p} p = (-0{,}04)2{,}5 = -0{,}1$. Следователно, новата равновесна цена на ябълките е 2,4 лв./кг.

Аналогично за количеството:

$$E\big(q(\bar{p})\big) = \frac{dq}{d\bar{p}}\frac{\bar{p}}{q} = \frac{\frac{dq}{q}}{\frac{d\bar{p}}{\bar{p}}} \cong \frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta\bar{p}}{\bar{p}}}\ , \qquad \frac{\Delta q}{q} = \frac{\Delta\bar{p}}{\bar{p}}E\big(q(\bar{p})\big) = (-0{,}2)0{,}3 = -0{,}06.$$

Тогава $\Delta q = \frac{\Delta q}{q}q = (-0{,}06)35 = -2{,}1$. Новото равновесно количество за ябълките ще бъде $35 - 2{,}1 = 32{,}1$т.

**Задача 6. Прогнози в зависимост от конкуренцията.** Нека $p$ е цената на известна марка лютеница, $p_1$ – цената на основната конкурентна марка лютеница, $x$ – количеството на търсене на първата марка (за седмица) и $y$ – количеството на предлагане за същата марка. Известни са следните данни:

| $p$ | $p_1$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 2,5 | 10000 | 10000 |
| 2 | 2 | 8750 | |
| 2,5 | 2 | 7370 | 13060 |

Какви ще бъдат равновесните величини за известната марка лютеница при $p_1 = 2$ и при $p_1 = 3$?

**Решение:**

Вижда се, че на пазара на известната марка лютеница е постигнато равновесие при цена на конкуренцията $p_1 = 2{,}5$ и равновесните величини в този случай са $p = 2$ и $q = 10$ (в хиляди).

Сега, на база данните, можем да пресметнем еластичностите:

(1) собствената ценова еластичност на търсенето $E\big(x(p)\big)$: при изменение на цената от $p = 2$ до $p = 2{,}5$ (без промяна на $p_1 = 2$) имаме $\Delta p = 0{,}5$ и $\frac{\Delta p}{p} = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25$, тогава търсенето $x$ се изменя от $x = 8{,}75$ до $x = 7{,}35$, $\Delta x = 7{,}35 - 8{,}75 = -1{,}4$ и $\frac{\Delta x}{x} = -\frac{1{,}4}{8{,}75} = -0{,}16$; окончателно получаваме

$$E\big(x(p)\big) \cong \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{(-0{,}16)}{0{,}25} = -0{,}64.$$

(2) собствената еластичност на предлагането $E\big(y(p)\big)$: при изменение на цената от $p = 2$ до $p = 2{,}5$ предлагането $y$ се изменя от $y = 10$ до $y = 13{,}06$, $\Delta y = 3{,}06$ и $\frac{\Delta y}{y} = \frac{3{,}06}{10} = 0{,}306$; окончателно ще имаме

$$E\big(y(p)\big) \cong \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{0{,}306}{0{,}25} = 1{,}224.$$

(3) кръстосаната ценова еластичност на търсенето $E\big(x(p_1)\big)$: при изменение на $p_1$ от $p_1 = 2{,}5$ до $p_1 = 2$ ($p = 2$ е без промяна) имаме $\Delta p_1 = -0{,}5$ и $\frac{\Delta p_1}{p_1} = -0{,}2$; тогава $x$ се изменя от $x = 10$ до $x = 8{,}75$, $\Delta x = 8{,}75 - 10 = -1{,}25$ и $\frac{\Delta x}{x} = -\frac{1{,}25}{10} = -0{,}125$; окончателно получаваме

$$E\big(x(p_1)\big) = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p_1}{p_1}} = \frac{(-0{,}125)}{(-0{,}2)} = 0{,}6125.$$

Сега вече можем да използваме формулите на сравнителната статика в еластичен вид. За равновесната цена ще имаме

$$E\big(p(p_1)\big) = \frac{E\big(x(p_1)\big)}{E\big(y(p)\big) - E\big(x(p)\big)} = \frac{0{,}6125}{1{,}224 - (-0{,}64)} = \frac{0{,}6125}{1{,}864} \cong 0{,}329.$$

Но тъй като

$$E\big(p(p_1)\big) \cong \frac{\frac{\Delta p}{p}}{\frac{\Delta p_1}{p_1}} = 0{,}329 \Longrightarrow \frac{\Delta p}{p} = 0{,}329\frac{\Delta p_1}{p_1}.$$

Да пресметнем променената равновесна цена при произволно изменение на $p_1$ $\Delta p_1$. Заместваме $p_1 = 2{,}5$ и $p = 2$ (при условие на равновесие) и получаваме $\frac{\Delta p}{2} = 0{,}329\frac{\Delta p_1}{2{,}5}$, следователно $\Delta p \cong 0{,}263\Delta p_1$ или $p = 2 + 0{,}263\Delta p_1$.

Аналогично, за равновесното количество

$$E\big(q(p_1)\big) \cong \frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p_1}{p_1}} = \frac{E\big(x(p_1)\big)E\big(y(p)\big)}{E\big(y(p)\big) - E\big(x(p)\big)} = 0{,}329 \cdot 1{,}224 = 0{,}403.$$

Следователно $E\big(q(p_1)\big) \cong \frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p_1}{p_1}} = 0{,}403 \Longrightarrow \frac{\Delta q}{q} = 0{,}403\frac{\Delta p_1}{p_1}$. при условие на равновесие имаме $p_1 = 2{,}5$ и $q = 10 \Longrightarrow \frac{\Delta q}{10} = 0{,}403\frac{\Delta p_1}{2{,}5}$ и получаваме $\Delta q = 1{,}612\Delta p_1$, $q = 10 + 1{,}612\Delta p_1$.

На база на формулите, получени за равновесните стойности на $p$ и $q$ (като функции на изменението на $p_1$ в сравнение с $p_1 = 2{,}5$), можем да направим прогноза, че при $p_1 = 2$ $(\Delta p_1 = -0{,}5)$ $p = 2 + 0{,}263(-0{,}5) \cong 1{,}87$ и $q = 10 + 1{,}612(-0{,}5) \cong 9{,}19$. Аналогично, за $p_1 = 3$ $(\Delta p_1 = 0{,}5)$ получаваме $p \cong 2{,}13$ и $q \cong 10{,}81$.

**Задача 7. Сравнителна статика по дохода на потребителите.** В един град, при средна заплата от 800 лв. са се купували (и продавали) 10000 хляба на цена от 0,8 лв. за хляб. Предполага се, че:

(1) ако хляба се вдигне до цена от 1 лв. (без движение на средната заплата), търсенето ще спадне до 9000 бр., а предлагането ще нарасне до 12000 бр.

(2) при повишаване на средната заплата до 1000 лв., потребителите ще са склонни да купуват 11000 хляба (при цена от 0,8 лв. и без оглед на предлагането).

Какво количество хляб и на каква цена ще се търгува в този град, ако средната заплата стане 1100 лв.?

**Решение:**

По подобие с предишния модел, предполагаме, че търсенето ще зависи освен от цената $p$ и от дохода (средната работна заплата) $I$ на потребителите, т.е. $x = x(p, I)$, а предлагането – само от цената: $y = y(p)$. Тогава условията за равновесие ще бъдат

$$q = x(p, I) = y(p).$$

Тъй като тази система е същата, както при сравнителната статика по цена на друга стока (само $\bar{p}$ е заменено с $I$), то и тук ще са валидни уравненията на сравнителната статика. Записваме ги в еластичен вид

$$E\big(p(I)\big) = \frac{E\big(x(I)\big)}{E\big(y(p)\big) - E\big(x(p)\big)} \quad \text{и} \quad E\big(q(I)\big) = \frac{E\big(x(I)\big)E\big(y(p)\big)}{E\big(y(p)\big) - E\big(x(p)\big)}.$$

В горните уравнения $E\big(x(I)\big) = \frac{\partial x(p,I)}{\partial I}\frac{I}{x(p,I)}$ се нарича **еластичност на търсенето по дохода**, а $E\big(p(I)\big) = \frac{dp}{dI}\frac{I}{p}$ и $E\big(q(I)\big) = \frac{dq}{dI}\frac{I}{q}$ са еластичностите на равновесната цена и на равновесното количество на основната стока по потребителския доход и показват с колко % се изменят те при изменение на $I$ с 1%. Равенства служат за прогнозиране на новите цена и количество на една стока при промяна на дохода, ако са известни коефициентите на ценови еластичности (при равни други условия).

Сега, като използваме, данните, можем да пресметнем участващите във формулите еластичнисти:

(1) ценовата еластичност на търсенето $E\big(x(p)\big)$: при изменение на $p$ от $p = 0{,}8$ до $p = 1$ ($\Delta p = 0{,}2, \frac{\Delta p}{p} = \frac{0{,}2}{0{,}8} = 0{,}25$) търсенето $x$ се променя от $x = 10$ (в хиляди) до $x = 9$ (($\Delta x = -1, \frac{\Delta x}{x} = \frac{(-1)}{10} = -0{,}1$). Тогава ще имаме

$$E\big(x(p)\big) \cong \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{(-0{,}1)}{0{,}25} = -0{,}4.$$

(2) ценовата еластичност на предлагането $E\big(y(p)\big)$: при същото изменение на цената предлагането $y$ се променя от $y = 10$ до $y = 12$ ($\Delta y = 2, \frac{\Delta y}{y} = \frac{2}{10} = 0{,}2$). Получаваме

$$E\big(y(p)\big) \cong \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{0{,}2}{0{,}25} = 0{,}8.$$

(3) подоходната еластичност на търсенето $E\big(x(I)\big)$: при изменението на дохода $I$ от $I = 800$ до $I = 1000$ ($\Delta I = 200, \frac{\Delta I}{I} = \frac{200}{800} = 0{,}25$) търсенето $x$ се променя от $x = 10$ до $x = 11$ (($\Delta x = 1, \frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{10} = 0{,}1$). Тогава ще имаме

$$E\big(x(I)\big) \cong \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta I}{I}} = \frac{0{,}1}{0{,}25} = 0{,}4.$$

Сега вече можем да пресметнем $E\big(p(I)\big)$ и $E\big(q(I)\big)$. Ще имаме

$$E\big(p(I)\big) = \frac{E\big(x(I)\big)}{E\big(y(p)\big) - E\big(x(p)\big)} = \frac{0{,}4}{0{,}8 - (-0{,}4)} = \frac{1}{3},$$

$$E\big(q(I)\big) = \frac{E\big(x(I)\big)E\big(y(p)\big)}{E\big(y(p)\big) - E\big(x(p)\big)} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}4}{1{,}2} = \frac{4}{15}.$$

Доколкото $E\big(p(I)\big) = \frac{dp}{dI}\frac{I}{p} = \frac{\frac{dp}{p}}{\frac{dI}{I}} \cong \frac{\frac{\Delta p}{p}}{\frac{\Delta I}{I}} = \frac{1}{3}$, следва че $\frac{\Delta p}{p} = \frac{1}{3}\frac{\Delta I}{I}$. Като заместим $p = 0{,}8$ и $I = 800$, получаваме $\frac{\Delta p}{0{,}8} = \frac{1}{3}\frac{\Delta I}{800} \Longrightarrow \Delta p = \frac{1}{3000}\Delta I$. Тъй като $\Delta I = 1100 - 800 = 300 \Longrightarrow \Delta p = 0{,}1$ и новата равновесна цена (при доход 1100 лв.) е 0,9 лв./бр.

Аналогично пресмятаме новото равновесно количество: $E\big(q(I)\big) = \frac{dq}{dI}\frac{I}{q} = \frac{\frac{dq}{q}}{\frac{dI}{I}} \cong \frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta I}{I}} = \frac{4}{15} \Longrightarrow \frac{\Delta q}{q} = \frac{4}{15}\frac{\Delta I}{I}$, $q = 10$, $I = 800$ и $\Delta q = \frac{1}{300}\Delta I$. При $\Delta I = 300$ получаваме $\Delta q = 1$, следователно, при средна заплата от 1100 лв., в града ще се търгуват 11000 хляба.