Тема 2. ЧАСТИЧЕН РАВНОВЕСЕН МОДЕЛ

ТЕОРИЯ

1. Функция на търсене. Зависимостта на обема на потребителското търсене (означаваме с) x от цената на търсенето – максималната цена, която потребителят е съгласен да заплати, за да получи определено количество от стоката – p се нарича функция на търсене $x = x(p)$. Функцията на търсене е намаляваща (по-точно ненарастваща) функция на цената: $x(p) \searrow \Leftrightarrow x'(p) \leq 0$. Графиката на функцията на търсене се нарича D-линия (или линия на търсене) за стоката.

Граничното количество x_0 е количеството, което се търси от стоката при нулева цена, т.е. ако тя е безплатна (то определя максималния размер на пазара на стоката), а граничната цена p_0 е цената, при която стоката спира да се търси. Ясно е, че

$$x_0 = x(0), p_0 = p(0), x < x_0 \text{ за } \forall x \text{ и } p < p_0 \text{ за } \forall p$$

и точките с координати $(x_0, 0)$и $(0, p_0)$ са точки на пресичане на D-линията с координатните оси. Когато моделираме функцията на търсене с математическа функция от определен вид е възможно както $x_0 < \infty$, така и $x_0 = \infty$ (по-точно $\lim\limits_{p \to 0} x(p) = \infty$), Аналогично може $p_0 < \infty$ или $p_0 = \infty$ ($\lim\limits_{x \to 0} p(x) = \infty$).

Елементарни функции на търсене.

- Линейна функция на търсене - $x(p) = a - bp$. Тук $x_0 = a$ и $p_0 = \frac{a}{b}$
- Дробно-линейна функция - $x(p) = \frac{a-bp}{p+c}$ и в частност при $c = 0$ $x(p) = \frac{a}{p} - b$. Тогава $x_0 = \frac{a}{c}$, при $c = 0$ $x_0 = \infty$ и $p_0 = \frac{a}{b}$
- Степенна функция - $x(p) = ap^{-\alpha}$. Ще имаме $x_0 = \infty$ и $p_0 = \infty$
- Показателна функция - $x(p) = ac^p$ за $c \in (0,1)$, $x_0 = a$ и $p_0 = \infty$
- Експоненциална функция - $x(p) = ae^{-\alpha p}$. $x_0 = a$ и $p_0 = \infty$

Други функции: $x(p) = (a - bp)^\alpha$ за $\alpha \in (0,1)$; $x(p) = a - bp^\alpha$ за $\alpha \in (0,1)$; $x(p) = \frac{a}{p^\alpha} - b$; $x(p) = a - bc^p$ за $c > 1$; $x(p) = -a + be^{-p}$.

Ценова еластичност на търсенето. При дадена цена $p = p_1$ се казва, че

- търсенето е съвършено нееластично, ако $E\big(x(p_1)\big) = 0$
- търсенето е нееластично (слабо еластично), ако $0 > E\big(x(p_1)\big) > -1$

- търсенето е (силно) еластично, ако $E\big(x(p_1)\big) < -1$

Когато се каже, че ценовата еластичност на търсенето расте се има пред вид, че нараства абсолютната ѝ стойност.

2. Функция на предлагане. Зависимостта на обема на фирменото предлагане (означаваме с) y от цена на предлагането – минималната цена, на която производителят е съгласен да продаде определено количество от стоката – p се нарича функция на перлагане: $y = y(p)$. Функцията на предлагане е растяща функция на цената: $y(p) \nearrow \Leftrightarrow y'(p) \geq 0$. Графиката на функцията на предлагане се нарича S-линия (или линия на предлагане) за стоката.

Граничното количество y_0 е количеството, което ограничава отгоре възможното предлагане на стоката дори и при много високи цени. То е равно (в момента) на производствения капацитет на всички производители на стоката. Граничната цена p_0 е цената, от която стоката започва да се предлага. Ясно е, че

$$y_0 = \lim_{p\to\infty} y(p),\ p_0 = p(0),\ y < y_0 \text{ за } \forall y \text{ и } p > p_0 \text{ за } \forall p$$

Точката с координати $(0, p_0)$ е точка на пресичане на S-линията с ординатната ос, а правата $y = y_0$ е вертикална асимптота. Когато моделираме функцията на търсене с математическа функция от определен вид е възможно както $y_0 < \infty$, така и $y_0 = \infty$ (т.е. $\lim\limits_{p\to\infty} y(p) = \infty$).

Елементарни функции на предлагане.

- Линейна функция на търсене - $y(p) = ap - b$. Тук $y_0 = \infty$ и $p_0 = \frac{b}{a}$
- Дробно-линейна функция - $y(p) = \frac{ap-b}{p+c}$ и в частност при $c = 0$ $y(p) = -\frac{b}{p} + a$. Тогава $y_0 = a$, при $c = 0$ и $p_0 = \frac{b}{a}$
- Логаритмична функция - $y(p) = \log_a \frac{p}{c}$, $a > 1$, $y_0 = \infty$ и $p_0 = c$

Други функции: $y(p) = (ap - b)^\alpha$ за $\alpha \in (0,1)$; $y(p) = ap^\alpha - b$ за $\alpha \in (0,1)$; $y(p) = a - \frac{b}{p^\alpha}$; $y(p) = a - be^{-p}$.

Ценова еластичност на предлагането. При дадена цена $p = p_1$ се казва, че

- предлагането е съвършено нееластично, ако $E\big(y(p_1)\big) = 0$
- предлагането е нееластично (слабо еластично), ако $0 < E\big(y(p_1)\big) < 1$
- предлагането е еластично, ако $E\big(y(p_1)\big) > 1$.

3. Частично пазарно равновесие. Ако разгледаме една стока и пазар, на който тя се търси и предлага, т.е. съществуват функции на търсене и предлагане на стоката $x(p)$ и $y(p)$, то при определени условия уравнението

$$x(p) = y(p)$$

ще допуска единствено решение p_E или

$$\exists!\, p_E : x(p_E) = y(p_E)$$

Ако положим $x(p_E) = y(p_E) := q_E$, тогава стоката ще се продава в количество q_E, защото това е количеството, което изравнява търсенето и предлагането при цена p_E. При такова съчетание на цена и количество за стоката се установява пазарно равновесие с равновесни стойности – равновесната цена p_E и равновесното количество q_E.

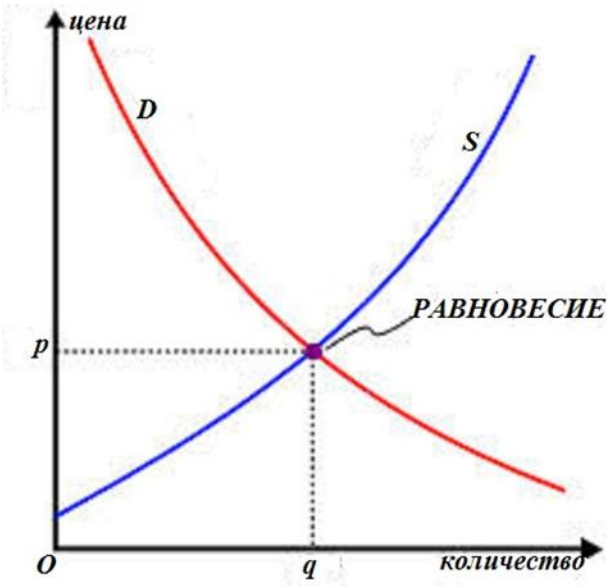

Рис.1. Частично пазарно равновесие - пресичане на линиите на търсене и предлагане.

В точката на пазарно равновесие $E(q_E, p_E)$ D-линията и S-линията за съответната стока се пресичат (рис. 1).

Потребителски излишък *CS* е общата сума парични единици, които потребителите са съгласни да заплатят за закупуване на стоката, при цени по-високи от равновесната. Ще имаме

$$CS = \int_{p_E}^{p_1} x(p)dp = \int_0^{q_E} p(x)dx - p_E q_E = \int_0^{q_E} [p(x) - p_E]\, dx,$$

където $p_1 : x(p_1) = 0$, т.е. цената, при която стоката спира да се търси, а $p(x)$ – обратната функция на търсене.

Производителски излишък *PS* – това е общата сума парични единици, които търговците са съгласни да получат от продажби на стоката, при цени по-ниски от пазарно установената. Аналогично, за *PS* получаваме

$$PS = \int_{p_2}^{p_E} y(p)dp = p_E q_E - \int_0^{q_E} p(y)dy = \int_0^{q_E} [p_E - p(y)]\, dy,$$

Където $p_2 : y(p_2) = 0$, т.е. цената при която стоката започва да се предлага, а $p(y)$е обратната функция на предлагане.

Като сумираме двата излишъка, получаваме общата изгода PB за всички, участващи в пазара на стоката $PB = CS + PS$.

РЕШЕНИ ЗАДАЧИ

Задача 1. Стефан иска да закупи гарсониера в квартал Смирненски. Той решил да проучи пазара на гарсониери в квартала. Събрал всички оферти купува и продава, достъпни в интернет и ги систематизирал в следната таблица:

Цена в хил. евро	20	21	22	23	24	25	26	27
Брой оферти купува	1	5	3	6	7	8	10	3
Брой оферти продава	-	-	-	-	2	4	5	4
Цена в хил. евро	28	29	30	31	32	33	34	
Брой оферти купува	4	-	2	-	-	-	-	
Брой оферти продава	6	9	8	7	6	-	3	

Да се ограничи възможно най-много равновесната цена на гарсониерите в кв. Смирненски.

Решение:

Тъй като цените на търсене (съответстващи на офертите купува) са разположени в ценовия интервал $[20,30]$, а цените на предлагане (от офертите продава) – в интервала $[24,34]$, то равновесната цена ще бъде разположена в интервала $[24,30]$. Следователно, ще трябва да проследим поведението на функциите на търсене и предлагане именно в този ценови интервал. Обемът на търсене за дадена цена всъщност се явява броя на офертите купува за тази цена и всички цени, по-високи от нея, а обемът на предлагане за дадена цена е броя на офертите продава за тази цена и всички, по-ниски от нея. Така съставяме следната таблица със стойностите на функциите на търсене и предлагане за всички цели числа в интервала $[24,30]$:

Цена в хил. евро	Функция на търсене	Функция на предлагане
24	34	2
25	27	6
26	19	11
27	9	15
28	6	21
29	2	30
30	2	38

Вижда се, че при цена от 26 хил. евро търсенето (в обем 19) е по-голямо от предлагането (в обем 11) – наблюдава се дефицит на стоката, а при цена от 27 хил. евро е обратното – предлагането (в обем 15) е по-голямо от търсенето (в обем 9) – излишък на стоката. Така, че равновесната цена на гарсониерите в квартал Смирненски ще е в ценовия интервал $(26,27)$.

Задача 2. Фирма произвежда и продава 1000 маратонки седмично при цена от 80 лв. за брой. Ценовата еластичност на търсенето на маратонки при тази цена е $e = -2$. Как да се измени цената, за да се увеличи броя на продаваните маратонки до 1400 броя за седмица.

Решение:

Ще имаме

$$e = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{\frac{400}{1000}}{\frac{\Delta p}{80}} = -2 \Longrightarrow -2\frac{\Delta p}{80} = 0{,}4 \Longrightarrow \Delta p = -16.$$

Тогава новата цена трябва да бъде $p + \Delta p = 80 - 16 = 64$ лв. за брой.

Задача 3. При цена на морковите от 80 ст. за килограм на пазара има трима търговци с индивидуални ценови еластичности на предлагането $e_1 = 1{,}6$, $e_2 = 2$ и $e_3 = 1$. Първият от тях при тази цена предлага 100 кг, вторият – 120 кг, а третият – 400 кг. Да се определи общия обем на пазарно предлагане на моркови при цена от 1 лв. и пазарната ценова еластичност на предлагане при цена от 80 ст.

Решение:

Означаваме с y_1, y_2, y_3 предлаганите количества от съответните търговци при цена от 80 ст./кг, а с Δy_1, Δy_2, Δy_3 – измененията на предлаганите количества

при промяна на цената до 1 лв./кг. По условие имаме $y_1 = 100$, $y_2 = 120$, $y_3 = 400$. Въз основа на определението за еластичност получаваме

$$e_1 = \frac{\frac{\Delta y_1}{y_1}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{\frac{\Delta y_1}{100}}{\frac{20}{80}} = 1{,}6 \Longrightarrow \frac{\Delta y_1}{100} = 0{,}4 \Longrightarrow \Delta y_1 = 40,$$

$$e_2 = \frac{\frac{\Delta y_2}{y_2}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{\frac{\Delta y_2}{120}}{\frac{20}{80}} = 2 \Longrightarrow \frac{\Delta y_2}{120} = 0{,}5 \Longrightarrow \Delta y_2 = 60,$$

$$e_3 = \frac{\frac{\Delta y_3}{y_3}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{\frac{\Delta y_3}{400}}{\frac{20}{80}} = 1 \Longrightarrow \frac{\Delta y_3}{400} = 0{,}25 \Longrightarrow \Delta y_1 = 100.$$

Нека $y = y_1 + y_2 + y_3 = 100 + 120 + 400 = 620$ е общото (пазарно) количество предлагани моркови при цена от 80 ст./кг, а $\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 = 40 + 60 + 100 = 200$ е изменението на пазарното предлагане при промяна на цената до 1 лв./кг. Тогава за пазарната ценова еластичност на предлагане e ще имаме

$$e = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{\frac{200}{620}}{\frac{20}{80}} = \frac{40}{31} \cong 1{,}29.$$

Задача 4. Намерете равновесните цена и количество, както и съответните излишъци за следните функции на търсене и предлагане:

	Функция на търсене	Функция на предлагане
а)	$x + p = 40$	$y + 4 = 3p$
б)	$x + 2p = 40$	$y = 4\sqrt{p} - 8$
в)	$x = -\frac{1}{2} + \frac{42}{p}$	$y = \frac{3}{2} - \frac{5}{\sqrt{p}}$
г)	$x = \frac{25}{2p} - \frac{5}{2}$	$p = \frac{y}{3{,}5 - y}$
д)	$x = \frac{6 - 3p}{p + 2}$	$y = \frac{4p - 10}{p + 1}$

Решение:

а) Областите от допустими стойности за p са: за функцията на търсене $p \in [0; 40]$ и за функцията на предлагане $p \in \left[\frac{4}{3}; \infty\right)$. Сечението на двете области е $p \in \left[\frac{4}{3}; 40\right]$. Приравнявайки функциите на търсене и предлагане получаваме системата

$$q = 40 - p = 3p - 4$$

с решения $p = 11$ и $q = 29$.

Потребителският излишък CS в този случай представлява лицето на правоъгълен триъгълник с върхове точките с координати $(11,29)$, $(11,0)$ и $(40,0)$, ограничен от правата $p = 11$ отдолу, $q = 0$ отляво и $q = 40 - p$ отдясно. В такъв случай той ще възлиза на

$$CS = \frac{1}{2}(40 - 11) \cdot 29 = \frac{29^2}{2} = \frac{841}{2} = 420{,}5.$$

Аналогично, излишъкът на производителите PS също ще бъде лицето на правоъгълен триъгълник с върхове точките с координати $(11,29)$, $(11,0)$ и $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$, ограничен от правата $p = 11$ отгоре, $q = 0$ отляво и $q = 3p - 4$ отдясно. Получаваме

$$PS = \frac{1}{2}\left(11 - \frac{4}{3}\right) \cdot 29 = \frac{29^2}{6} = \frac{841}{6} \cong 140{,}17.$$

Областите от допустими стойности за p са: за функцията на търсене $p \in [0; 20]$ и за функцията на предлагане $p \in [4; \infty)$. Сечението на двете области е $p \in [4; 20]$. Приравнявайки функциите на търсене и предлагане получаваме системата

$$q = 40 - 2p = 4\sqrt{p} - 8.$$

След полагането $\sqrt{p} = z$ горното уравнение се превръща в квадратно: $z^2 + 2z - 24 = 0$ с положителен корен $z = 4$. От тук получаваме $p = 16$ и след заместване (например) във функцията на търсене ще имаме $q = 8$.

Потребителският излишък CS представлява лицето на правоъгълен триъгълник с върхове точките с координати $(16,8)$, $(16,0)$ и $(20,0)$, ограничен от правата $p = 16$ отдолу, $q = 0$ отляво и $q = 40 - 2p$ отдясно. В такъв случай той ще възлиза на

$$CS = \frac{1}{2}(20 - 16) \cdot 8 = 16.$$

Излишъкът на производителите PS ще бъде лицето на криволинеен триъгълник с върхове точките с координати $(16,8)$, $(16,0)$ и $(4,0)$, ограничен от правата $p = 16$ отгоре, $q = 0$ отляво и кривата $q = 4\sqrt{p} - 8$ отдясно. Получаваме

$$PS = \int_4^{16} \left(4\sqrt{p} - 8\right) dp = \left(\frac{8}{3}p^{\frac{3}{2}} - 8p\right)\Big|_4^{16} = \frac{8}{3}64 - 128 - \frac{8}{3}8 + 32 = \frac{160}{3}.$$

в) Областите от допустими стойности за p са: за функцията на търсене $p \in [0; 84]$ и за функцията на предлагане $p \in \left[\frac{100}{9}; \infty\right)$. Сечението на двете области е $p \in \left[\frac{100}{9}; 84\right]$. Приравнявайки функциите на търсене и предлагане получаваме системата

$$q = -\frac{1}{2} + \frac{42}{p} = \frac{3}{2} - \frac{5}{\sqrt{p}}$$

Умножаваме двете страни на второто равенство с p и получаваме уравнението

$$2p - 5\sqrt{p} - 42 = 0.$$

След полагането $\sqrt{p} = z$ горното уравнение се превръща в квадратно: $2z^2 - 5z - 42 = 0$ с положителен корен $z = 6$. От тук получаваме $p = 36$ и след заместване (например) във функцията на търсене ще имаме $q = \frac{2}{3}$.

Потребителският излишък CS представлява лицето на криволинеен триъгълник с върхове точките с координати $\left(36, \frac{2}{3}\right)$, $(36,0)$ и $(84,0)$, ограничен от правата $p = 36$ отдолу, $q = 0$ отляво и кривата $q = -\frac{1}{2} + \frac{42}{p}$ отдясно. Пресмятаме CS чрез интегриране

$$CS = \int_{36}^{84} \left(-\frac{1}{2} + \frac{42}{p}\right) dp = \left(-\frac{p}{2} + 42\ln p\right)\Big|_{36}^{84} = -\frac{84}{2} + 42\ln 84 + \frac{36}{2} - 42\ln 36$$
$$= 42\ln\frac{84}{36} - 24 = 42\ln\frac{7}{3} - 24 \cong 11{,}59.$$

Излишъкът на производителите PS ще бъде лицето на криволинеен триъгълник с върхове точките с координати $\left(36, \frac{2}{3}\right)$, $(36,0)$ и $\left(\frac{100}{9}, 0\right)$, ограничен от правата $p = 36$ отгоре, $q = 0$ отляво и кривата $q = \frac{3}{2} - \frac{5}{\sqrt{p}}$ отдясно. Получаваме

$$PS = \int_{\frac{100}{9}}^{36} \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{\sqrt{p}}\right) dp = \left(\frac{3}{2}p - 10\sqrt{p}\right)\Big|_{\frac{100}{9}}^{36} = \frac{3}{2}36 - 10\sqrt{36} - \frac{3}{2}\frac{100}{9} + 10\sqrt{\frac{100}{9}}$$

$$= 54 - 60 - \frac{50}{3} + \frac{100}{3} = \frac{32}{3} \cong 10{,}67.$$

г) Областите от допустими стойности за p са: за функцията на търсене $p \in [0; 5]$ и за функцията на предлагане $p \in [0; \infty)$. Сечението на двете области е $p \in [0; 5]$. Да отбележим, че за разлика от другите случаи предлагането е ограничено ($y < 3{,}5$). Ако заместим p от функцията на предлагане в израза за функцията на търсене получаваме уравнението

$$q = \frac{25(3{,}5 - q)}{2q} - \frac{5}{2}.$$

Умножаваме двете страни на горното уравнение с $2q$ и стигаме до квадратното уравнение

$$4q^2 + 60q - 175 = 0$$

с положителен корен $q = \frac{5}{2}$. След заместване във обратната функция на предлагане намиране $p = \frac{5}{2}$.

Потребителският излишък CS представлява лицето на криволинеен триъгълник с върхове точките с координати $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ и $(5{,}0)$, ограничен от правата $p = \frac{5}{2}$ отдолу, $q = 0$ отляво и кривата $q = \frac{25}{2p} - \frac{5}{2}$ отдясно. Пресмятаме CS чрез интегриране

$$CS = \int_{\frac{5}{2}}^{5} \left(\frac{25}{2p} - \frac{5}{2}\right) dp = \left(-\frac{5p}{2} + \frac{25}{2}\ln p\right)\Big|_{\frac{5}{2}}^{5} = -\frac{25}{2} + \frac{25}{2}\ln 5 + \frac{25}{4} - \frac{25}{2}\ln\frac{5}{2}$$

$$= \frac{25}{2}\ln 2 - \frac{25}{4} \cong 2{,}41.$$

Излишъкът на производителите PS ще бъде лицето на криволинеен триъгълник с върхове точките с координати $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ и $(0{,}0)$, ограничен от правата $p = \frac{5}{2}$ отгоре, $q = 0$ отляво и кривата $p = \frac{q}{3{,}5 - q}$ (линията на обратната функция на предлагане) отдясно. Сега ще пресметнем PS чрез интегриране на обратната функция на предлагане. За PS ще имаме

$$pq - \int_0^{\frac{5}{2}} \left(\frac{q}{3{,}5 - q}\right) dq = \frac{5}{2}\frac{5}{2} - \int_0^{\frac{5}{2}} \left(\frac{q - 3{,}5 + 3{,}5}{3{,}5 - q}\right) dq = \frac{25}{4} + \int_0^{\frac{5}{2}} dq + \int_0^{\frac{5}{2}} \frac{1}{3{,}5 - q} dq$$

$$= \frac{25}{4} + \frac{5}{2} + \ln 1 - \ln 3{,}5 = \frac{35}{4} - \ln 3{,}5 \cong 7{,}5$$

д) За функцията на търсене имаме $p \in [0,2]$, а за функцията на предлагане - $p \in [2{,}5; \infty)$. Сечението на двата интервала е празното множество, следователно в този случай пазарно равновесие не съществува.

Задача 5. Капацитетът на пазара на една стока възлиза на 6 количествени единици, а пределната цена за потребителите е $p = 10$. Да се моделира функцията на пазарно търсене чрез функция от типа $x(p) = (a - bp)^{\alpha}$, ако за $p = 5$ търсенето е: а) 2; б) 3; в) 4. Във всеки от случаите да се пресметне ценовата еластичност на търсенето при цена $p = 5$.

Решение:

Това че пазарният капацитет е 6 количествени единици означава, че при $p = 0$ $x = 6$ или

$$x(0) = a^{\alpha} = 6.$$

Нека да преобразуваме израза за $x(p)$. Ще имаме

$$x(p) = (a - bp)^{\alpha} = a^{\alpha}\left(1 - \frac{b}{a}p\right)^{\alpha} = 6(1 - cp)^{\alpha}.$$

Това, че пределната цена за потребителите е $p = 10$ означава, че при $p = 10$ имаме $x = 0$ или

$$x(10) = 6(1 - 10c)^{\alpha} = 0 \Longrightarrow c = 0{,}1 \quad \text{и} \quad x(p) = 6(1 - 0{,}1p)^{\alpha}.$$

Нека сега, за $p = 10$ $x = d$, тогава

$$x(5) = 6 \cdot 0{,}5^{\alpha} = d \Longrightarrow 0{,}5^{\alpha} = \frac{d}{6}.$$

а) За $d = 2$ получаваме

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} = \frac{1}{3} \Longrightarrow 2^{\alpha} = 3 \Longrightarrow \alpha \ln 2 = \ln 3, \alpha = \frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{1{,}10}{0{,}69} = 1{,}59.$$

Тогава функцията на търсене ще бъде

$$x(p) = 6(1 - 0{,}1p)^{1{,}59}.$$

б) За $d = 3$ ще имаме $0{,}5^{\alpha} = 0{,}5$. Получаваме линейната функция ($\alpha = 1$) на търсене

$$x(p) = 6(1 - 0{,}1p) = 6 - 0{,}6p.$$

в) За $d = 4$ получаваме

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} = \frac{2}{3} \Longrightarrow 2^{\alpha} = \frac{3}{2}$$
$$\Longrightarrow \alpha \ln 2$$
$$= \ln 3 - \ln 2, \alpha = \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 2} = \frac{1{,}10 - 0{,}69}{0{,}69} = \frac{0{,}41}{0{,}69} = 0{,}59.$$

Така функцията на търсене добива вида

$$x(p) = 6(1 - 0{,}1p)^{0{,}59}.$$

Да пресметнем съответните еластичности. В общия случай (за произволно α и p) ще имаме

$$E\big(x(p)\big) = x'(p)\frac{p}{x(p)} = -0{,}6\alpha(1 - 0{,}1p)^{\alpha-1}\frac{p}{6(1 - 0{,}1p)^{\alpha}} = -\frac{0{,}1\alpha p}{1 - 0{,}1p}.$$

За $p = 5$ получаваме

$$E\big(x(5)\big) = -\alpha.$$

Тогава, в случай а) ще имаме $E\big(x(5)\big) = -1{,}59$ (силно еластично търсене), за б) получаваме $E\big(x(5)\big) = -1$ и за в) $E\big(x(5)\big) = -0{,}59$ (слабо еластично търсене). В първия случай графиката на функцията на търсене е вдлъбната, а в третия – изпъкнала.

Задача 6. За потребителското търсене на дадена стока е известно, че: 1) търсенето и не надвишава 70 хил. броя; 2) при всяка (дори и много висока) цена има някакво търсене; 3) при цена от 3 лв. за брой се търсят 40 хил. броя от стоката. Моделирайте търсенето на тази стока чрез функция от вида $x(p) = \frac{a}{p+c}$. Построете D-линията за стоката. Пресметнете ценовата еластичност на търсене при цена от 3 лв. за брой.

Решение:

Условие 1) означава, че

$$x(0) = \frac{a}{c} = 70 \Longrightarrow a = 70c \quad \text{и} \quad x(p) = \frac{70c}{p + c}.$$

Според условие 3)

$$x(3) = \frac{70c}{3+c} = 40 \Longrightarrow 70c = 120 + 40c \Longrightarrow c = 4 \text{ и } x(p) = \frac{280}{p+4}.$$

Условие 2) е автоматично изпълнено, защото

$$\lim_{p\to\infty} x(p) = \lim_{p\to\infty} \frac{280}{p+4} = 0,$$

следователно не съществува (крайна) пределна цена.

Ценовата еластичност за произволна цена p е

$$E\big(x(p)\big) = x'(p)\frac{p}{x(p)} = -\frac{280}{(p+4)^2}\frac{p(p+4)}{280} = -\frac{p}{p+4}.$$

Следователно при цена от 3 лв. тя е

$$E\big(x(3)\big) = -\frac{3}{7}.$$

Вижда се, че такава функция моделира слабо еластично търсене за всички стойности на p ($E\big(x(p)\big) > -1$).

Задача 7. За потребителското търсене на дадена стока е известно, че: 1) търсенето и е неограничено (при много ниски цени); 2) тя не се търси при цена, по-висока от 16 лв.; 3) при цена от 4 лв. се търсят 3 хил. броя от стоката. Моделирайте потребителското търсене на тази стока, като използвате функция от вида $x(p) = -a + \frac{b}{p}$. Какво може да се каже за ценовата еластичност на търсенето.

Решение:

Условие 2) означава, че

$$x(16) = -a + \frac{b}{16} = 0 \Longrightarrow b = 16a \text{ и } x(p) = -a + \frac{16a}{p}.$$

Според условие 3)

$$x(4) = -a + \frac{16a}{4} = 3a = 3 \Longrightarrow a = 1 \text{ и } x(p) = -1 + \frac{16}{p}.$$

Условие 1) е автоматично изпълнено, защото

$$\lim_{p\to 0} x(p) = \lim_{p\to 0}\left(-1 + \frac{16}{p}\right) = \infty.$$

За произволна стойност на p ценовата еластичност на търсене е

$$E\big(x(p)\big) = x'(p)\frac{p}{x(p)} = -\frac{16}{p^2}\frac{p}{\left(-1+\frac{16}{p}\right)} = -\frac{16}{16-p}.$$

Тогава за $p \in (0{,}16)$ ще имаме $E\big(x(p)\big) < -1$, следователно става дума за силно еластично търсене при всяка възможна цена.

Задача 8. За потребителското търсене на картофи е известно, че при цена от 1 лв. за кг се търсят 3 т и ценовата еластичност на търсенето е $-\frac{1}{3}$. Да се състави функцията на търсене, ако се приеме, че: а) ценовата еластичност на търсенето е постоянна; б) функцията на търсене е линейна; в) функцията на търсене е от вида $x = (a - bp)^2$. Прогнозирайте търсенето на картофи при цена от 1,40 лв. за килограм.

Решение:

Условието на задачата означава, че

$$x(1) = 3 \quad \text{и} \quad E\big(x(1)\big) = -\frac{1}{3}.$$

а) Тъй като функцията на търсене е с постоянна еластичност, тя трябва да бъде степенна функция $x(p) = ap^{\alpha}$, като степенният показател съвпада с еластичността. Ще имаме

$$x(p) = ap^{-\frac{1}{3}}.$$

От първото условие получаваме

$$x(1) = a1^{-\frac{1}{3}} = 3 \Longrightarrow x(p) = 3p^{-\frac{1}{3}}.$$

б) Предполагаме, че линейната функция на търсене е от вида $x(p) = a - bp$. Първото от тези условия означава, че

$$x(1) = a - b = 3 \Longrightarrow a = 3 + b \quad \text{и} \quad x(p) = 3 + b - bp.$$

За еластичността на функцията ще имаме

$$E\big(x(p)\big) = x'(p)\frac{p}{x(p)} = -\frac{bp}{3+b-bp}.$$

Тогава второто условие е еквивалентно на

$$E\big(x(1)\big) = -\frac{b}{3+b-b} = -\frac{b}{3} = -\frac{1}{3} \Longrightarrow b = 1 \quad \text{и} \quad x(p) = 4 - p.$$

в) Преобразуваме функцията на търсене

$$x(p) = (a - bp)^2 = a^2\left(1 - \frac{b}{a}p\right)^2 = a^2(1 - cp)^2.$$

От първото от тези условия получаваме, че

$$x(1) = a^2(1 - c)^2 = 3 \Longrightarrow a^2 = \frac{3}{(1 - c)^2} \quad \text{и} \quad x(p) = \frac{3}{(1 - c)^2}(1 - cp)^2.$$

За еластичността на тази функция ще имаме

$$E\big(x(p)\big) = x'(p)\frac{p}{x(p)} = \frac{3}{(1 - c)^2}2(1 - cp)(-c)\frac{p(1 - c)^2}{3(1 - cp)^2} = -\frac{2cp}{1 - cp}.$$

Тогава

$$E\big(x(1)\big) = -\frac{2c}{1 - c} = -\frac{1}{3} \Longrightarrow 6c = 1 - c, c = \frac{1}{7}.$$

Окончателно за функцията на търсене получаваме

$$x(p) = \frac{3}{\left(1 - \frac{1}{7}\right)^2}\left(1 - \frac{1}{7}p\right)^2 = \frac{49}{12}\left(1 - \frac{1}{7}p\right)^2$$

Сега да направим прогноза за търсенето при $p = 1{,}4$. В случай а) ще имаме

$$x(1{,}4) = 3 \cdot 1{,}4^{-\frac{1}{3}} = 2{,}68.$$

(Друг подход: $\ln x(1{,}4) = \ln 3 - \frac{1}{3}\ln 1{,}4 = 1{,}10 - \frac{1}{3}0{,}33 = 1{,}10 - 0{,}11 = 0{,}99$. Антилогаритмуваме и получаваме $x(1{,}4) = e^{0{,}99} = 2{,}69$). В случай на линейна функция ще имаме $x(1{,}4) = 4 - 1{,}4 = 2{,}6$. И накрая, в случай в) получаваме

$$x(1{,}4) = \frac{49}{12}\left(1 - \frac{1}{7}1{,}4\right)^2 = \frac{49}{12}\frac{16}{25} = \frac{196}{75} = 2{,}61.$$

Задача 9. Предполага се, че при цена $p = 3$ търсенето на една стока възлиза на 4 количествени единици, а предлагането – на 2; при цена $p = 5$ търсенето е 3, а предлагането – 4. Да се възстановят функциите на търсене и предлагане, да се намерят равновесните цена и количество и да се пресметнат ценовите еластичности на търсенето и предлагането при условие за равновесие, ако функциите са: а) линейни; б) степенни.

Решение:

а) Нека $x = x(p)$ е линейна функция на търсене, тогава ще имаме

$$x(p) = a - bp\ .$$

Според данните за функцията на търсене $x(3) = a - 3b = 4$ и $x(5) = a - 5b = 3$. След решаване на тази линейна система получаваме $a = 5{,}5$ и $b = 0{,}5$, така че функцията на търсене е $x(p) = 5{,}5 - 0{,}5p$. Аналогично, линейната функция на предлагане ще има вида

$$y(p) = -c + dp$$

и от $y(3) = -c + 3d = 2$, $y(5) = -c + 5d = 4$ намираме $c = d = 1$, така че функцията на търсене е $y(p) = -1 + p$. Изравняването на количествата на търсене и предлагане $x(p) = y(p)$ е еквивалентно на уравнението $5{,}5 - 0{,}5p = -1 + p$ с решение $p = 13/3 = 4{,}33$. При тази равновесна цена получаваме равновесното количество $x(13/3) = y(13/3) = 10/3 = 3{,}33$. Да определим ценовите еластичности на търсене и предлагане в условие на равновесие. За ценовата еластичност на търсене ще имаме

$$E\left(x\left(\frac{13}{3}\right)\right) = x'\left(\frac{13}{3}\right) \cdot \frac{\frac{13}{3}}{x\left(\frac{13}{3}\right)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{13}{3}}{\frac{10}{3}} = -\frac{13}{20} = -0{,}65\,,$$

което свидетелства за слабо еластично търсене. За ценовата еластичност на предлагане ще имаме

$$E\left(y\left(\frac{13}{3}\right)\right) = y'\left(\frac{13}{3}\right) \cdot \frac{\frac{13}{3}}{y\left(\frac{13}{3}\right)} = 1 \cdot \frac{\frac{13}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{13}{10} = 1{,}3\,,$$

или предлагането е силно еластично.

б) Нека $x = x(p)$ е степенна функция на търсене, тогава ще имаме

$$x(p) = ap^{-\alpha}$$

или след логаритмуване

$$\ln x(p) = \ln a - \alpha \ln p$$

От дадените условия получаваме системата

$$\ln 4 = \ln a - \alpha \ln 3$$

$$\ln 3 = \ln a - \alpha \ln 5$$

Изваждайки второто от първото уравнение получаваме

$$\alpha = \frac{\ln 4 - \ln 3}{\ln 5 - \ln 3} = \frac{1{,}39 - 1{,}10}{1{,}61 - 1{,}10} = \frac{0{,}29}{0{,}51} = 0{,}57$$

Като заместим получената стойност за α в първото уравнение на системата ще имаме

$$\ln a = \ln 4 + 0{,}57 \ln 3 = 1{,}39 + 0{,}57 \cdot 1{,}10 = 1{,}39 + 0{,}63 = 2{,}02.$$

След антилогаритмуване получаваме

$$a = e^{2{,}02} = 7{,}54.$$

Окончателният вид на функцията на търсене ще бъде

$$x(p) = 7{,}54p^{-0{,}57}$$

Аналогично, като използваме числовите данни, възстановяваме функцията на предлагане. В степенен вариант тя ще има вида

$$y(p) = bp^{\beta}$$

или след логаритмуване

$$\ln y(p) = \ln b + \beta \ln p.$$

Като използваме числовите данни, получаваме

$$\ln 2 = \ln b + \beta \ln 3$$

$$\ln 4 = \ln b + \beta \ln 5,$$

изваждаме първото от второто уравнение и получаваме

$$\beta = \frac{\ln 4 - \ln 2}{\ln 5 - \ln 3} = \frac{1{,}39 - 0{,}69}{1{,}61 - 1{,}10} = \frac{0{,}70}{0{,}51} = 1{,}37.$$

Като заместим получената стойност за β в първото уравнение на системата ще имаме

$$\ln b = \ln 2 - 1{,}37 \ln 3 = 0{,}69 - 1{,}37 \cdot 1{,}10 = 0{,}69 - 1{,}51 = -0{,}82.$$

След антилогаритмуване получаваме

$$b = e^{-0{,}82} = 0{,}44.$$

Окончателният вид на функцията на предлагане ще бъде

$$y(p) = 0{,}44p^{1{,}37}$$

Тогава уравнението на пазарното равновесие

$$q = x(p) = 7{,}54p^{-0{,}57} = 0{,}44p^{1{,}37} = y(p)$$

може да решим по два начина.

Първи начин. След логаритмуване получаваме

$$\ln 7{,}54 - 0{,}57 \ln p = \ln 0{,}44 + 1{,}37 \ln p.$$

Като имаме предвид, че $\ln 7{,}54 = 2{,}02$ ($e^{2{,}02} = 7{,}54$) и $\ln 0{,}44 = -0{,}82$ ($e^{-0{,}82} = 0{,}44$), за $\ln p$ ще имаме

$$\ln p = \frac{\ln 7{,}54 - \ln 0{,}44}{1{,}37 + 0{,}57} = \frac{2{,}02 - (-0{,}82)}{1{,}94} = \frac{2{,}84}{1{,}94} = 1{,}46.$$

Тогава, за $\ln q$ ще имаме

$$\ln q = \ln 7{,}54 - 0{,}57 \ln p = 2{,}02 - 0{,}57 \cdot 1{,}46 = 2{,}02 - 0{,}83 = 1{,}19$$

след антилогаритмуване получаваме

$$p = e^{1{,}46} = 4{,}41 \quad \text{и} \quad q = e^{1{,}19} = 3{,}29.$$

Втори начин. Уравнението на пазарното равновесие умножаваме с $p^{0{,}57}$ и делим на $0{,}44$. Тогава ще имаме

$$p^{1{,}94} = 17{,}14 \quad \text{или} \quad 1{,}94 \ln p = \ln 17{,}14 \Longrightarrow \ln p = \frac{\ln 17.14}{1{,}94} = \frac{2{,}84}{1{,}94} = 1{,}46.$$

Тогава за $\ln q$ (и съответно за p и q след антилогаритмуване) получаваме същите резултати. Уравнението $p^{1{,}94} = 17{,}14$ може да се реши и така: двете страни повдигаме на степен $1/1{,}94$, ще имаме

$$(p^{1{,}94})^{\frac{1}{1{,}94}} = 17{,}14^{\frac{1}{1{,}94}} \Longrightarrow p = 17{,}14^{0{,}52} = 4{,}38.$$

Тогава за q получаваме

$$q = 7{,}54 \cdot 4{,}38^{-0{,}57} = 7{,}54 \cdot 0{,}43 = 3{,}24.$$

Ясно е, че различието в резултатите е следствие от натрупана грешка от закръгляне (до втори знак след десетичната запетая).

Що се отнася до ценовите еластичности на търсене и предлагане, то трябва да си спомним, че степенните функции са функции с постоянна еластичност (равна на степенния показател), така че

$$E\big(x(p)\big) = -0{,}57 \quad \text{и} \quad E\big(y(p)\big) = 1{,}37.$$

Задача 10. Функцията на предлагане е от вида

$$y = \frac{ap + b}{p + c},$$

като: 1) производственият капацитет е 50 количествени единици; 2) производителите започват да предлагат при цена от 10; 3) пазарното равновесие се достига при 25% запълнен производствен капацитет и ценова еластичност на

предлагането 1. Да се възстанови функцията на предлагане. Да се възстанови и функцията на търсене, ако тя е линейна и потребителският излишък е 125. Да се пресметне ценовата еластичност на търсене при условие на пазарно равновесие.

Решение:

За производствения капацитет имаме

$$\lim_{p\to\infty} y = \lim_{p\to\infty} \frac{ap+b}{p+c} = \lim_{p\to\infty} \frac{p\left(a+\frac{b}{p}\right)}{p\left(1+\frac{c}{p}\right)} = a = 50.$$

Следователно (засега), функцията на предлагане има вида

$$y = \frac{50p+b}{p+c}.$$

Второто условие означава, че $y(p=10)=0$, откъдето получаваме $b=-500$ и

$$y = 50\frac{p-10}{p+c}.$$

Остава да определим параметъра c от третото условие. Ако е запълнен 25% от производствения капацитет, следва че предлагането е $\frac{50}{4}$. Така получаваме параметричното уравнение

$$50\frac{p-10}{p+c} = \frac{50}{4} \Longrightarrow 4p-40 = p+c \Longrightarrow p = \frac{c+40}{3}.$$

Тъй като производната е

$$y' = 50\frac{(p+c)-(p-10)}{(p+c)^2} = \frac{50(c+10)}{(p+c)^2},$$

то за ценовата еластичност на предлагане получаваме

$$E\big(y(p)\big) = y'\frac{p}{y} = \frac{50(c+10)}{(p+c)^2}\frac{p(p+c)}{50(p-10)} = \frac{(c+10)p}{(p+c)(p-10)}.$$

Сега пресмятаме еластичността, при $p=\frac{c+40}{3}$:

$$E\left(y\left(p=\frac{c+40}{3}\right)\right) = \frac{(c+10)\frac{c+40}{3}}{\left(\frac{c+40}{3}+c\right)\left(\frac{c+40}{3}-10\right)} = \frac{3(c+40)}{4(c+10)}.$$

Тъй като ако $p=\frac{c+40}{3}$ (т.е. са запълнени 25% от производствените мощности) $E=1$, то ще имаме

$$\frac{3(c+40)}{4(c+10)} = 1 \Longrightarrow 3c + 120 = 4c + 40 \Longrightarrow c = 80$$

и $p = \frac{c+40}{3} = \frac{80+40}{3} = 40$. Тогава функцията на предлагане е

$$y = 50\frac{p-10}{p+80}.$$

Сега трябва да се възстанови функцията на търсене, ако тя е линейна, т. е. $x(p) = a - bp$. Първо, използваме, че тя се удовлетворява в точката на равновесие $p = 40$, $q = 12{,}5$: ще имаме $x(40) = a - 40b = 12{,}5 \Longrightarrow a = 12{,}5 + 40b$, $x(p) = 12{,}5 + 40b - bp$.

Ако пределната цена (тази, при която се нулира търсенето) е p_0, то потребителският излишък ще възлиза на

$$CS = \frac{1}{2}(p_0 - 40)\frac{25}{2} = \frac{25}{4}(p_0 - 40).$$

От друга страна имаме $CS = 125$, следователно $p_0 = 60$, т. е. $x(60) = 12{,}5 + 40b - 60b = 12{,}5 - 20b = 0 \Longrightarrow b = \frac{5}{8}$ и функцията на търсене е

$$x = 37{,}5 - \frac{5}{8}p.$$

За ценовата еластичност на търсене ще имаме

$$E\big(x(p)\big) = x'\frac{p}{x} = -\frac{\frac{5}{8}p}{37{,}5 - \frac{5}{8}p}.$$

В условие на равновесие ще имаме

$$E\big(x(40)\big) = -\frac{\frac{5}{8}\cdot 40}{37{,}5 - \frac{5}{8}\cdot 40} = -\frac{25}{12{,}5} = -2.$$